УДК 514.75:517.53

Л. Л. Безкоровайная (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

О НОВОМ КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУНКЦИИ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ $Z = u$, $Z = v$

We establish a new criterion for the analyticity of a function $w = u + iv$ or $\overline{w} = u - iv$, $u(x, y)$, $v(x, y) \in C^1(G)$ in the domain G. It is expressed via the metric tensors of the surfaces $Z = u$ and $Z = v: g_{11} - a_{22} = 0$, $g_{12} + a_{12} = 0$, $g_{22} - a_{11} = 0$. We also discover some other equivalents of the analytic function and establish the invariance of the obtained relations under conformal transformations. The generalized version of the new criterion is also proposed.

Знайдено новий критерій аналітичності в області G функції $w = u + iv$ або $\overline{w} = u - iv$, $u(x, y)$, $v(x, y) \in C^1(G)$, що виражений через метричні тензори поверхонь $Z = u$ і $Z = v: g_{11} - a_{22} = 0$, $g_{12} + a_{12} = 0$, $g_{22} - a_{11} = 0$. Виявлено деякі інші еквіваленти аналітичної функції і встановлено інваріантність одержаних співвідношень відносно конформних перетворень. Отримано узагальнений варіант нового критерію.

1. Введение и постановка задачи. Б. Риман ввел понятие поверхности, которая теперь называется римановой, и положил начало обоснованию геометрических характеристик в теории аналитических функций [1, 2]. Почти каждое свойство аналитической функции является носителем интерпретаций. Конформные отображения, осуществляемые аналитическими функциями, находят существенные приложения к различным областям физики.

Введение многомерного комплексного пространства вызвало новый поток научных устремлений, проявившийся в обобщениях понятий комплексного числа, аналитической функции [3 – 5] конформного и гармонического отображений [6 – 8] и др. Расширяется ареал и геометрических соответствий [9, 10].

Объектом статьи являются геометрические аспекты понятия аналитической функции одной комплексной переменной. Известны различные определения аналитической функции. Конечно, они эквивалентны между собой, иными словами, являются математическими эквивалентами. Каждый эквивалент аналитической функции, по существу, представляет собой одну из ее математических моделей, которая может быть положена в основу теории. Для аналитической функции естественно предполагать существование разнообразных эквивалентов и геометрического характера. Этой теме посвящена данная работа.

В 1960 г. В. К. Дзядык доказал теорему, которая, раскрывая геометрическую сущность аналитической функции одной комплексной переменной, позволила ввести геометрическое определение этого понятия.

Теорема 1 (критерий аналитичности В. К. Дзядыка) [11]**.** *Пусть в некоторой области G заданы две действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными u_x, u_y, v_x и v_y. Тогда для того, чтобы функция*

$$w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

была аналитической или сопряженной к аналитической в области G, необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности

$$Z = u(x, y), \qquad Z = v(x, y), \tag{2}$$

$$Z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \tag{3}$$

имели над произвольной областью $G_0 \subset G$ равные площади.

В 1964 г. A. W. Goodman доказал [12], что теорема В. К. Дзядыка остается в силе, если в ней поверхность (3) заменить поверхностью $Z = \varphi(u,v)$, где функция $\varphi(u,v)$ удовлетворяет уравнению $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 = 1$. Решения этого дифференциального уравнения изучались в [13].

В своем варианте обобщения теоремы В. К. Дзядыка Ю. Ю. Трохимчук в 2007 г. вместо требования непрерывности частных производных функций u, v ограничился требованием их существования всюду в области G. Поверхность (3) в предложенном обобщенном варианте критерия аналитичности Ю. Ю. Трохимчук заменил поверхностью $Z = \alpha u + \beta v$, где $\alpha,\ \beta$ — постоянные, для которых выполняется условие $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ [14, 15].

Поверхности (2) являются объектами исследований и в [16, 17].

Функции $u(x,y),\ v(x,y)$, как действительная и мнимая части аналитической в области G функции комплексной переменной $w(z)$, являются сопряженными и гармоническими. Эти качества, естественно, геометрически воплощены в паре поверхностей (2) как едином целом. В работе [18] гармоническая сопряженность поверхностей (2) исследуется на „устойчивость" и степень произвола относительно ареальных бесконечно малых деформаций. Поверхности вида (2), ассоциированные с аналитической или сопряженной к аналитической в области G функцией $w = u + iv$ (1), будем называть u- и v- поверхностями соответственно.

Обозначим через g_{ij} и $a_{ij},\ i,j = 1,2$, метрические тензоры u- и v-поверхностей соответственно, а через b_{ij} и λ_{ij} их вторые фундаментальные тензоры. Между компонентами одноименных фундаментальных тензоров имеют место зависимости

$$\begin{gathered} a_{11} = g_{22}, \qquad a_{12} = -g_{12}, \qquad a_{22} = g_{11}, \\ \lambda_{11} = -b_{12}, \qquad \lambda_{12} = b_{11} = -b_{22}, \qquad \lambda_{22} = b_{12} = -\lambda_{11}, \end{gathered} \tag{4}$$

которые являются инвариантными при невырожденных конформных преобразованиях первого (второго) рода [19].

Соотношения (4) свидетельствуют о глубоких и тесных связях пары u- и v-поверхностей, выражая их двойственность (дуальность). Первые три из них представлены исключительно через метрические тензоры и не изменяются при их перестановке, т. е. являются симметричными. Будем называть их *метрическими соотношениями (условиями) дуальности поверхностей*.

В данной статье мы изучаем свойства метрических условий дуальности (теоремы 2–4, 7, 8, 10, 12), находим их геометрические интерпретации (теоремы 7, 10) в предположении, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — заданные в некоторой области G функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка. Класс таких функций будем обозначать через C^1 или же $C^1(G)$. Исследования статьи направлены на то, чтобы найти новые, геометрического характера, необходимые и достаточные условия того, чтобы функция w либо $\overline{w}$ в области G была аналитической, и представить их через метрические тензоры поверхностей $Z = u,\ Z = v$, $u,\ v \in C^1(G)$. Эта задача реализована теоремами 8 и 12.

Существенное внимание уделяется поиску звеньев, связывающих теорему В. К. Дзядыка с теоремой 8. С одной стороны, таким звеном оказалось требование равенства дискриминантов $g = a = \gamma$ метрических форм всех трех поверхностей $Z = u,\ Z = v,\ Z = \sqrt{u^2 + v^2}$,

$u, v \in C^1(G)$, а с другой — эквиареальное отображение с сохранением площади этих же поверхностей.

В теореме 11 соединены воедино все обнаруженные эквиваленты, а в теореме 12 новый критерий представлен в обобщенной форме.

2. О некоторых дифференциально-геометрических характеристиках поверхностей $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ класса C^1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E_3 дана декартова система координат $OxyZ$. В некоторой области G плоскости Oxy зададим две функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, принадлежащие классу C^1. Над областью G рассмотрим две поверхности

$$Z = u(x, y), \qquad Z = v(x, y), \tag{5}$$

для которых введем естественные параметризации $(G, \overline{r})$ и $(G, \overline{\rho})$ соответственно:

$$\overline{r} = (x, y, u(x, y)), \qquad \overline{\rho} = (x, y, v(x, y)). \tag{6}$$

Очевидно, эти поверхности также принадлежат классу $C^1(G)$.

Найдем компоненты метрического тензора g_{ij} поверхности $Z = u$ по известным формулам $g_{ij} = \overline{r_i r_j}$, предположив, что все индексы принимают значения 1, 2 и $x = x^1$, $y = x^2$ [20, с. 170] (ч. 1):

$$\overline{r_1} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x} = (1, 0, u_x), \qquad \overline{r_2} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = (0, 1, u_y),$$

$$\overline{r_1} \times \overline{r_2} = (-u_x, -u_y, 1), \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$g_{11} = \overline{r_1}^2 = 1 + u_x^2, \qquad g_{12} = \overline{r_1 r_2} = u_x u_y, \qquad g_{22} = \overline{r_2}^2 = 1 + u_y^2. \tag{7}$$

Метрическая форма поверхности $Z = u$ имеет вид

$$I = g_{11} dx^2 + 2 g_{12}\, dx\, dy + g_{22} dy^2 = (1 + u_x^2) dx^2 + 2 u_x u_y\, dx\, dy + (1 + u_y^2) dy^2.$$

Дискриминант метрической формы (метрического тензора) поверхности $Z = u$

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 1 + u_x^2 + u_y^2. \tag{8}$$

Аналогично находим метрический тензор $a_{ij} = \overline{\rho_i \rho_j}$ и метрическую форму I_ρ поверхности $Z = v$:

$$\overline{\rho_1} = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x} = (1, 0, v_x), \qquad \overline{\rho_2} = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y} = (0, 1, v_y), \qquad \overline{\rho_1} \times \overline{\rho_2} = (-v_x, -v_y, 1),$$

$$a_{11} = \overline{\rho_1}^2 = 1 + v_x^2, \qquad a_{12} = \overline{\rho_1 \rho_2} = v_x v_y, \qquad a_{22} = \overline{\rho_2}^2 = 1 + v_y^2, \tag{9}$$

$$I_\rho = a_{11} dx^2 + 2 a_{12}\, dx\, dy + a_{22} dy^2 = (1 + v_x^2) dx^2 + 2 v_x v_y\, dx\, dy + (1 + v_y^2) dy^2.$$

Дискриминант метрической формы поверхности $Z = v$

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 1 + v_x^2 + v_y^2. \tag{10}$$

Над областью G рассмотрим еще одну поверхность

$$Z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}, \tag{11}$$

где $u, v \in C^1$ — заданные ранее функции. Представив ее в векторно-параметрической форме

$$\overline{R} = (x, y, F(x,y)), \qquad F(x,y) = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)},$$

найдем компоненты метрического тензора γ_{ij} и метрическую форму I_{mod}:

$$\overline{R_1} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial x} = (1, 0, F_x), \qquad \overline{R_2} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial y} = (0, 1, F_y),$$

$$F_x = \frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad F_y = \frac{uu_y + vv_y}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{12}$$

$$\gamma_{11} = \overline{R_1}^2 = 1 + F_x^2, \qquad \gamma_{12} = \overline{R_1 R_2} = F_x F_y, \qquad \gamma_{22} = \overline{R_2}^2 = 1 + F_y^2, \tag{13}$$

$$I_{\mathrm{mod}} = \gamma_{11} dx^2 + 2\gamma_{12}\, dx\, dy + \gamma_{22} dy^2.$$

После простых преобразований с учетом формул (12), (13) дискриминант метрической формы поверхности $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ примет вид

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = 1 + F_x^2 + F_y^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\Big(u^2\big(u_x^2 + u_y^2\big) + v^2(v_x^2 + v_y^2) + 2uv\big(u_x v_x + u_y v_y\big)\Big). \tag{14}$$

Отметим, что в области G для поверхности $Z = u,\ u \in C^1$, два вида ее задания $(5)_1$ и $(6)_1$ равносильны. В каждой точке на всем заданном протяжении этой поверхности в параметризации $(G, \overline{r})$ выполняется неравенство $\overline{r_1} \times \overline{r_2} \neq 0$, которое является признаком обыкновенной точки [20, с. 99] (ч. 1). Особых точек на поверхности нет. Вся поверхность простая и является образом области G в пространстве при гомеоморфизме $(G, \overline{r})$. Взаимно однозначное соответствие между точками области G и точками поверхности наглядно можно представить в виде проектирования прямыми, параллельными оси OZ. Каждой точке с декартовыми координатами $(x, y) \in G$ оно сопоставляет точку поверхности с криволинейными координатами (x, y), и наоборот.

Поскольку u — произвольная функция класса C^1 в области G, то поверхности $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ (11) класса $C^1(G)$, определенные над областью G в виде явного уравнения, разрешенного относительно аппликаты, имеют аналогичные свойства.

Таким образом, между поверхностями $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$, гомеоморфными области G и отнесенными к общим координатам, естественно устанавливается взаимно однозначное точечное соответствие, при котором соответствующие точки характеризуются равенством криволинейных координат. Этим соответствием все три поверхности, очевидно, гомеоморфно отображены одна на другой.

3. Метрические условия дуальности для поверхностей класса $C^1(G)$, и их инвариантность относительно конформных преобразований. Далее мы докажем некоторые свойства метрических соотношений дуальности

$$a_{11} - g_{22} = 0, \qquad a_{12} + g_{12} = 0, \qquad a_{22} - g_{11} = 0 \tag{15}$$

применительно к двум поверхностям $Z = u$ и $Z = v$ (5), и только к ним, при условии, что u и v — заданные в области G функции класса C^1.

Поскольку компоненты метрических тензоров g_{ij} и a_{ij} поверхностей (5) класса $C^1(G)$ имеют выражения (7) и (9), легко убедиться, что для заданных в области G функций $u,\ v \in C^1$ метрические условия дуальности (15) поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ эквивалентны системе равенств

$$v_x^2 = u_y^2, \qquad v_x v_y = -u_x u_y, \qquad v_y^2 = u_x^2. \tag{16}$$

Лемма 1. *Для заданных в области G функций $u,\ v \in C^1$ метрические условия дуальности* (15) *поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ эквивалентны системе равенств*

$$v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2 = 0, \qquad v_{\overline{z}} v_z - u_{\overline{z}} u_z = 0, \qquad v_z^2 + u_z^2 = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть имеет место система равенств (15). Докажем, что в таком случае выполняются равенства (17). С этой целью введем дифференциальные операторы первого порядка [5, с. 28]

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -i\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad z = x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy,\end{gathered} \tag{18}$$

и представим компоненты g_{ij} и a_{ij} из формул (7), (9), а также выражения $a_{11} - g_{22}$, $a_{12} + g_{12}$, $a_{22} - g_{11}$ в комплексном виде

$$\begin{gathered}a_{11} = 1 + v_x^2 = 1 + v_{\overline{z}}^2 + 2v_{\overline{z}}v_z + v_z^2, \qquad g_{22} = 1 + u_y^2 = 1 - \left(u_{\overline{z}}^2 - 2u_{\overline{z}}u_z + u_z^2\right),\\ a_{12} = v_x v_y = -i(v_{\overline{z}}^2 - v_z^2), \qquad g_{12} = u_x u_y = -i(u_{\overline{z}}^2 - u_z^2),\\ a_{22} = 1 + v_y^2 = 1 - \left(v_{\overline{z}}^2 - 2v_{\overline{z}}v_z + v_z^2\right), \qquad g_{11} = 1 + u_x^2 = 1 + u_{\overline{z}}^2 + 2u_{\overline{z}}u_z + u_z^2,\\ a_{11} - g_{22} = \left(v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2\right) + 2(v_{\overline{z}}v_z - u_{\overline{z}}u_z) + \left(v_z^2 + u_z^2\right),\\ a_{12} + g_{12} = -i\left(v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2\right) + i\left(v_z^2 + u_z^2\right),\\ a_{22} - g_{11} = -\left(v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2\right) + 2(v_{\overline{z}}v_z - u_{\overline{z}}u_z) - \left(v_z^2 + u_z^2\right).\end{gathered} \tag{19}$$

При условиях (15) соотношения (19) представляют собой алгебраическую однородную линейную систему трех уравнений относительно трех неизвестных $v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2$, $v_{\overline{z}}v_z - u_{\overline{z}}u_z$, $v_z^2 + u_z^2$, определитель которой $\triangle = -8i \neq 0$. Эта система имеет единственное решение, а именно тривиальное, которое выражается формулами (17). Наоборот, если имеют место соотношения (17), то вследствие (19) непосредственно получаем условия дуальности (15).

Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Для заданных в области G функций u, v, принадлежащих классу C^1, метрические условия дуальности* (15) *являются инвариантными относительно конформных преобразований первого (второго) рода.*

Доказательство. Допустим, что аналитическая однолистная в области G функция $\widetilde{z} = \Phi(z)$, $\Phi'(z) \neq 0$, $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, реализует конформное преобразование первого рода области G в некоторую область $G_{\widetilde{z}}$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial z}=\Phi'(z),\qquad \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial\overline{z}}=0,\qquad \overline{\widetilde{z}}=\overline{\Phi(z)},\qquad \frac{\partial\overline{\widetilde{z}}}{\partial\overline{z}}=\overline{\Phi'(z)},\qquad \frac{\partial\overline{\widetilde{z}}}{\partial z}=0. \tag{20}$$

С учетом (20) найдем законы конформного преобразования всех выражений, входящих в соотношения (19):

$$\begin{gathered} v_z=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial\widetilde{z}}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial z}=v_{\widetilde{z}}\Phi'(z),\qquad v_{\overline{z}}=v_{\overline{\widetilde{z}}}\overline{\Phi'(z)},\\ u_z=u_{\widetilde{z}}\Phi'(z),\qquad u_{\overline{z}}=u_{\overline{\widetilde{z}}}\overline{\Phi'(z)}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} v_{\overline{z}}^2+u_{\overline{z}}^2=\big(v_{\overline{\widetilde{z}}}^2+u_{\overline{\widetilde{z}}}^2\big)\overline{\Phi'(z)}^2,\\ v_{\overline{z}}v_z-u_{\overline{z}}u_z=\big(v_{\overline{\widetilde{z}}}v_{\widetilde{z}}-u_{\overline{\widetilde{z}}}u_{\widetilde{z}}\big)\overline{\Phi'(z)}\Phi'(z),\\ v_z^2+u_z^2=\big(v_{\widetilde{z}}^2+u_{\widetilde{z}}^2\big)\Phi'^2(z). \end{gathered} \tag{22}$$

По предположению теоремы левые части системы равенств (22) равны нулю в силу эквивалентности соотношений (15) и (17) (лемма 1). Поскольку мы ограничиваемся невырожденными конформными преобразованиями, при которых $\Phi'(z)\neq 0$ в каждой точке области G, то из (22) получаем

$$v_{\overline{\widetilde{z}}}^2+u_{\overline{\widetilde{z}}}^2=0,\qquad v_{\overline{\widetilde{z}}}v_{\widetilde{z}}-u_{\overline{\widetilde{z}}}u_{\widetilde{z}}=0,\qquad v_{\widetilde{z}}^2+u_{\widetilde{z}}^2=0.$$

Отсюда следует, что при конформных преобразованиях система равенств (17) не изменила свой вид. Значит, она является инвариантной.

Базируясь на соотношениях (19), докажем инвариантность метрических условий дуальности (15). Представим, например, сумму $a_{12}+g_{12}$ $(19)_2$ в новых координатах $\widetilde{x},\ \widetilde{y}$:

$$a_{12}(x,y)+g_{12}(x,y)=-i\big(v_{\overline{\widetilde{z}}}^2+u_{\overline{\widetilde{z}}}^2\big)+i\big(v_{\widetilde{z}}^2+u_{\widetilde{z}}^2\big)=a_{12}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)+g_{12}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)=0.$$

Аналогично получим $a_{11}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)-g_{22}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)=0,\ a_{22}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)-g_{11}\big(\widetilde{x},\widetilde{y}\big)=0.$

Итак, мы установили, что при переходе от координат $x,\ y$ к новым координатам $\widetilde{x},\ \widetilde{y}$ метрические условия дуальности не изменяются, что подтверждает их инвариантность относительно конформных преобразований первого рода. В случае конформных преобразований второго рода доказательство теоремы аналогично.

Теорема 2 доказана.

В дальнейших исследованиях попытаемся детальнее раскрыть геометрические связи между различными аналогами аналитической в области функции.

4. Метрические условия дуальности и их связь с равенством дискриминантов метрических форм поверхностей $Z=u, Z=v$ и $Z=\sqrt{u^2+v^2}$.

Теорема 3. *Если компоненты метрических тензоров поверхностей* $Z=u$ *и* $Z=v,\ u,\ v\in$ $\in C^1(G)$, *в области* G *удовлетворяют метрическим условиям дуальности* (15), *то в* G *имеет место равенство дискриминантов* $g=a=\gamma$ *метрических форм всех трех поверхностей* $Z=u,\ Z=v,\ Z=\sqrt{u^2+v^2}$.

Доказательство. Действительно, принимая во внимание зависимости (15), непосредственно получаем равенство дискриминантов для двух поверхностей $Z=u$ и $Z=v$:

$$a=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=g. \tag{23}$$

Чтобы преобразовать дискриминант γ третьей поверхности, вернемся к равенствам (16), эквивалентным заданным условиям (15). Заменяя полученное из них выражение $v_x^2 + v_y^2$ в формуле (14) на $u_x^2 + u_y^2$, приводим его к виду

$$\gamma = 1 + u_x^2 + u_y^2 + \frac{2uv}{u^2+v^2}\left(u_x v_x + u_y v_y\right). \tag{24}$$

Докажем теперь, что здесь выражение в скобках тождественно равно нулю. Рассмотрим два случая: $u_x = 0$ и $u_x \neq 0$. В первом случае на основании третьего из равенств (16) получаем $v_y = 0$. Отсюда непосредственно следует $u_x v_x + u_y v_y = 0$. Во втором случае воспользуемся формулой $u_y = -\dfrac{v_x v_y}{u_x}$, полученной из второго соотношения (16):

$$u_x v_x + u_y v_y = u_x v_x - \frac{v_x v_y^2}{u_x} = \frac{v_x}{u_x}(u_x^2 - v_y^2) = 0.$$

Выражение в скобках здесь равно нулю в силу третьего из соотношений (16).

На основании формул (23), (24) и (8) заключаем, что $a = g$, $\gamma = g$.

Теорема 3 доказана.

Докажем теперь теорему 4, обратную к теореме 3.

Теорема 4. *Если три поверхности $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$, $u, v \in C^1(G)$, в области G имеют равные дискриминанты метрических форм, то компоненты метрических тензоров двух из них $Z = u$ и $Z = v$ в области G удовлетворяют метрическим условиям дуальности.*

Доказательство. Пусть u, v — заданные в области G функции класса C^1. Рассмотрим три поверхности (5), (11) и предположим, что для дискриминантов их метрических форм имеет место система равенств $g = a$, $g = \gamma$. Требуется доказать, что компоненты метрических тензоров поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ удовлетворяют метрическим условиям дуальности (15) или, что то же самое, эквивалентным соотношениям (16).

Прежде всего заметим, что если учесть соотношения (8) и (10), равенство $g = a$ дает

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{25}$$

Тогда в силу (8), (14) равенство $g = \gamma$ эквивалентно равенствам

$$1 + u_x^2 + u_y^2 = 1 + \frac{1}{u^2+v^2}\big(u^2(u_x^2+u_y^2) + v^2(v_x^2+v_y^2) + 2uv(u_x v_x + u_y v_y)\big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0. \tag{26}$$

Итак, частные производные функций u, v по необходимости удовлетворяют системе уравнений (25), (26). Докажем, что все три равенства (16) являются следствием уравнений (25), (26). При этом рассмотрим два случая: $u_x = 0$ и $u_x \neq 0$.

Случай 1. Если $u_x = 0$, то в силу (26) либо $u_y = 0$, либо $v_y = 0$. При $u_x = u_y = 0$ из (25) получаем $v_x = v_y = 0$. Эти значения частных производных удовлетворяют всем трем равенствам (16). При $u_x = v_y = 0$, как легко убедиться непосредственной проверкой, все равенства (16) также следуют из (25), (26).

Случай 2. Если $u_x \neq 0$, то из (26) находим $v_x = -\dfrac{u_y v_y}{u_x}$. Заменяя теперь в уравнении (25) значение v_x по этой формуле, убеждаемся, что имеет место третье из равенств (16):

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{u_y^2 v_y^2}{u_x^2} + v_y^2 \iff u_x^2 + u_y^2 = \frac{v_y^2}{u_x^2}(u_y^2 + u_x^2) \iff v_y^2 = u_x^2.$$

Теперь из (25) непосредственно получаем первое из соотношений (16): $v_x^2 = u_y^2$.

Наконец, рассмотрим выражение $v_x v_y + u_x u_y$ из $(16)_2$:

$$v_x v_y + u_x u_y = -\frac{u_y v_y^2}{u_x} + u_x u_y = \frac{u_y}{u_x}(-v_y^2 + u_x^2) = 0.$$

Таким образом, при условиях теоремы 4 имеют место все три равенства системы (16), откуда следует выполнение и равносильной системы соотношений (15), составляющих метрические условия дуальности.

Теорема 4 доказана.

5. Инвариантность равенств $g = a = \gamma$ относительно конформных преобразований координат x, y в области G.

Лемма 2. *Если u и v — заданные в области G функции класса C^1, а g и a — дискриминанты метрических форм поверхностей $Z = u$ и $Z = v$, то равенство $g = a$ является инвариантным относительно невырожденных конформных преобразований координат в области G.*

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$, $z = x + iy$, — аналитическая однолистная в области G функция $\widetilde{z} = \Phi(z)$, $\Phi'(z) \neq 0$, $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, которая осуществляет конформное преобразование первого рода области G в некоторую область $G_{\widetilde{z}}$. Тогда имеют место формулы (20) и законы конформного преобразования функций (21), (22).

С учетом формул (8), (10) найдем разность дискриминантов

$$g - a = u_x^2 + u_y^2 - v_x^2 - v_y^2. \tag{27}$$

С помощью дифференциальных операторов (18) перейдем к производным по $\overline{z}$, z:

$$g - a = 4(u_{\overline{z}} u_z - v_{\overline{z}} v_z).$$

Для выражения в скобках закон конформного преобразования представлен формулой (22), поэтому

$$g - a = 4(u_{\overline{\widetilde{z}}} u_{\widetilde{z}} - v_{\overline{\widetilde{z}}} v_{\widetilde{z}})\Phi'(z)\overline{\Phi'(z)}.$$

Отсюда следует, что при конформных преобразованиях первого рода разность $g - a$ преобразуется по формуле

$$g(x,y) - a(x,y) = \big(g(\widetilde{x},\widetilde{y}) - a(\widetilde{x},\widetilde{y})\big)\Phi'(z)\overline{\Phi'(z)}. \tag{28}$$

По условии леммы левая часть этого равенства, как функция от x, y, равна нулю. В таком случае в силу $\Phi'(z) \neq 0$ из (28) получаем, что та же функция $g - a$, выраженная через новые координаты $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, также равна нулю: $g(\widetilde{x},\widetilde{y}) - a(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0$.

Итак, равенство $g - a = 0$ в новых координатах не изменило свой вид, что свидетельствует об его инвариантности при конформных преобразованиях первого рода. Доказательство леммы в случае конформных преобразований второго рода аналогично.

Лемма 2 доказана.

Теорема 5. *Система равенств $g = a$, $g = \gamma$ является инвариантной относительно конформных преобразований первого (второго) рода. Здесь g, a, γ — дискриминанты метрических форм поверхностей $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u, v \in C^1(G)$, соответственно.*

Доказательство. Инвариантность равенства $g = a$ для двух поверхностей $Z = u$ и $Z = v$, $u, v \in C^1(G)$, установлена леммой 2. Доказательство инвариантности равенства $g = \gamma$ для поверхностей $Z = u$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ формально проводится, как в лемме 2, при замене символов $a \to \gamma$, $v \to F$, $v_x \to F_x$, $v_z \to F_z$ и т. д. В случае конформного преобразования второго рода доказательство теоремы аналогично.

Таким образом, система равенств $g = a$, $g = \gamma$ для дискриминантов метрических форм трех поверхностей $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ является инвариантной относительно любых невырожденных конформных преобразований координат.

Теорема 5 доказана.

6. О равенстве площадей трех поверхностей $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ над произвольной областью $G_0 \subset G$.

Лемма 3. *Поверхности $Z = u$ и $Z = v$, $u, v \in C^1(G)$, над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади тогда и только тогда, когда в области G они имеют равные дискриминанты метрических форм.*

Доказательство. Пусть G_0 — произвольная область области G, которая проектируется в области D_u и D_v на поверхностях $Z = u$ и $Z = v$. В силу формул (8) и (10) для площадей областей D_u, D_v справедливы известные формулы [21, с. 81]

$$\begin{aligned} \sigma(D_u) &= \iint\limits_{G_0} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{G_0} \sqrt{g}\, dx\, dy, \\ \sigma(D_v) &= \iint\limits_{G_0} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{G_0} \sqrt{a}\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{29}$$

Если площади областей D_u и D_v равны по любой области $G_0 \subset G$, то

$$\sigma(D_u) = \sigma(D_v) \Rightarrow \iint\limits_{G_0} \sqrt{g}\, dx\, dy = \iint\limits_{G_0} \sqrt{a}\, dx\, dy \Rightarrow \tag{30}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{G_0} (\sqrt{g} - \sqrt{a})\, dx\, dy = 0. \tag{31}$$

Поскольку u и v, как функции класса C^1, в области G непрерывны вместе со своими частными производными, то $(\sqrt{g} - \sqrt{a})$ является непрерывной в G функцией. В таком случае интеграл (31) по произвольной области $G_0 \subset G$ равен нулю тогда и только тогда, когда подынтегральная функция тождественно равна нулю в G. Отсюда следует заключение о равенстве дискриминантов g и a в области G.

Наоборот, пусть в G имеет место равенство $g = a$ и $G_0 \subset G$ — произвольная область. Тогда, возвращаясь в своих рассуждениях шаг за шагом назад, мы придем к равенству $\sigma(D_u) = \sigma(D_v)$. Отсюда следует требуемый результат: поверхности $Z = u$ и $Z = v$ имеют равные площади над произвольной областью $G_0 \subset G$.

Лемма 3 доказана.

В следующей теореме мы акцентируем внимание на естественной геометрической интерпретации системы равенств $g = a = \gamma$. Иная геометрическая интерпретация этих равенств установлена теоремой 9.

Теорема 6. *Три поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u, v \in C^1(G)$, над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади тогда и только тогда, когда в области G имеют место равенства $g = a = \gamma$ дискриминантов их метрических форм.*

Доказательство. Легко видеть, что все изложенное для случая двух поверхностей в лемме 3 и в ее доказательстве непосредственно переносится на случай трех поверхностей, если их рассмотреть попарно.

Теорема 6 доказана.

7. Новый критерий аналитичности функции: представление через метрические тензоры поверхностей $Z = u$, $Z = v$.

Теорема 7. *Три поверхности $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u, v \in C^1(G)$, над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади тогда и только тогда, когда для метрических тензоров двух поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ в области G выполняются метрические условия дуальности.*

Доказательство. Пусть все три указанные поверхности при условии $u, v \in C^1(G)$ над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади. Тогда по теореме 6 в области G дискриминанты их метрических форм равны: $g = a = \gamma$. С другой стороны, согласно теоремы 4 для поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ в G имеют место метрические соотношения дуальности (15).

Наоборот, если в области G для поверхностей $Z = u, Z = v$ имеют место метрические условия дуальности (15), то в силу теоремы 3 в G выполняется система равенств $g = a = \gamma$. Тогда из теоремы 6 следует, что все три поверхности $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8 (новый критерий). *Пусть G — некоторая область и $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительные функции класса C^1, заданные в области G. Положим*

$$w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Тогда для того, чтобы функция w либо $\overline{w}$ была аналитической в области G, необходимо и достаточно, чтобы компоненты g_{ij} и a_{ij} метрических тензоров поверхностей $Z = u(x, y)$ и $Z = v(x, y)$ в области G удовлетворяли метрическим условиям дуальности

$$a_{11} - g_{22} = 0, \qquad a_{12} + g_{12} = 0, \qquad a_{22} - g_{11} = 0.$$

Доказательство. По теореме 1 В. К. Дзядыка [11] функция $w = u + iv$ либо $\overline{w} = u - iv$, u, $v \subset C^1(G)$, является аналитической в области G тогда и только тогда, когда три поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади.

Но согласно теореме 7 все три поверхности (5), (11) при условии u, $v \subset C^1(G)$ над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади тогда и только тогда, когда для компонент метрических тензоров двух поверхностей, а именно $Z = u$ и $Z = v$, в области G реализуются метрические условия дуальности (15).

Очевидно, теорема 8 следует из этих двух утверждений.

Теорема 8 доказана.

8. Метрические условия дуальности и эквиареальное отображение поверхностей. „Отображение одной поверхности на другую называется *эквиареальным,* если площади отображаемых частей поверхности пропорциональны своим отображениям. Из основной формулы [20, с. 179] (ч. 1), определяющей площадь некоторой части поверхности, совершенно ясно, что при эквиареальном отображении между дискриминантами метрических форм обеих поверхностей имеет место соотношение $\widetilde{\gamma} = c^2\gamma$, где c — постоянная. Если в этой формуле $c = 1$, то мы получаем частный случай: отображение сохраняет площадь всякой фигуры" [20, с. 129] (ч. 2).

В следующей лемме детальнее раскрываем взаимосвязи равенства $g = a$ с эквиареальным отображением поверхностей $Z = u$ и $Z = v$.

Лемма 4. *Для поверхностей $Z = u$, $Z = v$, $u, v \in C^1(G)$ в области G имеет место равенство дискриминантов их метрических форм тогда и только тогда, когда эквиареальное отображение одной поверхности на другую сохраняет площадь.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть при заданных функциях u, v класса $C^1(G)$ поверхности $Z = u$ и $Z = v$ имеют равные дискриминанты $g = a$. Тогда $\sqrt{g} = \sqrt{a}$ и для произвольной области $G_0 \subset G$ имеет место второе из равенств (30). Поскольку область G_0 гомеоморфна соответствующим областям D_u поверхности $Z = u$ и D_v поверхности $Z = v$, то левый интеграл в $(30)_2$ выражает площадь области D_u, а правый — площадь области $D_v : \sigma(D_u) = \sigma(D_v)$. Значит, общие координаты заданных поверхностей осуществляют такое соответствие точек, при котором отображение одной поверхности сохраняет площадь другой отображаемой поверхности. Это отображение является эквиареальным частного случая.

Достаточность. Общие координаты, к которым отнесены определенные над областью G поверхности, устанавливают между ними взаимно однозначное точечное соответствие. Допустим, что этим соответствием поверхности $Z = u$ и $Z = v$ отображены одна на другую эквиареально с сохранением площади. Пусть D_u — произвольная область поверхности $Z = u$. Путем проектирования однозначно определяются области D_v поверхности $Z = v$ и $G_0 \subset G$. Далее воспользуемся доказательством леммы 3. Так как области D_u, D_v и G_0 попарно гомеоморфны, то произвольный выбор области D_u объясняет, что область G_0 также является произвольной.

Поскольку при эквиареальном отображении частного случая площади поверхностей сохраняются, $\sigma(D_u) = \sigma(D_v)$, то выполняются формулы (29)–(31), из которых в области G следует равенство $g = a$.

Лемма 4 доказана.

Следующая теорема является обобщением леммы 4 на случай трех поверхностей (5), (11). В ней раскрывается геометрический смысл системы равенств $g = a = \gamma$ (см. также теорему 6).

Теорема 9. *Для того чтобы три поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u, v \in \in C^1(G)$, попарно находились в эквиареальном отображении, сохраняющем площадь, необходимо и достаточно, чтобы для дискриминантов метрических форм этих трех поверхностей в области G выполнялось равенство $g = a = \gamma$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое общими координатами на трех данных поверхностях, реализует эквиареальное отображение, которое сохраняет площадь произвольной области отображаемой поверхности. Тогда по лемме 4 для каждой пары заданных поверхностей в области G имеет место равенство дискриминантов $g = a$, $g = \gamma$, $a = \gamma$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для трех поверхностей (5), (11) в области G имеют место равенства $g = a$, $g = \gamma$. Тогда для каждой пары поверхностей справедливо заключение леммы 4. Значит, как и следовало ожидать, все три поверхности эквиареально отображены одна на другую так, что при этом отображении сохраняется площадь.

Теорема 9 доказана.

Исходя из теоремы 9, а также используя эквивалентность в области G метрических условий дуальности (15), с одной стороны, и систему равенств $g = a = \gamma$ (теоремы 3 и 4), с другой, легко доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Для того чтобы три поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$, $u, v \in \in C^1(G)$, попарно находились в эквиареальном отображении, сохраняющем площадь, необходимо и достаточно, чтобы для метрических тензоров двух из них $Z = u$, $Z = v$ в области G выполнялись метрические условия дуальности.*

Отметим, что теоремы 7 и 10 устанавливают геометрические интерпретации метрических условий дуальности (15).

9. Перечень эквивалентов аналитической функции.

Теорема 11. *Пусть в области G заданы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ класса C^1 и над G определены поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$. Пусть g_{ij}, a_{ij}, γ_{ij} — метрические тензоры этих поверхностей соответственно и $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ — дискриминанты их метрических форм. Тогда следующие предложения являются эквивалентными*:

I. *Функция $w = u + iv$ либо $\overline{w} = u - iv$ является аналитической в области G.*

II. *Все три поверхности $Z = u$, $Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$ над произвольной областью $G_0 \subset G$ имеют равные площади.*

III. *Компоненты g_{ij} и a_{ij} метрических тензоров поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ в области G удовлетворяют метрическим условиям дуальности*

$$a_{11} - g_{22} = 0, \qquad a_{12} + g_{12} = 0, \qquad a_{22} - g_{11} = 0.$$

IV. *В области G имеет место равенство дискриминантов метрических форм всех трех поверхностей $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$:*

$$g = a = \gamma.$$

V. *Три поверхности $Z = u, Z = v$ и $Z = \sqrt{u^2+v^2}$ находятся в эквиареальном отображении, сохраняющем площадь.*

VI. *Функции u и v в области G удовлетворяют системе равенств*

$$v_x^2 = u_y^2, \qquad v_x v_y = -u_x u_y, \qquad v_y^2 = u_x^2. \tag{32}$$

VII. *Функции u и v в области G удовлетворяют системе равенств в комплексном виде*

$$v_{\overline{z}}^2 + u_{\overline{z}}^2 = 0, \qquad v_{\overline{z}} v_z - u_{\overline{z}} u_z = 0, \qquad v_z^2 + u_z^2 = 0. \tag{33}$$

VIII. *Радиусы-векторы $\overline{r}$ и $\overline{\rho}$ поверхностей $Z = u, Z = v$ в области G удовлетворяют системе равенств*

$$\overline{\rho_2}^2 = \overline{r_1}^2, \qquad \overline{\rho_1 \rho_2} = -\overline{r_1 r_2}, \qquad \overline{\rho_1}^2 = \overline{r_2}^2. \tag{34}$$

IX. *Радиусы-векторы поверхностей $Z = u, Z = v$ в области G удовлетворяют системе равенств в комплексном виде*

$$\overline{r_{\overline{z}}}^2 + \overline{\rho_{\overline{z}}}^2 = 0, \qquad \overline{r_z r_{\overline{z}}} - \overline{\rho_{\overline{z}} \rho_z} = 0, \qquad \overline{r_z}^2 + \overline{\rho_z}^2 = 0. \tag{35}$$

Доказательство. Используя свойства симметричности и транзитивности отношения эквивалентности множеств, проверим эквивалентность предложения III каждому из остальных предложений. Прежде всего отметим, что каждая система равенств из (32) – (35) является различной формой записи метрических условий дуальности (15) и следует из формул (7) и (9). Поэтому предложение III равносильно каждому из предложений VI – IX.

Объединение теорем 3 и 4 свидетельствует об эквивалентности III $\Longleftrightarrow$ IV, а теорема 10 — о том, что III $\Longleftrightarrow$ V.

Равносильность предложений III $\Longleftrightarrow$ II утверждается теоремой 7. В новом критерии (теорема 8) доказана равносильность III $\Longleftrightarrow$ I.

Таким образом, мы доказали, что предложение III эквивалентно всем остальным. Следовательно, все предложения I – IX из теоремы 11 являются попарно эквивалентными.

Теорема 11 доказана.

10. Обобщенная форма нового критерия аналитичности функции.

Теорема 12. *Пусть в области G заданы две функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ класса C^1. Тогда для того, чтобы функция $\widetilde{w} = \pm u \pm iv$ либо $w^\wedge = \pm v \pm iu$ с любыми комбинациями знаков была аналитической в области G, необходимо и достаточно, чтобы компоненты метрических тензоров поверхностей $Z = u$ и $Z = v$ удовлетворяли в области G метрическим условиям дуальности.*

Доказательство. При проверке отдельных случаев этой теоремы достаточно иметь в виду следующее.

1. Если метрические соотношения дуальности (15) имеют место для поверхностей $Z = u$ и $Z = v, u, v \in C^1(G)$, то они имеют место и для пары поверхностей $Z = \pm u$ и $Z = \pm v$ с любыми комбинациями знаков.

Действительно, например, поверхность $Z = -v$, как симметричная поверхности $Z = v$ относительно плоскости Oxy, имеет с ней одинаковую метрическую форму, а значит, метрический тензор (9) и дискриминант (10). В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

2. При перестановке функций u и v метрические условия дуальности (15) не изменяются.

3. В силу теоремы 8 теорема 12 справедлива для случаев, когда $\widetilde{w} = w = u + iv$ и $w^\wedge = \overline{w} = u - iv$.

4. Если функция $w = u + iv$ аналитическая в G, то и функции

$$w_1 = -u - iv, \qquad w_2 = v - iu, \qquad w_3 = -v + iu$$

являются аналитическими в G. Если же функция $\overline{w} = u - iv$ аналитическая в G, то функции

$$w_4 = -u + iv, \qquad w_5 = v + iu, \qquad w_6 = -v - iu$$

также являются аналитическими в области G.

Это утверждение следует из того, что все функции w_α, $\alpha = \overline{1,\ 6}$, можно выразить через w и $\overline{w}$ в виде

$$w_1 = -w, \qquad w_2 = -iw, \qquad w_3 = iw, \qquad w_4 = -\overline{w}, \qquad w_5 = i\overline{w}, \qquad w_6 = -i\overline{w}.$$

Теорема 12 доказана.

11. Заключение. Исходя из критерия В. К. Дзядыка аналитичности в области G функции, в теореме 8 данной статьи предложен новый критерий геометрического характера, в котором фундаментальную роль играют метрические соотношения дуальности

$$g_{11} - a_{22} = 0, \qquad g_{12} + a_{12} = 0, \qquad g_{22} - a_{11} = 0,$$

выраженные через компоненты метрических тензоров поверхностей $Z = u$ и $Z = v$, u, $v \in C^1(G)$. Доказана их инвариантность относительно конформных преобразований области G (теорема 2).

Найден ряд эквивалентов аналитической функции (теорема 11). В теореме 12 новый критерий представлен в обобщенном варианте.

Литература

1. *Riemann B.* Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse. – Göttingen, 1851.
2. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Hogan J. A., Joel M. A.* Quaternionic wavelets // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 2012. – **33**, № 7-9. – P. 1031 – 1062.
4. *Blair D. E., Korkmaz B.* Special directions in complex contact manifolds // Beitr. Algebra und Geom. – 2009. – **50**, № 2. – S. 309 – 325.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. *Kalaj D., Mateljevic M.* On quasiconformal harmonic surfaces with rectifiable boundary // Complex Anal. and Oper. Theory. – 2011. – **5**, № 3. – P. 633 – 646.
7. *Luks T.* Boundary behavior of α-harmonic functions on the complement of the sphere and hyperplane // Potential Anal. – 2013. – **39**, № 1. – P. 29 – 67.
8. *Urakawa H.* Harmonic maps and biharmonic maps on principal bundless and warped products // J. Korean Math. Soc. – 2018. – **55**, № 3. – P. 553 – 574.
9. *Aldea N.* About a special class of two-dimensional complex Finsler spaces // Indian J. Pure and Appl. Math. – 2012. – **43**, № 2. – P. 107 – 127.
10. *Dorfmeister J., Kobayashi S., Pedit F.* Complex surfaces of constant mear curvature fibered by minimal surfaces // Hokkaido Math. J. – 2010. – **39**, № 1. – P. 1 – 55.
11. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. I(91). – С. 191 – 194.
12. *Goodman A. W.* On a characterization of analytic functions // Amer. Math. Monthly. – 1964. – **71**, № 3. – P. 265 – 267.
13. *Goodman A. W.* A partial differential equation and parallel plane curves // Amer. Math. Monthly. – 1964. – **71**, № 3. – P. 257 – 264.
14. *Трохимчук Ю. Ю.* Об одном критерии аналитичности функций // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1410 – 1418.
15. *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* Об одном критерии постоянства комплексной функции // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1096 – 1104.
16. *Kreyszig E., Pendl A.* Über die Gauss – Krummung der Real- und Imaginarteilflachen analytischer Funktionen // Elem. Math. – 1973. – **28**, № 1. – P. 10 – 13.
17. *Jerrard R.* Curvatures of surfaces associated with holomorphic functions // Colloq. Math. – 1970. – **21**, № 1. – P. 127 – 132.
18. *Безкоровайная Л. Л.* Поверхности, образованные действительной и мнимой частями аналитической функции: A-деформации, происходящие независимо или одновременно // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 4. – С. 447 – 463.
19. *Безкоровайна Л. Л.* Геометричні аспекти аналітичних функцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 77 – 88.
20. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. – М.: ОГИЗ, 1947. – Ч. 1. – 512 с.; 1948. – Ч. 2. – 410 с.
21. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

Получено 31.08.18