УДК 517.2

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВИД ТА ВЛАСТИВОСТІ КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ ВЕЙЄРШТРАССА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ З ДІЙСНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ НА $\mathbb{R}$

We determine the form and properties of the Weierstrass canonical product of an entire function with real values on $\mathbb{R}$. The proof of the theorem on the order of R-integral is specified [*Samoilenko A. M.* Order and canonical product of the Weierstrass R-integral // Ukr. Mat. Zh. – 2019. – **71**, № 4. – P. 564 – 570].

Визначається вид та властивості канонічного добутку Вейєрштрасса цілої функції з дійсними значеннями на $\mathbb{R}$. Конкретизується доведення теореми про порядок R-інтеграла [*Самойленко А. М.* Порядок та канонічний добуток Вейєрштрасса R-інтеграла // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 4. – С. 564 – 570].

Нехай $z = x + it,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ z_1, z_2, \ldots$ — послідовність точок $\mathbb{C}$, розміщених у порядку неспадної послідовності їхніх модулів

$$0 < |z_k| \le |z_{k+1}|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

така що

$$\lim_{k\to\infty} |r_k| = \infty.$$

Теорема Вейєрштрасса [1] про нескінченний добуток стверджує, що функція

$$W(z) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{z_k}, m_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P(z,m_k)}, \tag{1}$$

де $P(z,0) = 0$ і при $m_k \in \mathbb{N}$

$$P(z, m_k) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_k}\right)^n,$$

при відповідному виборі $m_k \le k$ є цілою функцією, нулями якої є точки z_k, і лише вони.

Число

$$\rho = \inf\left\{\lambda > 0\colon \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-\lambda} < \infty\right\}$$

— порядок $W(z)$; якщо він скінченний, то $m = [\rho]$ — ціла частина ρ, визначає рід $W(z)$.

Для $W(z)$ скінченного порядку в формулі (1) всі m_k покладають рівними m:

$$m_k = m, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Добуток (1) називають [2] канонічним добутком Вейєрштрасса.

В даній роботі розглядається цей добуток у випадку, коли функція $W(z)$ при дійсних значеннях $z : z = x \in \mathbb{R}$ набуває дійсних значень:

$$W(x) \in \mathbb{R} \tag{2}$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$. Крім того, досліджуються канонічні добутки $W(z)$ скінченного порядку ρ.

Для цілих функцій $f(z)$ скінченного порядку $m \le \rho \le m+1$ роду m, що мають нескінченну кількість нулів, Ж. Адамар встановив [3] формулу зображення у вигляді канонічного добутку Вейєрштрасса

$$f(z) = e^{Q(z)}W(z),$$

де $Q(z)$ — многочлен степеня не вищого за ρ, $W(z)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса роду m:

$$W(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P\left(\frac{z}{z_k}, m\right)}, \tag{3}$$

$$P(z,m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Очевидно, що оскільки $f(0) = 1$, $W(0) = 1$, то при $m \geq 1$ многочлен $Q(z)$ можна записати у вигляді

$$Q(z) = \int\limits_0^z g(\tau)d\tau, \quad g(z) = Q'(z),$$

де $g(z)$ — многочлен степеня не вищого за $\rho - 1$.

Визначальним для дослідження вигляду та властивостей нескінченного добутку Вейєрштрасса (3) з умовою (2) є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай функція* (3) *задовольняє умову* (2). *Тоді нулями* $W(z)$ *можуть бути лише дійсні точки* $\mathbb{C}$ *та пари комплексно-спряжених точок* $\mathbb{C}$ *однієї і тієї ж кратності в парі як нулів* $W(z)$.

Дійсно, згідно з умовою (2)

$$W(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

де $W^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким чином, якщо

$$W(z_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^{(n)}(0)}{n!} z_k^n = 0, \tag{5}$$

то згідно з (5)

$$\overline{W}(z_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^{(n)}(0)}{n!}\, \overline{z}_k^n = W(\overline{z}_k) = 0. \tag{6}$$

Рівність (6) доводить, що поряд із z_k нулем $W(z)$ є $\overline{z}_k$ — спряжена до z_k точка $\mathbb{C}$.

Очевидно, що якщо одночасно з (5) має місце рівність

$$W'(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^{(n)}(0)}{(n-1)!} z_k^{n-1} = 0,$$

то справджується також рівність

$$\overline{W'}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^{(n)}(0)}{(n-1)!} \overline{z}_k^{n-1} = W'(\overline{z}_k) = 0.$$

Це доводить за індукцією, що кратності комплексно-спряжених нулів $(z_k, \overline{z}_k)$ функції $W(z)$ у парі співпадають.

Конкретизуємо з урахуванням теореми 1 вигляд канонічного добутку Вейєрштрасса $W(z)$ у випадку, коли він задовольняє умову (2).

Розглянемо спочатку випадок, коли всі нулі $W(z)$ є дійсними. Отже, нехай

$$W(x_k) = 0, \quad W(z) \neq 0, \quad z \neq x_k, \tag{7}$$

$$0 < |x_k| \leq |x_{k+1}|, \quad \lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty. \tag{8}$$

Згідно з визначеннями (1), (3) при умові (2) та (7), (8) маємо

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{x}{x_k}, m\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) e^{P\left(\frac{x}{x_k}, m\right)},$$

де

$$P(x, 0) = 0, \quad P(x, m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отже, в даному випадку при $m \geq 1$

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) e^{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x_k}\right)^n}. \tag{9}$$

Визначимо характерну властивість добутку (9).

Нехай $m = 1$. Тоді

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) e^{\frac{x}{x_k}}. \tag{10}$$

Для значень x, близьких до 0, $W(x)$ внаслідок того, що $W(0) = 1$, близьке до 1. Логарифмуючи (10) для x, близьких до 0, отримуємо

$$\ln W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{x}{x_k}\right) + \frac{x}{x_k}\right), \tag{11}$$

а диференціюючи (11), одержуємо рівність

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\dfrac{1}{x_k}}{1 - \dfrac{x}{x_k}} + \frac{1}{x_k}\right). \tag{12}$$

Із (12) при $x = 0$ отримуємо рівність

$$W'(0) = 0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли серед нулів $W(z)$ немає дійсних. Отже, всі нулі $W(z)$ утворюють комплексно-спряжені пари $(z_k, \overline{z}_k)$ точок $\mathbb{C}$ однієї і тієї ж кратності в парі як нулів $W(z)$.

Запишемо $(z_k, \overline{z}_k)$ в полярних координатах:

$$(z_k, \overline{z}_k) = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k, \cos\varphi_k - i\sin\varphi_k), \tag{13}$$

$$0 < r_k \leq r_{k+1}, \quad 0 < \varphi_k < \pi, \quad \lim_{k\to\infty} r_k = \infty.$$

Примарні множники пари (13) $W\left(\dfrac{z}{z_k}, m\right)$ і $W\left(\dfrac{z}{\overline{z}_k}, m\right)$ у нескінченному добутку $W(z)$ стоять поряд, оскільки їхні модулі однакові. В результаті, об'єднуючи дужками ці множники в пару, отримуємо в $W(z)$ множник

$$W\left(\frac{z}{z_k}, m\right) W\left(\frac{z}{\bar{z}_k}, m\right) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{z}_k}\right) e^{P\left(\frac{z}{z_k}, m\right) + P\left(\frac{z}{\bar{z}_k}, m\right)}. \tag{14}$$

Далі маємо

$$\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{z}_k}\right) = 1 - \left(\frac{z}{z_k} + \frac{z}{\bar{z}_k}\right) + \frac{z^2}{z_k \bar{z}_k} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{\bar{z}_k}\right) z + \frac{z^2}{r_k^2} = 1 - \frac{2\cos\varphi_k}{r_k} z + \frac{z^2}{r_k^2} \tag{15}$$

і при $m \geq 1$

$$P\left(\frac{z}{z_k},\ m\right) + P\left(\frac{z}{\bar{z}_k},\ m\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\left(\frac{z^n}{z_k^n} + \frac{z^n}{\bar{z}_k^n}\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n} \frac{\bar{z}_k^n + z_k^n}{z_k^n \bar{z}_k^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n} \frac{r_k^n}{r_k^{2n}} \big((\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)^n + (\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k)^n\big) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2\cos n\varphi_k}{n} \left(\frac{z}{r_k}\right)^n.$$

Отже, при $m \geq 1$

$$P\left(\frac{z}{z_k},\ m\right) + P\left(\frac{z}{\bar{z}_k},\ m\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2\cos n\varphi_k}{n} \left(\frac{z}{r_k}\right)^n. \tag{16}$$

Із (15), (16) випливає, що при $m \geq 1$

$$W\left(\frac{z}{z_k},\ m\right) W\left(\frac{z}{\bar{z}_k},\ m\right) = \left(1 - \frac{2\cos\varphi_k}{r_k} z + \frac{z^2}{z_k^2}\right) e^{\sum_{n=1}^{m} \frac{2\cos n\varphi_k}{n}\left(\frac{z}{r_k}\right)^n}. \tag{17}$$

Таким чином, у розглядуваному випадку з (3), (4), (14), (17) отримуємо рівність вигляду

$$W(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{z}{r_k}\cos\varphi_k + \left(\frac{z}{r_k}\right)^2\right) e^{P_m\left(\frac{z}{r_k},\ \varphi_k\right)}, \tag{18}$$

де $P_0\left(\dfrac{z}{r_k},\ \varphi_k\right) = 0$, і при $m \geq 1$

$$P_m\left(\frac{z}{r_k},\ \varphi_k\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2\cos n\varphi_k}{n} \left(\frac{z}{r_k}\right)^n.$$

Рівність (18) при $z = x \in \mathbb{R}$ набирає вигляду

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \left(\frac{x}{r_k}\right)^2\right) e^{P_m\left(\frac{x}{r_k},\ \varphi_k\right)},$$

де $P_0\left(\dfrac{x}{r_k},\ \varphi_k\right) = 0$, і при $m \geq 1$

$$P_m\left(\frac{x}{r_k},\ \varphi_k\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2\cos n\varphi_k}{n} \left(\frac{x}{r_k}\right)^n.$$

Нехай $m = 1$. Тоді

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \left(\frac{x}{r_k}\right)^2\right) e^{2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k}. \tag{19}$$

Оскільки $W(0) = 1,\ W(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$, то, логарифмуючи (19), одержуємо

$$\ln W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \left(\frac{x}{r_k}\right)^2 \right) + 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k \right). \tag{20}$$

Диференціюючи (20), отримуємо рівність

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2\dfrac{\cos\varphi_k}{r_k} + 2\dfrac{x}{r_k^2}}{1 - 2\dfrac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \left(\dfrac{x}{r_k}\right)^2} + 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} \right). \tag{21}$$

Із (21) при $x = 0$ одержуємо

$$W'(0) = 0. \tag{22}$$

Нехай $f(z)$ — ціла функція, $f(0) = 1$, що набуває дійсних значень для дійсних $z:\ f(x) \in \mathbb{R}$ для $z = x \in \mathbb{R}$, яка має перший порядок: $\rho = 1$ та нескінченну кількість комплексно-спряжених пар $(z_k,\ \bar{z}_k)$ нулів.

Запишемо для $f(x)$ формулу Адамара

$$f(x) = e^{\int_0^x g(\tau)d\tau} W(x), \tag{23}$$

де $g(x) = \lambda$ — стала, $W(x)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса (19) з $m = 1$. На підставі викладеного (23) записуємо у вигляді

$$f(x) = e^{\lambda x} W(x). \tag{24}$$

Диференціюючи (24), отримуємо

$$f'(x) = \lambda f(x) + e^{\lambda x} W'(x). \tag{25}$$

При $x = 0$ з урахуванням (22) із (25) одержуємо рівність

$$f'(0) = \lambda.$$

Таким чином, формула Адамара (3) для $\rho = 1$ у розглядуваному випадку при $z = x \in \mathbb{R}$ набирає вигляду

$$f(x) = e^{\lambda x} W(x), \tag{26}$$

де

$$\lambda = f'(0), \tag{27}$$

$W(x)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса (19).

Із (26), (27) випливає, що при $f'(0) \neq 0$ степінь многочлена в показнику експоненти дорівнює $\rho = 1$, а при $f'(0) = 0$ менший за $\rho = 1$ та дорівнює 0.

Наслідок. *Якщо ціла функція $f(z),\ f(0) = 1$, має перший порядок: $\rho = 1$ і нескінченну кількість пар комплексно-спряжених нулів та не має дійсних нулів, то*

$$f(z) = e^{\lambda z} W(z),$$

де

$$\lambda = f'(0).$$

Використаємо цей результат для конкретизації доведення теореми 1 про порядок ρ R-інтеграла [4].

Нехай $\rho = 1$. Тоді R-функція

$$f(x) = 1 - x(1-x)\int\limits_1^\infty \left(\tau^{\frac{x}{2}} + \tau^{\frac{1-x}{2}}\right)\theta(\tau)d\tau \tag{28}$$

згідно з формулою (24) набирає вигляду

$$f(x) = e^{\lambda x}W(x),$$

де

$$\lambda = f'(0), \tag{29}$$

$W(x)$ — добуток (19). Згідно з (28) та (29)

$$\lambda = -\int\limits_1^\infty \left(1 + \tau^{\frac{1}{2}}\right)\theta(\tau)d\tau.$$

Запишемо рівність

$$F(x) = f^2(x) = f(x)f(1-x) = \left(e^{\lambda x}W(x)\right)^2 =$$

$$= e^{\lambda x}W(x)e^{\lambda(1-x)}W(1-x) = e^{\lambda}W(x)W(1-x) =$$

$$= e^{\lambda}\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right)e^{2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)e^{2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k} =$$

$$= e^{\lambda}\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)\prod_{k=1}^\infty \frac{2\cos\varphi_k}{r_k}. \tag{30}$$

Із (30) при $x = 0$ отримуємо

$$1 = e^{\lambda}\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} + \frac{1}{r_k^2}\right)e^{2\frac{\cos\varphi_k}{r_k}}.$$

Отже,

$$e^{\lambda} = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} + \frac{1}{r_k^2}\right)^{-1}e^{-2\frac{\cos\varphi_k}{r_k}}. \tag{31}$$

Підставляючи (31) у (30), одержуємо

$$F(x) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right)\prod_{k=1}^\infty \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)\times$$

$$\times\left(1-2\frac{\cos\varphi_k}{r_k}+\frac{1}{r_k^2}\right)^{-1}. \tag{32}$$

Оскільки $F(x)\neq 0$ для $x\in\mathbb{R}$, $F(0)=1$, то, логарифмуючи (32), для $x\geq 1$ отримуємо

$$\ln F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{x^2}{r_k^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-2\frac{\cos\varphi_k}{r_k}+\frac{1}{r_k^2}\right).$$

Знайдемо границю при $x\to\infty$ для $\dfrac{\ln F(x)}{x}$.Згідно з (30) маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln F(x)}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1-2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{x^2}{r_k^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1-2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right). \tag{33}$$

Далі при $x\geq 1$ одержуємо

$$\frac{1}{x}\ln\left(1-2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{x^2}{r_k^2}\right)\leq\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x^2}{r_k^2}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x^2}{r_k^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x}{r_k^2}}{1+\dfrac{x^2}{r_k^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}\left(\frac{\dfrac{1}{r_k^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{r_k^2}}\right)=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{r_k^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{r_k^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

рівномірно по x.

Аналогічним чином обчислюється друга границя у формулі (33). Це доводить, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln F(x)}{x}=0 \tag{34}$$

рівномірно по x.

Із (34) випливає, що $F(x)=e^{\mu(x)x}$, де $\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0$ рівномірно по x, отже, $F(x)$ не має експоненціального росту на $\mathbb{R}$.

Література

1. *Weierstrass K.* Math. Werke. – 1895. – Bd 2, B.
2. Математическая энциклопедия: В 5 т. – М.: Сов. энцикл., 1979. – Т. 2. – С. 713 – 714.
3. *Hadamard J.* Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d’une fonction considérée par Riemann // J. Math. Pures et Appl. – 1893. – **9**, Ser. 4. – P. 171 – 215.
4. *Самойленко А. М.* Порядок та канонічний добуток Вейєрштрасса R-інтеграла // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 4. – С. 564 – 570.

Одержано 26.04.19