УДК 517.984.54

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМИ

For a second-order parabolic equation, we consider a problem with oblique derivative and impulsive action. The coefficients of the equation and the boundary condition have power singularities of any order in the time and space variables on some set of points. We establish conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder spaces with power weight.

Для параболічного рівняння другого порядку розглянуто задачу з косою похідною й імпульсною дією. Коефіцієнти рівняння і крайової умови мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено умови існування й єдиності розв’язку поставленої задачі в гельдерових просторах із степеневою вагою.

Крайові задачі з імпульсною дією для диференціальних рівнянь є тим математичним апаратом, за допомогою якого вдалося описати чимало нових ефектів та явищ у багатьох прикладних задачах. Дослідження задач теорії автоматичного керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Імпульсні системи виникають також у багатьох задачах природознавства, при вивченні яких математичні моделі містять умови, що описують вплив зовнішніх сил імпульсної природи. Всебічне вивчення розв’язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено у монографіях [1 – 3]. Питання існування періодичних розв’язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсною дією вивчались у працях [4, 5]. Класичним розв’язкам крайових задач із імпульсною дією для параболічних рівнянь, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячено роботи [6, 7], дослідженню нелокальних багатоточкових за часом крайових задач та задач із інтегральними умовами для параболічних рівнянь зі степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння — роботи [8, 9].

У даній статті розглядається задача з косою похідною для лінійного параболічного рівняння другого порядку із степеневими особливостями у коефіцієнтах рівняння і крайовій умові за будь-якими змінними на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною у визначені моменти часу.

У гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано єдиність, існування і встановлено оцінки розв’язку поставленої задачі.

Постановка задачі і основний результат. Нехай $\eta,\ t_0, t_1, \ldots, t_N, t_{N+1}$ — фіксовані додатні числа, $0 \le t_0 < \ldots < t_{N+1},\ t_0 < \eta < t_{N+1},\ \eta \ne t_\lambda,\ \lambda \in \{1, 2, \ldots, N\},\ D$ — обмежена область в R^n з межею $\partial D,\ \dim D = n,\ \Omega$ — деяка обмежена область $\overline{\Omega} \subset D,\ \dim \Omega \le n-1$. Позначимо $Q_{(0)} = \{(t,x) \mid t \in [t_0, t_{N+1}),\ x \in \Omega\} \cup \{(t,x) \mid t = \eta,\ x \in D\},\ Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$, яка задовольняє при $t \ne t_\lambda,\ (t,x) \notin Q_{(0)}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

© І. Д. ПУКАЛЬСЬКИЙ, Б. О. ЯШАН, 2019

умови за змінною t

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = \psi_\lambda(x) u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x) \tag{3}$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (Bu - g)(t, x) \equiv \lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \partial_{x_i} u + b_0(t, x) u - g(t, x) \right] = 0. \tag{4}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайової умови (4) у точці $P(t,x) = Q \setminus Q_{(0)}$ характеризують функції $s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big)$, $s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big)$: $s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t - \eta| \leq 1$, $s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) = 1$ при $|t - \eta| \geq 1$; $s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = \big(\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)}\big)$, $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(4). Позначимо через l, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ дійсні числа, $q^{(\nu)} \geq 0$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $l \geq 0$, $\mu_j^{(\nu)} \geq 0$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $[l]$ — ціла частина числа l, $\{l\} = l - [l]$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $R_i(t^{(2)}, x^{(2)})$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — довільні точки із $Q^{(k)}$, $x^{(1)} = \big(x_1^{(1)}, \ldots, x_i^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\big)$, $x^{(2)} = \big(x_1^{(1)}, \ldots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\big)$.

Позначимо через $H^l(\gamma; \beta; q; Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(k)} \setminus Q^{(0)}$ при $t \neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^s \partial_x^r$, $2s + |r| \leq [l]$, для яких скінченною є норма

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_0 = \sup_k \Big\{ \sup_{\overline{Q}^{(k)}} |u| \Big\} \equiv \|u; Q\|_0,$$

$$\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_l = \sup_k \left\{ \sum_{2s + |r| \leq [l]} \big\|u; \gamma; \beta; q; Q^{(k)}\big\|_{2s + |r|} + \big\langle u; \gamma; \beta; q; Q^{(k)} \big\rangle_l \right\} \equiv$$

$$\equiv \sup_k \left\{ \sum_{2s + |r| \leq [l]} \sup_{P \in \overline{Q}^{(k)}} \Big[s_1\big(q^{(1)} + (2s + |r|)\gamma^{(1)}, t\big) s_2\big(q^{(2)} + 2s\gamma^{(2)}, x\big) \big|\partial_t^s \partial_x^r u(P)\big| \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{n} s_1\big(-r_i \beta_i^{(1)}, t\big) s_2\big(r_i\big(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}\big), x\big) \Big] \right\} +$$

$$+ \sup_k \sum_{2s + |r| = [l]} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sup_{(P_2 R_\nu) \subset \overline{Q}^{(k)}} \Big[s_1\big(q^{(1)} + [l]\gamma^{(1)}, t^{(2)}\big) s_2\big(q^{(2)} + 2s\gamma^{(2)}, \widetilde{x}\big) \times \right.$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1\big(-r_i \beta_i^{(1)}, t^{(2)}\big) s_2\big(r_i\big(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}\big), \widetilde{x}\big) \big|\partial_t^s \partial_x^r u(P_2) - \partial_t^s \partial_x^r u(R_\nu)\big| \times$$

$$\times \big|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}\big|^{-\{l\}} s_1\big(\{l\}\beta_\nu^{(1)}, t^{(2)}\big) s_2\big(\{l\}\big(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}\big), \widetilde{x}\big) \Big] +$$

$$+ \sup_{(P_1 P_2) \subset \overline{Q}^{(k)}} \Big[s_1\big(q^{(1)} + l\gamma^{(1)}, \tilde{t}\,\big) s_2\big(q^{(2)} + (2s + \{l\})\gamma^{(2)}, x^{(1)}\big) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1\big(-r_i\beta_i^{(1)}, \tilde{t}\ \big) s_2(r_i\big(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}\big), x^{(1)})\big|t^{(1)} - t^{(2)}\big|^{-\{\frac{l}{2}\}} \times$$

$$\times \big|\partial_t^s \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r u(P_2)\big| \Bigg] \Bigg\},$$

де

$$|r| = r_1 + \ldots + r_n, \qquad s_1(q, \tilde{t}\,) = \min\big(s_1(q, t^{(1)}), s_2(q, t^{(2)})\big),$$
$$s_2(q, \widetilde{x}) = \min\big(s_2(q, x^{(1)}), s_2(q, x^{(2)})\big).$$

Щодо задачі (1)–(4) вважаємо виконаними такі умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\forall (t, x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{n} s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) s_1\big(\beta_j^{(1)}, t\big) s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) s_2\big(\beta_j^{(2)}, x\big) A_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$

де $\pi_1,\ \pi_2$ — фіксовані додатні сталі,

$$s_1\big(\mu_i^{(1)}, t\big) s_2\big(\mu_i^{(2)}, x\big) A_i \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q),$$
$$s_1\big(\mu_0^{(1)}, t\big) s_2\big(\mu_0^{(2)}, x\big) A_0 \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q), \quad A_0 \ge -a, \quad a > 0,$$
$$s_1\big(\delta^{(1)}, t\big) s_2\big(\delta^{(2)}, x\big) b_0 \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q),$$
$$s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) s_1\big(\beta_j^{(1)}, t\big) s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) s_2\big(\beta_j^{(2)}, x\big) A_{ij} \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q),$$
$$s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) b_i \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q),$$

вектори

$$\vec{b}^{(s)} = \big\{b_1^{(s)}, \ldots, b_n^{(s)}\big\}, \qquad b_i^{(s)} = s_1\big(\beta_i^{(1)}, t\big) s_2\big(\beta_i^{(2)}, x\big) b_i$$

і

$$\vec{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}, \qquad e_i = b_i \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

утворюють із напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t, x) \in \Gamma$ кут менший за $\dfrac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $b_0(t, x)\big|_{\Gamma} > 0$;

б) $f \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$, $\quad \varphi_0 \in H^{2+\alpha}\big(\widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; D\big)$, $\quad \widetilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\quad \widetilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$,

$$\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}\big(\widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_\lambda)\big), \quad \psi_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda)), \quad g \in H^{1+\alpha}\big(\gamma; \beta; \delta; Q^{(\lambda)}\big),$$
$$g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x) = \psi_\lambda(x) g(t_\lambda - 0, x) + B\varphi_\lambda(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma \cap (t = t_\lambda),$$
$$B\varphi_0(x) = g(t_0, x), \quad x \in \partial D,$$
$$\lim_{x \to z \in \partial D} \sum_{i=1}^{n} b_i(t_\lambda, x) \partial_{x_i} \psi_\lambda(x) = 0, \quad \partial D \in C^{2+\alpha},$$

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i\left(1+\beta_i^{(\nu)}\right), \max_i\left(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\right\}.$$

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконано умови* а), б). *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і виконується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))}\right)\times\right.$$
$$\times\Big(\left\|\varphi_{k-1};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_{2+\alpha}+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{k-1}\right\|_{\alpha}+$$
$$+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{k-1}\right\|_{1+\alpha}\Big)+\left\|\varphi_N;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_N)\right\|_{2+\alpha}+$$
$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^N\right\|_{\alpha}+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^N\right\|_{1+\alpha}\right\}. \tag{5}$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач із гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач із гладкими коефіцієнтами. Нехай

$$Q_m^{(k)} = Q^{(k)}\cap\left\{(t,x)\in Q^{(k)} \mid s_1(1,t)\ge m_1^{-1},\ s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\right\},$$
$$m=(m_1,m_2),\quad m_1>1,\quad m_2>1,$$

— послідовності областей, які при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які задовольняють при $t\ne t_\lambda$ рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)\right]u_m=f_m(t,x), \tag{6}$$

умови за змінною t

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=\psi_m^{(\lambda)}(x)u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi_m^{(\lambda)}(x) \tag{8}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(B_1u_m-g_m)(t,x)=$$
$$=\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n}h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m+h_0(t,x)u_m-g_m(t,x)\right]=0. \tag{9}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, $\psi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ збігаються з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ_0, φ_λ, g, ψ_λ відповідно, а в областях $Q^{(k)} \backslash Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, функцій f, φ_0, φ_λ, g, ψ_λ з областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)} \backslash Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [10, с. 82].

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ *— класичний розв'язок задачі* (6)–(9) *в області* Q *і виконано умови* а), б). *Тоді для* $u_m(t,x)$ *правильною є оцінка*

$$|u_m(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{N} \left\{ \prod_{\lambda=k}^{N} \left(1 + \left\|\psi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0\right) \left(\left\|\varphi_m^{(k-1)}; Q \cap (t = t_{k-1})\right\|_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0\right) \right\} + \left\|\varphi_m^{(N)}; Q \cap (t = t_N)\right\|_0 +$$

$$+ \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(N)}\right\|_0. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $\max_{\overline{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_1)$. Якщо M_1 належить $Q^{(k)}$, то, враховуючи достатні умови існування максимуму функції багатьох змінних і рівняння (6), у точці M_1 одержуємо нерівність

$$u_m(M_1) \leq \sup_{\overline{Q}^{(k)}} \left(f_m a_0^{-1}\right). \tag{11}$$

Нехай $\min_{\overline{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_2)$. Якщо M_2 належить $Q^{(k)}$, то, враховуючи достатні умови існування мінімуму функції багатьох змінних і рівняння (6), у точці M_2 отримуємо нерівність

$$u_m(M_2) \geq \inf_{\overline{Q}^{(k)}} \left(f_m a_0^{-1}\right). \tag{12}$$

Якщо M_1 належить $[t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то виконується умова (9). Оскільки $\dfrac{du_m(M_1)}{d\vec{e}} \geq 0$, то з рівності $(B_1 u_m - g_m)(M_1) = 0$ маємо

$$u_m(M_1) \leq \sup_{\overline{Q}^{(k)}} \left(g_m h_0^{-1}\right). \tag{13}$$

Якщо M_2 належить $[t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то $\dfrac{du_m(M_2)}{d\vec{e}} \leq 0$. Враховуючи крайову умову (9), отримуємо

$$u_m(M_2) \geq \inf_{\overline{Q}^{(k)}} (g_m h_0^{-1}). \tag{14}$$

У випадку, коли $M_1 \in \overline{D}$ або $M_2 \in \overline{D}$, з умови (7) одержуємо

$$|u_m| \leq \left\|\varphi_m^{(0)}; D\right\|_0. \tag{15}$$

Враховуючи нерівності (11)–(15), при $k = 0$ маємо

$$\left\|u_m; Q^{(0)}\right\| \leq \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0 + \left\|\varphi_m^{(0)}; D\right\|_0. \tag{16}$$

Якщо M_1 належить $Q \cap (t = t_\lambda)$ або M_2 належить $Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то, враховуючи умову (8), отримуємо рекурентні співвідношення

$$\left\|u_m; Q \cap (t = t_\lambda)\right\| \leq \left(1 + \left\|\psi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0\right)\left\|u_m; Q^{(\lambda-1)}\right\|_0 + \\ + \left\|\varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0. \tag{17}$$

Об'єднуючи нерівності (11) – (17), одержуємо нерівність (10).

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^l(Q)$ норму $\left\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\right\|_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $\left\|u; \gamma; \beta; q; Q\right\|_l$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)}, t)$, $s_2(q^{(2)}, x)$ візьмемо відповідно $d_1(q^{(1)}, t)$, $d_2(q^{(2)}, x)$, де $d_1(q^{(1)}, t) = \max\left(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}\right)$ при $q^{(1)} \geq 0$ і $d_1(q^{(1)}, t) = \min\left(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}\right)$ при $q^{(1)} < 0$; $d_2(q^{(2)}, x) = \max\left(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}\right)$ при $q^{(2)} \geq 0$ і $d_2(q^{(2)}, x) = \min\left(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}\right)$ при $q^{(2)} < 0$.

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконано умови* а), б), *то для розв'язку задачі* (6) – (9) *правильною є оцінка*

$$\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\right\|_{2+\alpha} \leq c\left\{\sum_{k=1}^{N}\left\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1 + \|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda))}\right) \times \right.\right. \\ \times \left(\left\|\varphi_{k-1}; \widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\right\|_{2+\alpha} + \left\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\right\|_\alpha + \right. \\ \left.\left. + \left\|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)\right\} + \left\|\varphi_N; \widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_N)\right\|_{2+\alpha} + \\ \left. + \left\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\right\|_\alpha + \left\|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\right\}. \tag{18}$$

Доведення. В областях $Q^{(k)}$ розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), \qquad (B_1 u_m - g_m)(t,x)\,|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \\ u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x), \tag{19}$$

де

$$\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D, \qquad G_m^{(0)}(t,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \quad x \in D,$$

$$G_m^{(\lambda)}(t,x) = \left(1 + \psi_m^{(\lambda)}(x)\right)u_m(t_\lambda - 0, x) + \varphi_m^{(\lambda)}(x), \qquad x \in Q \cap (t = t_\lambda), \quad \lambda \in \{1, \ldots, N\}.$$

В областях $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (19) існує й єдиний у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [11, с. 364]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності із [10, 12], маємо

$$\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha)\left\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha} + \varepsilon^{-2-\alpha}\left\|u_m; Q^{(k)}\right\|_0,$$

де ε — довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\left\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}$.

Із визначення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок $P_1,\ P_2,\ R_i$, для яких виконується одна з нерівностей [12]

$$\frac{1}{2}\big\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\big\|_{2+\alpha}\leq E_\mu,\quad \mu\in\{1,2\},\tag{20}$$

де

$$E_1\equiv\sum_{2s+|r|=2}\Bigg\{\sum_{\nu=1}^{n}d_1\big(2\gamma^{(1)},t^{(2)}\big)d_2\big(2s\gamma^{(2)},\widetilde{x}\big)\prod_{i=1}^{n}d_1\big(-r_i\beta_i^{(1)},t^{(2)}\big)\times$$
$$\times d_2\big(r_i\big(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\big),\widetilde{x}\big)\big|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)\big|\,\big|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\big|^{-\alpha}\times$$
$$\times d_1\big(\alpha\beta_\nu^{(1)},t^{(2)}\big)d_2\big(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x}\big)\Bigg\},$$

$$E_2\equiv d_1\big((2+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\,\big)d_2\big((2s+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\prod_{i=1}^{n}d_1\big(-r_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\,\big)d_2\big(r_i\big(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\big),x^{(1)}\big)\times$$
$$\times\big|t^{(1)}-t^{(2)}\big|^{-\frac{\alpha}{2}}\big|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)\big|,\quad 2s+|r|=2.$$

Якщо $\big|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\big|\geq\dfrac{\varepsilon n^{-1}}{4}d_1\big(\gamma^{(1)},\tilde{t}\,\big)d_2\big(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)},\widetilde{x}\big)\equiv T_1,\ \varepsilon_1$ — довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1\leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\big\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\big\|_2.\tag{21}$$

Якщо $\big|t^{(1)}-t^{(2)}\big|\geq\dfrac{\varepsilon_1^2}{16}d_1\big(2\gamma^{(1)},\tilde{t}\,\big)d_2\big(2\gamma^{(2)},\widetilde{x}\big)\equiv T_2$, то

$$E_2\leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2.\tag{22}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності [12] до (21), (22), знаходимо

$$E_\mu\leq\varepsilon^\alpha\big\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\big\|_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\big\|u_m;Q^{(k)}\big\|_0.\tag{23}$$

Нехай $\big|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\big|\leq T_1$ і $|t^{(1)}-t^{(2)}|\leq T_2$. Будемо вважати, що $\big|x_\nu^{(1)}-\xi_\nu\big|\geq 4T_1,\ \xi\in\partial D$, і

$$d_2(\gamma^{(2)},\widetilde{x})=\min\big(d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)}),d_2(\gamma^{(2)},x^{(2)})\big)\equiv d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)}),$$
$$d_1\big(\gamma^{(2)},\tilde{t}\,\big)=\min\big(d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)}),d_1(\gamma^{(1)},t^{(2)})\big)=d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)}),$$
$$P_1\big(t^{(1)},x^{(1)}\big)\in Q^{(k)},\quad k\in\{0,1,\ldots,N\}.$$

В області $Q^{(k)}$ запишемо задачу (19) у вигляді

$$\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)\partial_{x_ix_j}\right]u_m=$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \big[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)\big]\partial_{x_i x_j} u_m - \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i} u_m - a_0(P)u_m + f_m(t,x) \equiv F(t,x,u_m), \quad (24)$$

$$u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)\partial_{x_i} u_m\Big|_{\Gamma^{(k)}} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [h_i(P_1) - h_i(P)]\partial_{x_i} u_m - h_0(P)u_m + g_m(P) \right\}\Bigg|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \Phi_m(t,x,u_m)\big|_{\Gamma^{(k)}}. \quad (26)$$

Нехай $\prod_\tau$ — область із $Q^{(k)}$,

$$\prod_\tau = \Big\{(t,x) \in Q^{(k)}|, |x_\nu - x_\nu^{(1)}| \leq \tau T_1, \nu \in \{1,\ldots,n\}, |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2\Big\}.$$

Виконуючи в (24)–(26) заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y),\ x_\nu = d_1\big(\beta_\nu^{(1)}, t^{(1)}\big) d_2\big(\beta_\nu^{(2)}, x^{(1)}\big) y_\nu$, одержуємо

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \Bigg[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(1)}) \partial_{y_i y_j}\Bigg] v_m = F_m(t, Y; v_m), \quad (27)$$

$$v_m(t_k + 0, Y) = G_m^{(k)}(t_k, Y), \quad (28)$$

$$(B_2 v_m)(t,y)\Big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv$$

$$\equiv \left[\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) \partial_{y_i} v_m\right]\Bigg|_{\Gamma^{(k)}} = \Phi(t, Y; v_m)\big|_{\Gamma^{(k)}}, \quad (29)$$

де

$$Y = (d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_1^{(2)}, x^{(1)}) x_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_n^{(2)}, x^{(1)}) x_n).$$

Позначимо

$$y_\nu^{(1)} = d_1\big(-\beta_\nu^{(1)}, t^{(1)}\big) d_2\big(-\beta_\nu^{(2)}, x^{(1)}\big) x_\nu^{(1)},$$

$$V_\tau = \left\{(t,y), |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2, |y_\nu - y_\nu^{(1)}| \leq \frac{\tau}{n}\sqrt{T_2}\right\}$$

і візьмемо тричі диференційовну функцію $\omega(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\omega(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in V_{1/2}, 0 \leq \omega(t,y) \leq 1, (t,y) \in V_{3/4} \setminus V_{1/2}, \\ 0, & (t,y) \notin V_{3/4},\ \left|\partial_t^s \partial_y^r \omega\right| \leq c_{rs} d_1\big(-(2s + |r|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\big) d_2\big(-(2s + |r|)\gamma^{(2)}, x^{(1)}\big). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,y) = v_m(t,y)\omega(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_2W_m)(t,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\times$$
$$\times\big\{\partial_{y_i}v_m\partial_{y_j}\omega+\partial_{y_j}v_m\partial_{y_i}\omega+v_m\partial_{y_iy_j}\omega\big\}-v_m\partial_t\omega+\omega F(t,Y;v_m)\equiv F_1(t,Y;v_m),$$
$$W_m(t_k+0,x)=G_m^{(k)}(t_k,Y)\omega(t_k,y), \tag{30}$$
$$(B_2W_m)(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}}=$$
$$=\left\{w(t,y)\Phi(t,y,v_m)-v_m\sum_{i=1}^{n}h_i(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})\partial_{y_i}\omega\right\}\Bigg|_{\Gamma^{(k)}}\equiv\Phi_1(t,Y;v_m).$$

На підставі теореми 5.3 із [11, с. 364] для розв'язку задачі (30) і довільних точок $(M_1,M_2)\subset\subset V_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\big|\partial_t^s\partial_x^r v_m(M_1)-\partial_t^s\partial_x^r v_m(M_2)\big|\le$$
$$\le c\Big(\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4})}+\big\|\omega G_m^{(k)}\big\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}\cap(t=t_k))}+\|\Phi_1\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}\cap\Gamma^{(k)})}\Big),\quad 2s+|r|=2, \tag{31}$$

де $d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\omega(t,y)$, знаходимо

$$\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4})}\le cd_1\big(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\big)d_2\big(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\big(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;V_{3/4}\|_0+$$
$$+\|v_m;V_{3/4}\|_0+\|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\|_2\big), \tag{32}$$
$$\big\|\omega G_m^{(k)}\big\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}\cap(t=t_k))}\le cd_1\big(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\big)d_2\big(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$
$$\times\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha}, \tag{33}$$
$$\|\Phi_1\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}\cap\Gamma^{(k)})}\le cd_1\big(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\big)d_2\big(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$
$$\times\big(\|g_m;\gamma;0;\gamma;V_{3/4}\|_{1+\alpha}+\|v_m;V_{3/4}\|_0+\|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\|_2\big). \tag{34}$$

Із визначення простору $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ випливає виконання нерівностей

$$c_1\big\|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\big\|_l\le\big\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}\big\|_l\le c_2\|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\|_l.$$

Підставляючи (32)–(34) у (31) і повертаючись до змінних (t,x), одержуємо нерівність

$$E_\mu\le\big(\varepsilon^\alpha(n+2)+\varepsilon_1Cn^2\big)\big\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\big\|_{2+\alpha}+$$
$$+c\Big(\big\|u_m;Q^{(k)}\big\|_0+\big\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\big\|_\alpha+\big\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\big\|_{1+\alpha}+$$
$$+\big\|G_m^{(k)}\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\big\|_{2+\alpha}\Big). \tag{35}$$

Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k,x)$, маємо оцінки

$$\big\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_0)\big\|_{2+\alpha}=\big\|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D)\big\|_{2+\alpha}, \tag{36}$$

$$\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\le c\bigl(1+\|\psi_m^{(\lambda)}\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_k))}\bigr)\times$$

$$\times\left\|u_{m-1};\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}+\left\|\varphi_m^{(k)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},\quad k\in\{0,1,\ldots,N\}. \tag{37}$$

Об'єднуючи нерівності (35)–(37) і вибираючи $\varepsilon,\ \varepsilon_1$ достатньо малими, одержуємо нерівності

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha}\le c\Biggl\{\sum_{k=1}^{N}\Biggl\{\prod_{\lambda=k}^{N}\bigl(1+\|\psi_m^{(\lambda)}\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))}\bigr)\times$$

$$\times\Bigl(\left\|\varphi_m^{(k-1)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_{2+\alpha}+\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_{\alpha}+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}\Bigr)\Biggr\}+\left\|\varphi_m^{(N)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_N)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_{\alpha}+\left\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\Biggr\}. \tag{38}$$

Розглянемо випадок $|x_\nu^{(1)}-\xi_\nu|\le 4T_1,\ \xi\in\partial D,\ \nu\in\{1,2,\ldots,n\}$. Вважаємо для простоти $\nu=n$. Нехай $K(P)$ — куля радіуса $R_0,\ R_0\ge 4(T_1n+T_2)$, з центром у деякій точці $P\subset\Gamma^{(k)}$, яка містить точки $P_1,\ P_2,\ R_i$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\eta(\xi)$ із [10, с. 126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)}\cap K(P)$ перейде в область D_2, для точок якої $\xi_n\ge 0$.

Вважаємо, що $u_m(t,x),\ P_1,\ P_2,\ R_i$ при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t,\xi)$, $M_1,\ M_2,\ Z_i$. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів $L_1,\ B_1$ в області D_2 через $\widetilde{a}_{ij}(t,\xi),\ \widetilde{a}_i(t,\xi),\ \widetilde{a}_0(t,\xi),\ \widetilde{h}_k(t,\xi),\ \widetilde{h}_0(t,\xi)$. Тоді $v_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i\xi_j}\right]v_m=\sum_{i,j=1}^{n}\bigl[\widetilde{a}_{ij}(t,\xi)-\widetilde{a}_{ij}(M_1)\bigr]\partial_{\xi_i\xi_j}v_m-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\widetilde{a}_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}v_m-\widetilde{a}_0(t,\xi)v_m+f_m(t,\eta(\xi)),$$

$$v_m(t_k+0,\xi)=G_m^{(k)}(t_k,\eta(\xi)),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{h}_i(M_1)\partial_{\xi_i}v_m\Big|_{\xi_n=0}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\bigl[\widetilde{h}_i(M_1)-\widetilde{h}_i(t,\xi)\bigr]\partial_{\xi_i}v_m-\widetilde{h}_0(t,\xi)v_m+g_m(t,\eta(\xi))\right\}\Bigg|_{\xi_n=0}.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінок (35)–(37), і використовуючи при цьому теорему 6.1 [11, с. 364], одержуємо нерівність (38).

Оскільки

$$\|\psi_m^{(\lambda)}\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))}\le c\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))},$$

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_{\alpha}\le c\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_{\alpha}, \tag{39}$$

$$\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}\le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$

$$\left\|\varphi_m^{(k)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\le c\left\|\varphi_k;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

об'єднуючи нерівності (23), (38) і (39), отримуємо оцінку (18).

***Доведення теореми* 1.** Права частина нерівності (18) не залежить від m. Крім того, послідовності

$$\{u_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\},\quad \{u_m^{(1)}\}\equiv\left\{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)\partial_{x_i}u_m\right\},$$

$$\{u_m^{(2)}\}\equiv\left\{d_1(2\gamma^{(1)},t)d_2(2\gamma^{(2)},x)\partial_t u_m\right\},$$

$$\{u_m^{(3)}\}=\left\{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)d_1(\gamma^{(1)}-\beta_j^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_j^{(2)},x)\partial_{x_ix_j}u_m\right\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в областях $Q^{(k)}$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{u_{m(j)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{u_0^{(\mu)}\}$ при $m(j)\longrightarrow\infty$, $\mu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(j)\longrightarrow\infty$ в задачі (6) – (9), одержуємо, що $u(t,x)=u_0^{(0)}$ — єдиний розв'язок задачі (1) – (4), $u\in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$.

Література

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
2. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand with discontinuities. – Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
4. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315 – 328.
5. *Bainov D. D., Minchev E., Vyshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**, № 4. – P. 1 – 14.
6. *Pukalskyi I. D.* Boundary-value problems for parabolic equations with impulsive condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, № 1. – P. 60 – 71.
7. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 55 – 67.
8. *Isaryuk I. M., Pukalskyi I. D.* The boundary value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, № 1. – P. 26 – 38.
9. *Pukalskyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, № 3. – P. 327 – 343.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
11. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
12. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці, 2008. – 253 с.

Одержано 11.01.18,
після доопрацювання — 30.01.19