УДК 517.9

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ*

We study open discrete maps of two-dimensional Riemannian manifolds from the Sobolev class. For these mappings, we obtain the lower estimates of distortions of the moduli of the families of curves. As a consequence, we establish the equicontinuity of Sobolev classes at interior points of the domain.

Вивчаються відкриті дискретні відображення ріманових двовимірних многовидів, які належать класу Соболєва. Для таких відображень встановлено нижні оцінки спотворення сімей кривих. Як наслідок отримано одностайну неперервність класів Соболєва у внутрішніх точках області.

1. Введение. В работе [1] установлено, что семейство отображений класса Орлича – Соболева, действующих между римановыми многообразиями, равностепенно непрерывно при определенных условиях на эти многообразия и характеристики отображений. Указанная задача рассмотрена только при $n \geq 3$, так как используемое в рассуждениях условие Кальдерона $\int_1^{\infty} (t/\varphi(t))^{1/(n-2)}\, dt < \infty$ лишено смысла при $n = 2$. Ниже мы исследуем неизученный ранее случай $n = 2$. Основные результаты относятся к классам Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, более широким, чем классы Орлича – Соболева из [1]. Важным отличием от [1] является отказ от выполнения неравенства Пуанкаре и регулярности по Альфорсу во втором многообразии $\mathbb{M}^n_*$. Кроме того, мы не предполагаем образ исходной области D лежащим в шаре B_R, который является гомеоморфным некоторой плоской области (см. [1], теорема 1.1). Вместо этого ключевым ограничением на область во втором многообразии является ее равномерность.

Используемые ниже определения и обозначения взяты из [1, 2] (см. также [3 – 6]). Всюду далее, если не оговорено противное, D и D_* — области, лежащие в римановых многообразиях $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_*$ соответственно. Напомним, что длина кусочно-гладкой кривой $\gamma = \gamma(t),\ t \in [a, b]$, соединяющей точки $\gamma(a) = M_1 \in \mathbb{M}$, $\gamma(b) = M_2 \in \mathbb{M}$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$, определяется соотношением

$$l(\gamma) := \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}}\, dt,$$

где $g = g_{ij}(x)$ — гладкий положительно определенный тензор типа $(0, 2)$ на многообразии (риманова метрика). Иначе говоря, $g = g_{ij}(x)$ — система матриц, которые в различных системах координат связаны соотношением ${}'g_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl}(y(x))\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial y_l}{\partial x_j}$. *Объем измеримого множества* $A \subset \mathbb{M}$ определяется равенством

$$v(A) = \int\limits_A \sqrt{\det g_{ij}}\, dxdy. \tag{1}$$

* Исследования поддержаны грантом Президента Украины Ф78 (договор ф78/206 – 2018 от 16.10.18 г.).

Геодезическим расстоянием $d(p_1, p_2)$ между точками p_1 и $p_2 \in \mathbb{M}$ будем называть наименьшую длину всех кусочно-гладких кривых в $\mathbb{M}$, соединяющих точки p_1 и p_2. Определим *длину* $l(\gamma)$ *кривой* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{M}$ как

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{m} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям $a := t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m := b$. Всюду ниже $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_*$ — римановы многообразия размерности 2 с геодезическими расстояниями d, d_* и площадями v, v_* соответственно.

Здесь и далее

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}\colon d(x, x_0) = r\},$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}\colon d(x, x_0) < r\},$$

при этом записи $S(x_0, r)$ и $B(x_0, r)$ сохраняются и для евклидовой окружности (круга), если недоразумение невозможно. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ принадлежит *классу Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(G)$ (пишут $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(G)$), если обе координатные функции $f = (f_1, f_2)$ имеют обобщенные частные производные первого порядка и локально интегрируемы в G. Пусть теперь область $D \subset \mathbb{M}$, тогда будем говорить, что отображение $f\colon D \to \mathbb{M}_*$ принадлежит классу $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, если каждая пара точек $p \in D$ и $f(p) \in f(D)$ имеет окрестности $U \subset D$, $V \subset f(D)$, в которых $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\varphi(U))$, где $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^2$ — соответствующие карты, переводящие U и V в некоторые открытые подмножества $\mathbb{R}^2$. Пусть D — подмножество $\mathbb{M}$. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{M}_*$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{M}_*$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y, f, E) \,=\, \mathrm{card}\,\{x \in E \,|\, f(x) = y\}\,, \qquad N(f, E) \,=\, \sup_{y \in \mathbb{M}_*} N(y, f, E). \tag{2}$$

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{M}_*$, $D \subset \mathbb{M}$, определим *якобиан отображения в точке* $x \in D$ как

$$J_f(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{v_*(f(B(x,r)))}{v(B(x,r))},$$

где v и v_* — объемы в $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_*$ соответственно. Заметим, что в нормальных координатах якобиан открытого дискретного отображения f с точностью до знака совпадает в почти всех точках дифференцируемости с обычным якобианом (определителем якобиевой матрицы) (см. [7], теорема 2, разд. V.3.2). Кроме того, согласно теореме Геринга – Лехто, якобиан $J_f(x)$ определен и конечен почти всюду для открытых отображений f (см. [8], теорема III.3.1 и замечание). Полагаем

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)}, \tag{3}$$

где d и d_* — геодезические расстояния на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_*$ соответственно. Определим *дилатацию отображения* f *в точке* $x \in D$ равенством

$$K_f(x) = \begin{cases} \dfrac{L^2(x,f)}{J_f(x)}, & J_f(x)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (4)$$

Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{M}\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ, $\rho\in$ $\in \operatorname{adm}\Gamma$, если $\int_\gamma \rho(x)\,ds\geq 1$ для любой кривой $\gamma\in\Gamma$, где ds — элемент длины на $\mathbb{M}$. *Модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma):=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{M}}\rho^2(x)\,dv(x),$$

где $dv(x)$ — элемент площади на $\mathbb{M}$. Область $D\subset\mathbb{M}$ называется *равномерной*, если для любого $r>0$ найдется такое $\delta>0$, что $M(\Gamma(F,F^*,D))\geq\delta$ для любых континуумов F и F^* в D, удовлетворяющих условиям $d(F)\geq r$ и $d(F^*)\geq r$. Области D_i, $i\in I$, называются *равностепенно равномерными*, если для каждого $r>0$ неравенство $M\big(\Gamma(F,F^*,D)\big)\geq\delta$ выполнено для каждого D_i с одним и тем же числом δ.

Предположим, что $x_0\in\mathbb{M}$ и функция $\varphi\colon M\to\mathbb{R}$ интегрируема относительно меры v в некоторой окрестности U точки x_0. Следуя [9] (разд. 2) (см. также [10], разд. 6.1, гл. 6), будем говорить, что функция $\varphi: D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$ (пишем $\varphi\in FMO(x_0)$), если

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\big(1/(v(B(x_0,\varepsilon)))\big)\int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|dv(x)<\infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon=\big(1/(v(B(x_0,\varepsilon)))\big)\int_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,dv(x)$.

Для заданных чисел $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}$, области $D\subset\mathbb{M}$ и измеримой относительно меры v функции $Q\colon\mathbb{M}\to(0,\infty)$, $Q(x)\overset{\mathbb{M}\setminus D}{\equiv}0$, обозначим через $\mathfrak{S}_{Q,\delta,N}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений $f: D\to D_*$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с конечным искажением таких, что: 1) $K_f(x)\leq Q(x)$ при почти всех $x\in D$; 2) $N(f,D)\leq N$ и 3) найдется континуум $G_f\subset$ $\subset D_*\setminus f(D)$ такой, что $d_*(G_f)=\sup_{x,y\in G_f}d_*(x,y)\geq\delta$. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что Q удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) *для каждого $x_0\in D$ найдется $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)>0$ такое, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\|Q\|(t)}<\infty,\qquad \int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\|Q\|(t)}=\infty, \qquad (5)$$

$\|Q\|(r)=\int_{S(x_0,r)}Q(x)\,ds$ — *L_1-норма функции Q над окружностью $S(x_0,r)$*;

2) *$Q\in FMO(x_0)$ в каждой точке $x_0\in D$.*

Если область D_* равномерна и $\overline{D_*}$ — компакт в $\mathbb{M}_*$, то семейство $\mathfrak{S}_{Q,\delta,N}(D)$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0\in D$.

2. Об искажении модуля семейств кривых при отображении. Методология, используемая ниже, основана на модульной технике, поскольку наиболее принципиальным моментом для установления желаемого результата является характерное искажение семейств кривых при отображениях класса Соболева. Условимся говорить, что множество $B \subset \mathbb{M}$ *борелево*, если B можно покрыть не более чем счетным числом окрестностей $U_k \subset \mathbb{M},\ k = 1, 2, \ldots,$ таких, что (U_k, φ_k) — локальные координаты, при этом $\varphi_k(B \cap U_k)$ — борелево множество в $\mathbb{C}$. Начнем с доказательства следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $B_0 \subset \mathbb{M},\ v(B_0) = 0,\ x_0 \in \mathbb{M},\ (U, \varphi)$ — *нормальные координаты точки* $x_0,\ \overline{U} \neq \mathbb{M}$ *и* $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$. *Тогда для почти всех* (*относительно параметра* $r \in (0, \varepsilon_0)$) *окружностей* $S_r := S(x_0, r)$ *с центром в точке* x_0

$$\mathcal{H}^1(\varphi(B_0 \cap S_r)) = 0, \tag{6}$$

где φ — *гомеоморфизм* U *в* $\mathbb{D}$, *соответствующий определению нормальной окрестности* U, $\mathcal{H}^1$ — 1-*мерная хаусдорфова мера в* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Действительно, вследствие регулярности лебеговой меры найдется борелево множество $B \subset \mathbb{M}$ такое, что $\varphi(B_0) \subset \varphi(B)$ и $m(\varphi(B_0)) = m(\varphi(B)) = 0$, где m — как обычно, мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Пусть g — характеристическая функция множества $\varphi(B)$. Согласно теореме 3.2.5 [11] при $m = 1$, имеем

$$\int\limits_{\gamma} g(x)\,|dx| = \mathcal{H}^1\big(\varphi(B \cap |\gamma|)\big), \tag{7}$$

где $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — произвольная локально спрямляемая кривая, $|\gamma|$ — носитель кривой γ в $\mathbb{C}$, а $|dx|$ — элемент евклидовой длины. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 33.1 [12], полагаем

$$\rho(x) = \begin{cases} \infty, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Заметим, что ρ — борелева функция. Пусть Γ — семейство всех окружностей $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0,\ r \in (0, \varepsilon_0)$, для которых $\mathcal{H}^1(\varphi(B \cap S_r)) > 0$. В нормальных координатах окружностям $S(x_0, r)$ и кругам $B(x_0, r)$ в $\mathbb{M}$ соответствуют окружности $S(0, r)$ и круги $B(0, r)$ в $\mathbb{R}^2$ (см., например, лемму 5.10 и следствие 6.11 [13]). В силу (7) для каждой $S_r \in \Gamma$ имеем

$$\int\limits_{S_r} \rho(x)\,ds = \int\limits_{S(0,r)} \rho(\varphi^{-1}(y))\,|dy| = \infty.$$

Тогда $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Таким образом, по определению модуля семейств кривых

$$M(\Gamma) \leq \int\limits_{\mathbb{M}} \rho^2(x)\,dv(x) = 0.$$

Пусть Γ^* состоит из всех окружностей $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке x_0, для которых выполнено $\mathcal{H}^1(\varphi(B_0 \cap S_r)) > 0$. Заметим, что $\Gamma^* \subset \Gamma$, откуда $M(\Gamma^*) = 0$. Наконец, заметим, что функция $\psi(r) := \mathcal{H}^1(\varphi(B_0 \cap S_r))$ измерима по Лебегу в силу теоремы Фубини, так что (6) справедливо при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ согласно лемме 4.1 [14].

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{M}$ — (локально спрямляемая) кривая на римановом многообразии $\mathbb{M}$, тогда определим функцию $l_\gamma(t)$ как длину кривой $\gamma|_{[a,t]}$, $a \le t \le b$. Пусть теперь $B \subset \mathbb{M}$ — произвольное множество, тогда положим

$$l_\gamma(B) = \mathrm{mes}_1\,\{s \in [0, l(\gamma)] : \gamma(s) \in B\}, \tag{8}$$

где, как обычно, mes_1 обозначает линейную меру Лебега в $\mathbb{R}$, а $l(\gamma)$ — длину γ. Точно так же можно определить $l_\gamma(B)$ для штриховой линии $\gamma\colon \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i) \to \mathbb{S}$, $a_i < b_i$ при $i \in \mathbb{N}$, $(a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \varnothing$ при $i \ne j$. Следующие две леммы являются ключевыми утверждениями, на основе которых могут быть получены оценки искажения модуля семейств кривых при заданных отображениях. Первое утверждение связано с искажением длин кривых, проходящих через произвольное множество нулевой меры, в то время как второе утверждение относится к множествам точек обращения в нуль нормы производной отображения.

Лемма 1. *Пусть $f\colon D \to D_*$ — отображение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $x_0 \in \overline{D}$, U — нормальная окрестность точки x_0, $\overline{U} \ne \mathbb{M}$ и $0 < \varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial U)$. Если $B_0 \subset D$, $v(B_0) = 0$, то для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$*

$$l_{f(S(x_0,r)\cap D)}(f(B_0)) = 0,$$

где функция l определена в (8).

Доказательство. Вследствие непрерывности отображения f можно покрыть область $f(U)$ не более чем счетным числом нормальных окрестностей V_k, $k = 1, 2, \ldots$, лежащих в круге $B(p_k, r_k)$ так, что соответствующее координатное отображение φ_k переводит $B(p_k, r_k)$ в круг $B(0, r_k) \subset \mathbb{R}^2$ и, кроме того, $U_k = f^{-1}(V_k)$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = U$. Уменьшая окрестность V_k, если это необходимо, можем считать, что $d_*(x,y) \le 2|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)|$ при $x, y \in V_k$, поскольку тензорная матрица $g_{ij}(x)$ близка к единичной в достаточно малой окрестности точки p_k в координатах φ_k (см. [13], предложение 5.11 (c)). В силу изложенного можно считать, что $f(U)$ лежит в некоторой нормальной окрестности $W' \subset \mathbb{M}_*$, гомеоморфной открытому множеству $W \subset \mathbb{D}$ посредством координатного отображения $\psi\colon f(U) \to W$, при этом

$$d_*(x,y) \le 2|\psi(x) - \psi(y)| \quad \forall x, y \in W' \subset \mathbb{M}_*. \tag{9}$$

Пусть φ — гомеоморфизм U в $\mathbb{D}$, соответствующий определению нормальной окрестности U, и $\varphi(U) \subset B(0, r_0)$, где $\overline{B(0, r_0)}$ — компакт в $\mathbb{D}$. Рассмотрим разбиение множества $B(0, r_0)$ на счетное число попарно непересекающихся кольцевых сегментов

$$A_m = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = Re^{i\alpha}, R \in (r_{m-1}, r_m], \alpha \in (\psi_{m-1}, \psi_m]\}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Пусть h_m — вспомогательная квазиизометрия, отображающая A_m на прямоугольник B_m такой, что дуги окружностей с центром в нуле отображаются на отрезки прямых. Точнее, положим $h_m(\omega) = \log \omega$, $\omega \in A_m$ и $\widetilde{A_m} := h_m(A_m \cap D)$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение

$$g_m := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ h_m^{-1}, \qquad g_m \colon \widetilde{A_m} \to \mathbb{R}^2.$$

Заметим, что $g_m \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{A_m})$ (см. [15], разд. 1.1.7), откуда, в частности, следует, что $g_m \in ACL$ (см. [15], теоремы 1 и 2, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I).

Положим, как и прежде, $S_r := S(x_0, r)$. По предложению 1 вследствие гладкости отображения h_m получим

$$\mathcal{H}^1(\varphi(B_0\cap S_r)\cap A_m)=\mathcal{H}^1(h_m(\varphi(B_0\cap S_r)\cap A_m))=0$$

для всех $r\in[0,\varepsilon_0]\setminus A_0$, где $\mathrm{mes}_1 A_0=0$. Поскольку абсолютная непрерывность отображения g_m на фиксированном отрезке влечет N-свойство относительно линейной меры Лебега (см. [11], разд. 2.10.13), из последнего соотношения получаем

$$\mathcal{H}^1\big(g_m(h_m(\varphi(B_0\cap S_r)\cap A_m))\big)=\mathcal{H}^1\big(\psi(f((B_0\cap S_r)\cap A_m))\big)=0,\quad r\in[0,\varepsilon_0]\setminus A_0. \quad (10)$$

Заметим, что $U\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\varphi^{-1}(A_m)$, так что из (10) вследствие счетной полуаддитивности меры Хаусдорфа следует, что

$$\mathcal{H}^1\big(\psi(f(B_0\cap S_r))\big)=0,\quad r\in[0,\varepsilon_0]\setminus A_0. \quad (11)$$

Пусть $\widetilde{\gamma}$ — какая-либо дуга штриховой линии $\psi\big(f(S(x_0,r))\big)$ и $l(\widetilde{\gamma})$ — ее евклидова длина. Параметризуем $\widetilde{\gamma}$ в виде $\widetilde{\gamma}\colon[0,l(\widetilde{\gamma})]\to\mathbb{D}$, $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\gamma}(s)$, где s — натуральный параметр на $\widetilde{\gamma}$ в смысле евклидовой длины. Полагая $m=1$ в [11] (теорема 3.2.5), получаем, согласно (11), что множество $B:=\big\{s\in[0,l(\widetilde{\gamma})]\colon\widetilde{\gamma}(s)\in\psi(f(B_0))\big\}$ имеет линейную меру нуль. Пусть $\chi_{\psi(f(B_0))}(z)$ — характеристическая функция множества $\psi(f(B_0))$. Тогда

$$l_{\widetilde{\gamma}}(f(B_0))=\int\limits_0^{l(\widetilde{\gamma})}\chi_{\psi(f(B_0))}(\widetilde{\gamma}(s))\,ds=0 \quad (12)$$

для почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$. Обозначим $\gamma^*:=\psi^{-1}(\widetilde{\gamma})$. Заметим, что между элементами множеств $[0,l(\gamma^*)]$ и $[0,l(\widetilde{\gamma})]$ существует взаимно однозначное соответствие $L\colon[0,l(\widetilde{\gamma})]\to[0,l(\gamma^*)]$ такое, что $L(s)=s_*$, $s\in[0,l(\widetilde{\gamma})]$, $s=l_{\widetilde{\gamma}}(t)$, $s_*=l_{\gamma^*}(t)$, $t\in[0,2\pi]$. В силу соотношения (9)

$$\big|L(s_2)-L(s_1)\big|\le 2|s_2-s_1| \quad (13)$$

и

$$L(A)=B,$$

где

$$A:=\big\{s\in[0,l(\widetilde{\gamma})]\colon\widetilde{\gamma}(s)\in\psi(f(B_0))\big\},$$

$$B:=\big\{s_*\in[0,l(\gamma^*)]\colon\gamma^*(s_*)\in f(B_0)\big\}.$$

Из (12) следует, что $\mathrm{mes}_1(A)=0$. Тогда, поскольку при липшицевых отображениях имеет место N-свойство Лузина (см. [11], теорема 3.2.5 $m=1$, $g(x):\equiv\chi_A(x)$), из (13) получаем, что и $\mathrm{mes}_1(B)=0$ при почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$. Последнее равенство завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть $f\colon D\to D_*$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с конечным искажением, $x_0\in\overline{D}$, U — нормальная окрестность точки x_0, $\overline{U}\ne\mathbb{M}$ и $0<\varepsilon_0<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial U)$. Обозначим через $B_*\subset D$ множество таких точек области D, в которых отображение f дифференцируемо (в локальных координатах) и $J_f(x)=0$. Тогда для почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$*

$$l_{f(S(x_0,r))}(f(B_*))=0,$$

где функция l определена в (8).

Доказательство. Как и в лемме 1, можем считать, что $f(U)$ лежит в некоторой нормальной окрестности $W' \subset \mathbb{M}_*$, гомеоморфной открытому множеству $W \subset \mathbb{D}$ посредством карты (координатного отображения) $\psi\colon f(U) \to W$, и, кроме того, выполнено условие (9). По теореме Геринга – Лехто f дифференцируемо почти всюду в D в локальных координатах (см. [8], теорема III.3.1). В частности, множество U может быть разбито на счетное число множеств B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, таких, что $f|_{B_k}$ является билипшицевым гомеоморфизмом при $k = 1, 2, \ldots$, а B_0 имеет меру нуль (см. [11], пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8). Пусть, как и прежде, $S_r := S(x_0, r)$. По лемме 1 и теореме 3.2.5 [11] $\mathcal{H}^1\big(\psi(f(B_0 \cap S_r))\big) = 0$ для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$, где $\mathcal{H}^1$ — 1-мерная хаусдорфова мера. Тогда при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место 1-мерная замена переменных (см. [11], теорема 3.2.5).

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1, и используя обозначения этого предложения, заключаем, что отображение h_m переводит $\varphi(S_r)$ на сегмент $I(m, r) = \big\{z \in \mathbb{R}^2\colon z = \log r + it,\ t \in (\psi_{m-1}, \psi_m)\big\}$. Поскольку f имеет конечное искажение, то при всех $r > 0$ и $t \in (\psi_{m-1}, \psi_m)$ таких, что $\varphi^{-1}\big(h_m^{-1}(\log r + it)\big) \in B_*$, выполнено $g'_m(\log r + it) = 0$. Тогда по теореме 3.2.5 [11] при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$\mathcal{H}^1\big(\psi(f(B_* \cap S_r \cap \varphi^{-1}(A_m)))\big) = \mathcal{H}^1\big(g_m(h_m(\varphi(B_* \cap S_r) \cap A_m))\big) \leq$$

$$\leq \int\limits_{g_m(h_m(\varphi(B_* \cap S_r) \cap A_m))} N\big(y, g_m, h_m(\varphi(B_* \cap S_r) \cap A_m)\big)\, d\mathcal{H}^1 y =$$

$$= \int\limits_{\psi_{m-1}}^{\psi_m} \chi_{h_m(\varphi(B_*) \cap A_m)}(\log r + it) |g'_m(\log r + it)|\, dt = 0,$$

где $\chi_{h_m(\varphi(B_*) \cap A_m)}$ — характеристическая функция множества $h_m(\varphi(B_*) \cap A_m)$. Вследствие полуаддитивности по m одномерной хаусдорфовой меры в последней цепочке равенств имеем

$$\mathcal{H}^1\big(\psi(f(B_* \cap S_r))\big) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad r \in (0, \varepsilon_0). \tag{14}$$

Пусть $\widetilde{\gamma}$ — произвольная дуга штриховой линии $\psi(f(S_r))$. Параметризуем $\widetilde{\gamma}$ в виде $\widetilde{\gamma}\colon [0, b] \to \mathbb{D}$, $b = l(\widetilde{\gamma})$. Тогда из (14) и теоремы 3.2.5 [11] при $m = 1$ следует, что множество $B := \big\{s \in [0, b] : \widetilde{\gamma}(s) \in \psi(f(B_*))\big\}$ имеет линейную меру нуль. В таком случае

$$l_{\widetilde{\gamma}}(f(B_*)) = \int\limits_0^{l(\widetilde{\gamma})} \chi_{\psi(f(B_*))}(\widetilde{\gamma}(s))\, ds = 0 \tag{15}$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Обозначим $\gamma^* := \psi^{-1}(\widetilde{\gamma})$. Заметим, что между элементами множеств $[0, l(\gamma^*)]$ и $[0, l(\widetilde{\gamma})]$ существует взаимно однозначное соответствие $L\colon [0, l(\widetilde{\gamma})] \to [0, l(\gamma^*)]$ такое, что $L(s) = s_*$, $s \in [0, l(\widetilde{\gamma})]$, $s = l_{\widetilde{\gamma}}(t)$, $s_* = l_{\gamma^*}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. В силу соотношения (9)

$$\big|L(s_2) - L(s_1)\big| \leq 2|s_2 - s_1| \tag{16}$$

и

$$L(C) = E,$$

где

$$C := \{s \in [0, l(\widetilde{\gamma})] : \widetilde{\gamma}(s) \in \psi(f(B_*))\},$$

$$E := \{s_* \in [0, l(\gamma^*)] : \gamma^*(s_*) \in f(B_*)\}.$$

Из (15) следует, что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$. Тогда, поскольку при липшицевых отображениях имеет место N-свойство Лузина (см. [11], теорема 3.2.5, $m = 1$, $g(x) :\equiv \chi_C(x)$), из (16) получаем, что и $\mathrm{mes}_1(E) = 0$ при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Последнее равенство завершает доказательство леммы.

Пусть D и D_* — заданные области, лежащие в римановых многообразиях $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_*$ соответственно, $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция относительно меры v на $\mathbb{M}$. Будем говорить, что $f\colon D \to D_*$ — *нижнее Q-отображение в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x\in D} d(x, x_0)$, и каждого кольца $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}\colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ выполнено неравенство

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho\in \mathrm{ext\,adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\rho^2(x)}{Q(x)}\, dv(x),$$

где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений окружностей $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}\colon d(x, x_0) = r\}$ с областью D, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Аналоги следующего фундаментального утверждения были получены в [16] (лемма 3.1) и [17] (теорема 3).

Теорема 2. *Пусть $x_0 \in \overline{D}$. Тогда любое открытое дискретное отображение с конечным искажением $f\colon D \to D_*$ такое, что $N(f, D) < \infty$, является нижним Q-отображением в точке x_0 при $Q(x) = N(f, D)K_f(x)$, где $K_f(x)$ определено соотношением* (4), *а функция $N(f, D)$ задана в* (2).

Доказательство. Поскольку f открыто, то отображение f дифференцируемо почти всюду в D в локальных координатах (см. [8], теорема III.3.1). Пусть B — борелево множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$ в локальных координатах. Заметим, что B может быть представлено в виде не более чем счетного объединения борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см. [11], пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8). Без ограничения общности можем считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал и $f'(x) = 0$. Поскольку f имеет конечное искажение, $f'(x) = 0$ для почти всех точек x, где $J_f(x) = 0$. Таким образом, по построению множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет нулевую меру Лебега.

Пусть U — нормальная окрестность точки x_0, Γ — семейство всех окружностей S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 := \mathrm{dist}\,(x_0, \partial U)$. Для заданной функции $\rho_* \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$, тождественно равной нулю вне $f(D)$, положим $\rho \overset{(\mathbb{M}\setminus D)\cup B_0}{\equiv} 0$ и

$$\rho(x) = \rho_*(f(x))L(x, f) \quad \text{при} \quad x \in D \setminus B_0,$$

где $L(x, f)$ определено в (3). Пусть $S_r^* \in f(\Gamma)$, $S_r^* = f(D \cap S_r)$. Заметим, что

$$S_r^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*),$$

и, следовательно, для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$1 \leq \int\limits_{S_r^*} \rho_*(y)\,ds_* \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} \int\limits_{f(S_r\cap B_i)} \rho_*(y) N(y, f, S_r \cap B_i)\,ds_* +$$

$$+ \int\limits_{f(S_r\cap B_*)} \rho_*(y) N(y, f, S_r \cap B_*)\,ds_*. \qquad (17)$$

Согласно леммам 1 и 2, при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ имеем $l_{f(S_r)}(f(B_0)) = 0$ и $l_{f(S_r)}(f(B_*)) = 0$. Тогда из (17) следует, что

$$1 \leq \int\limits_{S_r^*} \rho_*(y)\,ds_* \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{f(S_r\cap B_i)} \rho_*(y) N(y, f, S_r \cap B_i)\,ds_* \qquad (18)$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Рассуждая по отдельности на каждом B_i, $i = 1, 2, \ldots,$ в силу теоремы 3.2.5 [11] получаем

$$\int\limits_{B_i\cap S_r} \rho\,ds = \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*(f(x)) L(x, f)\,ds =$$

$$= \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*(f(x)) \frac{L(x,f)}{\dfrac{ds_*}{ds}} \frac{ds_*}{ds}\,ds \geq \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*(f(x)) \frac{ds_*}{ds}\,ds =$$

$$= \int\limits_{f(B_i\cap S_r)} \rho_*(y)\, N(y, f, S_r \cap B_i)\,ds_* \qquad (19)$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Из (18) и (19) следует, что $\rho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Gamma$.

Замена переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$ (см., например, теорему 3.2.5 [11]), и свойство счетной аддитивности интеграла приводят к оценке

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^2(x)}{K_f(x)}\,dv(x) \leq \int\limits_{f(D)} N(f, D)\rho_*^2(y)\,dv_*(y),$$

что и завершает доказательство.

3. Равностепенная непрерывность семейств нижних Q-отображений. Доказательство основного результата. Следующее простое вспомогательное утверждение не имеет прямого отношения ни к отображениям, ни к римановым многообразиям, однако содержит в себе весьма полезное топологическое свойство, справедливое для произвольных метрических пространств.

Предложение 2. *Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство с метрикой d и F_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — последовательность континуумов в X такая, что*

$$d(F_j) = \sup\limits_{x,y\in F_j} d(x, y) \geq \delta, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $x_0 \in X$ и

$$B(x_0, \delta/4) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < \delta/4\big\}.$$

Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность континуумов C_j такие, что $C_j \subset F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$ и

$$d(C_j) = \sup_{x,y \in C_j} d(x, y) \geq \delta/4, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Если $F_j \cap B(x_0, \delta/4) = \varnothing$, доказывать нечего. Пусть $F_j \cap B(x_0, \delta/4) \neq \varnothing$.

Поскольку F_j — континуум в X, найдутся $x_j, y_j \in F_j$ такие, что $d(F_j) = d(x_j, y_j)$. В силу того, что $d(F_j) \geq \delta$, хотя бы одна из точек x_j или y_j не принадлежит $B(x_0, \delta/4)$, поскольку в противном случае по неравенству треугольника $d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x_0) + d(x_0, y_j) < \delta/2$. Пусть для определенности $x_j \in D \setminus B(x_0, \delta/4)$. Тогда возможны два случая:

Случай 1: $y_j \in B(x_0, \delta/4)$. Пусть C_j — x_j-компонента $F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$. Поскольку F_j связно и $F_j \cap B(x_0, \delta/4) \neq \varnothing$, то $C_j \cap \overline{F_j \setminus C_j} \neq \varnothing$ (см., например, [18], разд. I.5.46). Заметим, что

$$F_j \setminus C_j = \big(F_j \cap B(x_0, \delta/4)\big) \cup \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha, \tag{20}$$

где A — некоторый набор индексов α и $\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ — объединение всех компонент связности $F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$, за исключением C_j. По теореме 1.III.46.5 [18] K_α и C_j являются замкнутыми непересекающимися множествами в $F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$, $\alpha \in A$. В силу (20) соотношение $C_j \cap \cap \overline{F_j \setminus C_j} \neq \varnothing$ возможно тогда и только тогда, когда $C_j \cap \overline{B(x_0, \delta/4)} \neq \varnothing$. Тогда найдется $z_j \in C_j \cap S(x_0, \delta/4)$. По неравенству треугольника

$$\delta \leq d(x_j, y_j) \leq d(x_j, z_j) + d(z_j, y_j) < d(C_j) + \delta/2,$$

откуда следует, что $d(C_j) > \delta/2$, что и требовалось доказать.

Случай 2: $y_j \in D \setminus B(x_0, \delta/4)$. Пусть, как и прежде, C_j — x_j-компонента $F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$ и D_j – y_j-компонента $F_j \setminus B(x_0, \delta/4)$. Рассуждая аналогично изложенному выше, заключаем, что найдутся $z_j \in C_j \cap S(x_0, \delta/4)$ и $z_j' \in D_j \cap S(x_0, \delta/4)$. Тогда по неравенству треугольника

$$\delta \leq d(x_j, y_j) \leq d(x_j, z_j) + d(z_j, z_j') + d(z_j', y_j) \leq d(C_j) + d(D_j) + \delta/2,$$

откуда следует, что либо $d(C_j) \geq \delta/4$, либо $d(D_j) \geq \delta/4$, что и требовалось доказать.

Следующее вспомогательное утверждение несет в себе основную техническую нагрузку, относящуюся к доказательству основного результата работы — теоремы 1.

Лемма 3. *Предположим, что область D_* равномерна и $\overline{D_*}$ — компакт в $\mathbb{M}_*$. Пусть $\delta > 0$ и $f_k : D \to D_* \setminus G_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — семейство открытых в D отображений таких, что $d_*(G_k) = \sup_{x,y \in G_k} d_*(x, y) \geq \delta$, где $G_k \subset D_*$ — некоторый континуум.*

Предположим, что $x_0 \in D$, $x_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, и δ_0 такие, что $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x_0$ и

$$d_*(f_k(x_k), f_k(x_0)) \geq \delta_0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{21}$$

Тогда найдутся $l_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что при некотором $k_0 \geq 1$

$$l(f_k(S(x_0, r))) \geq l_0 \quad \forall r \in (d(x_0, x_k), r_0) \quad \forall k \geq k_0, \tag{22}$$

где l обозначает длину кривой на римановом многообразии $\mathbb{M}_*$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдутся $k_i > i$ и $d(x_0, x_{k_i}) < r_i < 1/i$ такие, что

$$l(f_{k_i}(S(x_0, r_i))) < 1/i, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad r_i \overset{i\to\infty}{\to} 0. \tag{23}$$

Не ограничивая общности можно считать, что последовательность номеров $k_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ является возрастающей. Пусть $\zeta_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ — произвольная последовательность точек из $f_{k_i}(S(x_0, r_i))$. Поскольку $\overline{D_*}$ — компакт в $\mathbb{M}_*$, то без ограничения общности можно считать, что $\zeta_i \overset{i\to\infty}{\to} \zeta_0,\ \zeta_0 \in \overline{D_*}$. Заметим, что $\zeta_i = f_{k_i}(x'_i),\ x'_i \in S(x_0, r_i)$, и

$$G_{k_i} \subset D_* \setminus \overline{f_{k_i}(B(x_0, r_i))}, \tag{24}$$

так как по условию $G_k \subset D_* \setminus f_k(D)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Вследствие того, что при каждом $i \in \mathbb{N}$ отображение f_{k_i} открыто, имеем

$$\partial f_{k_i}(B(x_0, r_i)) \subset f_{k_i}(S(x_0, r_i)). \tag{25}$$

Из предположения (23) следует, что

$$d_*(f_{k_i}(S(x_0, r_i))) \overset{i\to\infty}{\to} 0, \qquad d_*(f_{k_i}(S(x_0, r_i))) := \sup_{p_*, q_* \in f_{k_i}(S(x_0, r_i))} d_*(p_*, q_*).$$

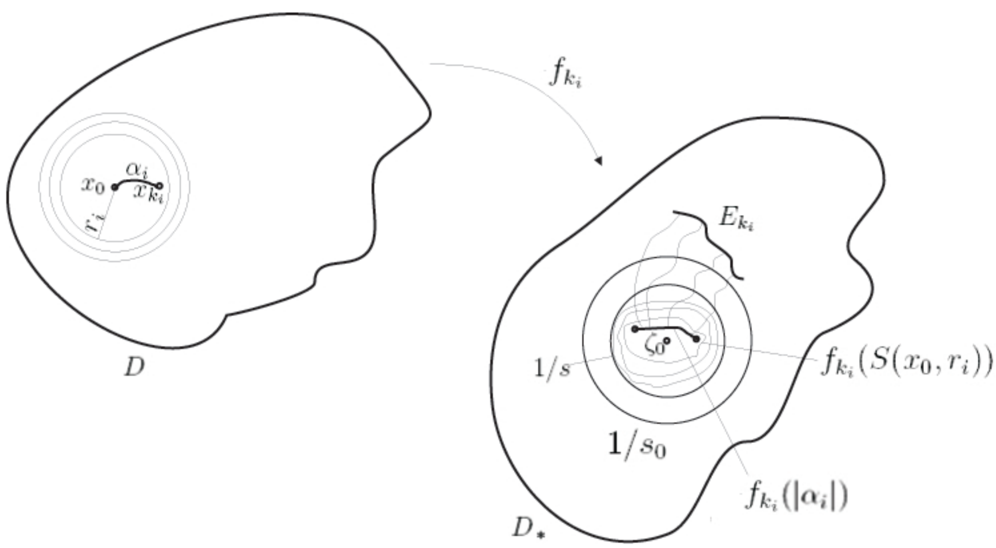
Тогда для каждого $s \in \mathbb{N}$ найдется номер $i_s \in \mathbb{N}$ такой, что

$$f_{k_i}(S(x_0, r_i)) \subset B(\zeta_0, 1/s), \qquad i \geq i_s. \tag{26}$$

По предложению 2 найдутся $s_0 \in \mathbb{N}$ и последовательность континуумов E_{k_i} таких, что

$$E_{k_i} \subset G_{k_i} \setminus B(\zeta_0, 1/s_0), \quad d_*(E_{k_i}) \geq \delta/4, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Зафиксируем $s > s_0$ и рассмотрим семейство кривых $\Gamma(f_{k_i}(S(x_0, r_i)), E_{k_i}, D_*)$ при $i \geq i_s$ (см. рисунок).



Пусть $\gamma \in \Gamma(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*)$, т. е. $\gamma=\gamma(t)$, $t\in(0,1)$, $\gamma(0)\in f_{k_i}(S(x_0,r_i))$, $\gamma(1)\in E_{k_i}$ и $\gamma(t)\in D_*$ при $t\in(0,1)$. В силу (26) и (27) $|\gamma|\cap B(\zeta_0,1/s)\neq\varnothing\neq|\gamma|\cap$ $\cap\,(D_*\setminus B(\zeta_0,1/s))$, поэтому согласно теореме 1.I.5 [18] (§ 46) найдется $t_1\in(0,1)$ такое, что $\gamma(t_1)\in S(\zeta_0,1/s)$. Можно считать, что $\gamma(t)\in D_*\setminus\overline{B(\zeta_0,1/s)}$ при $t>t_1$. Положим $\gamma_1:=\gamma|_{[t_1,1]}$. Снова в силу (26) и (27) $|\gamma_1|\cap B(\zeta_0,1/s_0)\neq\varnothing\neq|\gamma_1|\cap(D_*\setminus B(\zeta_0,1/s_0))$, поэтому согласно теореме 1.I.5 [18] (§ 46) найдется $t_2\in(t_1,1)$ такое, что $\gamma_1(t_2)\in S(\zeta_0,1/s_0)$. Не ограничивая общности можно считать, что $\gamma_1(t)\in B(\zeta_0,1/s_0)$ при $t\in(t_1,t_2)$. Положим $\gamma_2:=\gamma_1|_{[t_1,t_2]}$, $\gamma_2\in\Gamma(S(\zeta_0,1/s),S(\zeta_0,1/s_0),A(\zeta_0,1/s,1/s_0))$, $A(\zeta_0,1/s,1/s_0)=\{x_*\in\mathbb{M}_*:$ $1/s<d_*(x_*,\zeta_0)<1/s_0\}$. Из изложенного следует, что

$$\Gamma(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*)>\Gamma(S(\zeta_0,1/s),S(\zeta_0,1/s_0),A(\zeta_0,1/s,1/s_0)),\qquad i\geq i_s,$$

и, значит, в силу теоремы 1(c) [19] и теоремы 7.5 [12], учитывая, что $\det g_{ij}(x)$ в (1) сколь угодно близок к 1 в нормальных координатах, получаем

$$M(\Gamma(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*))\leq$$

$$\leq M\big(\Gamma(S(\zeta_0,1/s),S(\zeta_0,1/s_0),A(\zeta_0,1/s,1/s_0))\big)\overset{s\to\infty}{\to}0,\quad i\geq i_s. \tag{28}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и для него найдем номер $S=S(\varepsilon)$ такой, что

$$M\big(\Gamma(S(\zeta_0,1/s),S(\zeta_0,1/s_0),A(\zeta_0,1/s,1/s_0))\big)<\varepsilon,\quad s>S(\varepsilon).$$

Положим $I_0=I_0(\varepsilon):=i_{S(\varepsilon)}$. Тогда из (28) следует, что

$$M\big(\Gamma(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*)\big)<\varepsilon,\quad i>I_0=I_0(\varepsilon). \tag{29}$$

Поскольку $\mathbb{M}$ — гладкое многообразие, можем считать, что шары $B(x_0,r_i)$ линейно связны при каждом $i\in\mathbb{N}$. Пусть α_i — кривая, соединяющая x_{k_i} и x_0 в $B(x_0,r_i)$. В силу предположения (21) $d_*(f_{k_i}(|\alpha_i|))\geq\delta_0$. Тогда по определению равномерной области

$$M\big(\Gamma(f_{k_i}(|\alpha_i|),E_{k_i},D_*)\big)>\varepsilon_1\quad\forall i\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

С другой стороны, в силу (24) и (25) $\Gamma\big(f_{k_i}(|\alpha_i|),E_{k_i},D_*\big)>\Gamma\big(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*\big)$, откуда согласно теореме 1(c) [19] и (30)

$$\varepsilon_1<M\big(\Gamma(f_{k_i}(|\alpha_i|),E_{k_i},D_*)\big)\leq M\big(\Gamma(f_{k_i}(S(x_0,r_i)),E_{k_i},D_*)\big). \tag{31}$$

Неравенства (31) и (29) противоречат одно другому, что и доказывает (22).

Пусть $D\subset\mathbb{M}$ и $D_*\subset\mathbb{M}_*$ — фиксированные области. Для заданного $\delta>0$ и измеримой относительно меры v функции $Q\colon\mathbb{M}\to(0,\infty)$, $Q(x)\overset{\mathbb{M}\setminus D}{\equiv}0$, обозначим через $\mathfrak{G}_{Q,\delta}(D)$ семейство всех открытых нижних Q-отображений $f\colon D\to D_*\setminus G_f$ в D таких, что $d_*(G_f)=$ $=\sup_{x,y\in G_f}d_*(x,y)\geq\delta$, где $G_f\subset D_*$ — некоторый континуум.

Лемма 4. *Предположим, что Q удовлетворяет соотношениям* (5) *в D либо $Q\in$ $\in FMO(x_0)$ в каждой точке $x_0\in D$. Если область D_* равномерна и $\overline{D_*}$ — компакт в $\mathbb{M}_*$, то семейство $\mathfrak{G}_{Q,\delta}(D)$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0\in D$.*

Доказательство. Если $Q \in FMO(x_0)$, то, полагая

$$\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\dfrac{1}{t}}, \qquad \eta(t) := \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

и применяя предложение 4.2 из п. 4.10 [14], заключаем, что выполнено (5). Поэтому достаточно установить лемму 4 в случае, когда Q удовлетворяет соотношениям (5) в D.

Предположим противное. Тогда найдутся $x_0 \in D,\ x_k \in D,\ k = 1, 2, \ldots,\ f_k \in \mathfrak{G}_{Q,\delta}(D)$ и δ_0 такие, что $x_k \stackrel{k\to\infty}{\to} x_0$ и

$$d_*\big(f_k(x_k), f_k(x_0)\big) \geq \delta_0. \tag{32}$$

По лемме 3 найдутся $l_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что при некотором $k_0 \geq 1$

$$l\big(f_k(S(x_0, r))\big) \geq l_0 \quad \forall r \in (d(x_0, x_k), r_0) \quad \forall k \geq k_0.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $r_0 < \varepsilon_0$, где ε_0 — число из (5), существующее по условию леммы. Тогда функция

$$\rho(p) = \begin{cases} 1/l_0, & p \in D_*, \\ 0, & p \notin D_*, \end{cases}$$

является допустимой для семейства $\Gamma_k^{r_0}$, состоящего из объединения всех кривых вида $f_k(S(x_0, r))$ по $r \in (d(x_0, x_k), r_0),\ k = 1, 2, \ldots$. В таком случае, по определению модуля семейств кривых,

$$M(\Gamma_k^{r_0}) \leq \big(1/l_0^2\big) v_*(D_*) < \infty, \tag{33}$$

поскольку $\overline{D_*}$ — компакт в $\mathbb{M}_*$. С другой стороны, по лемме 4.2 [14] и в силу условий (5)

$$M\big(\Gamma_k^{r_0}\big) \geq \int\limits_{d(x_0,x_k)}^{r_0} \frac{dr}{\|\,Q\|(r)} \stackrel{k\to\infty}{\to} \infty. \tag{34}$$

Соотношения (33) и (34) противоречат одно другому, что опровергает предположение (32).

***Доказательство теоремы* 1** непосредственно следует из леммы 4 и теоремы 2.

Литература

1. *Севостьянов Е. А., Скворцов С. А.* О локальном поведении классов Орлича – Соболева // Укр. мат. вестн. – 2016. – **13**, № 4. – С. 543 – 569.
2. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича – Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестн. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319 – 342.
3. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева / Под общей ред. В. И. Рязанова. – Киев: Наук. думка, 2013. – 303 с.
4. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. – 2014. – **26**, № 6. – С. 143 – 171.
5. *Ryazanov V., Volkov S.* On the boundary behavior of mappings in the class $W^{1,1}_{\rm loc}$ on Riemann surfaces // Complex Anal. and Oper. Theory. – 2017. – **11**. – P. 1503 – 1520.

6. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. гос. ун-та, 2005. – 272 с.
7. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1955.
8. *Lehto O., Virtanen O.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
9. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
10. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
11. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
12. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
13. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: an introduction to curvature. – New York: Springer, 1997.
14. *Ильютко Д. П., Севостьянов Е. А.* Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях // Мат. сб. – 2016. – **207**, № 4. – С. 65 – 112.
15. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 415 с.
16. *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser. – 2010. – **59**, № 2. – P. 263 – 274.
17. *Севостьянов Е. А.* О локальном поведении открытых дискретных отображений классов Орлича – Соболева // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1259 – 1272.
18. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
19. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171 – 219.

Получено 25.09.18