УДК 517.5

Б. А. Клищук, Р. Р. Салимов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ОБЪЕМА ОБРАЗА ШАРА

We consider ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus in the space $\mathbb{R}^n$ as $p > n$. We obtain a lower bound for the volume of the image of a ball under these mappings. We solve the extremal problems of minimization of functionals of the volume of the image of a ball and the area of the image of a sphere.

Розглядаються кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля у просторі $\mathbb{R}^n$ при $p > n$. Отримано нижню оцінку об'єму образу кулі при таких відображеннях. Розв'язано екстремальні задачі про мінімізацію функціоналів об'єму образу кулі і площі образу сфери.

1. Введение. В конце 20 – начале 21-го столетия произошел переход от отображений с ограниченным искажением по Решетняку (см. [1 – 5]) к изучению так называемых отображений с конечным искажением по Иванцу, характеристики которых уже не являются ограниченными в области задания, а лишь конечными почти всюду [6, 7]. В настоящей статье исследуются отображения, удовлетворяющие определенным верхним модульным оценкам, теория которых применима к отображениям, квазиконформным в среднем [8], отображениям с конечным искажением длины [9] и отображениям с конечным искажением [10 – 13].

Задача об искажении площадей при квазиконформных отображениях берет свое начало в работе Б. Боярского [14]. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [3, 14 – 17]. Впервые верхняя оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева [18]. В монографии [5] (см. предложение 3.7) получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [10, 19, 20] были получены верхние оценки искажения площади круга для кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов. В. А. Кругликовым получена оценка меры образа шара для отображений, квазиконформных в среднем в $\mathbb{R}^n$ (см. лемму 9 в [21]). В данной работе установлены нижние оценки меры образа шара при кольцевых Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $p > n$.

Напомним некоторые определения. Пусть задано семейство Γ кривых γ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Борелевскую функцию $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называют *допустимой* для Γ (пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \geq \ 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \in (1,\infty)$. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \ = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x).$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для произвольных множеств E, F и G в $\mathbb{R}^n$ через $\Delta(E,F,G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ и $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Положим

© Б. А. КЛИЩУК, Р. Р. САЛИМОВ, 2019

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\big\},$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le r\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\big\}, \qquad i = 1, 2.$$

Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$, если соотношение

$$\mathrm{M}_p\big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\big) \le \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p\big(|x - x_0|\big) dm(x)$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1.$$

Пусть ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \displaystyle\int_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — среднее интегральное значение по сфере $S(x_0, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\big\}$, $d\mathcal{A}$ — элемент площади поверхности.

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $q_{x_0}(r) \ne \infty$ для почти всех $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0$*

$$\mathrm{M}_p\big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\big) \le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}},$$

где S_1 и S_2 — сферы $S(x_0, r_1)$ и $S(x_0, r_2)$ (см. теорему 2.3 в [20]).

Отметим, что Q-отображения, допускающие точки ветвления, изучались в работах [9, 22–26].

Следуя работе [2], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) — также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим через $\mathcal{C}_0(A)$ множество непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u\colon A\to\mathbb{R}^1$ таких, что: 1) $u\in\mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x)\geq 1$ для $x\in C$ и 3) u принадлежит классу ACL, и пусть

$$|\nabla u|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $p\geq 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p\mathcal{E}=\operatorname{cap}_p(A,C)=\inf_{u\in\mathcal{W}_0(\mathcal{E})}\int_A|\nabla u|^p dm(x)$$

называют *p-емкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. Известно, что при $p>1$

$$\operatorname{cap}_p\mathcal{E}=\mathrm{M}_p\big(\Delta(\partial A,\partial C;A\setminus C)\big) \tag{1}$$

(см. теорему 1 в [27]). Имеет место неравенство

$$\operatorname{cap}_p\mathcal{E}\geq\frac{\big(\inf\ m_{n-1}\sigma\big)^p}{\big[m(A\backslash C)\big]^{p-1}}, \tag{2}$$

где $m_{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma=\partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

Установленные в работе нижние оценки для меры образа шара обобщают известную лемму Геринга для шара $E=B(x_0,r)$ (см. ниже).

Лемма G. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и E — произвольное измеримое по Борелю множество в D. Предположим, что $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий условию*

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}\leq K\operatorname{cap}_p\mathcal{E}$$

при $p>n$, где $\mathcal{E}=\big(B(x_0,r_2),\overline{B(x_0,r_1)}\big)$, $x_0\in D$, $0<r_1\leq r_2<d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Тогда имеет место оценка

$$m(fE)\geq K^{\frac{n}{n-p}}m(E)$$

(*см. лемму* 7 *в* [28]).

2. Искажение объема шара. В этом пункте приведены нижние оценки меры образа шара для кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p>n$.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0\in D$. Тогда для всех $r\in(0,d_0)$ имеет место оценка*

$$m\big(fB(x_0,r)\big)\geq\Omega_n\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}\left(\int_0^r\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}, \tag{3}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство Пусть $\mathcal{E}=(A,C)$ — конденсатор, где $A=\{x\in D\colon |x-x_0|<t+\Delta t\}$, $C=\{x\in D\colon |x-x_0|\le t\}$. Тогда $f\mathcal{E}=(fA,fC)$ — кольцевой конденсатор в fD и согласно (1) имеем равенство

$$\mathrm{cap}_p\, f\mathcal{E}=\mathrm{M}_p\Big(\Delta\big(\partial fA,\partial fC;f(A\setminus C)\big)\Big).$$

В силу неравенства (2) получаем

$$\mathrm{cap}_p\ f\mathcal{E}\ge\frac{(\inf\ m_{n-1}\sigma)^p}{\big[m(fA\backslash fC)\big]^{p-1}},\tag{4}$$

где $m_{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma=\partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fC и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в fA, а точная нижняя грань берется по всем таким σ. С другой стороны, в силу предложения 1 имеем

$$\mathrm{cap}_p\ f\mathcal{E}\le\frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}.\tag{5}$$

Комбинируя неравенства (4) и (5), получаем

$$\frac{(\inf\ m_{n-1}\sigma)^p}{\big[m(fA\backslash fC)\big]^{p-1}}\le\frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}.$$

Таким образом,

$$\inf\ m_{n-1}\sigma\le\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\big[m(fA\setminus fC)\big]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right]^{\frac{1-p}{p}}.$$

Далее, используя изопериметрическое неравенство

$$\inf\ m_{n-1}\sigma\ge n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\big(m(fC)\big)^{\frac{n-1}{n}},$$

имеем

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}\big(m(fC)\big)^{\frac{n-1}{n}}\le\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{m\,(fA\setminus fC)}{\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.\tag{6}$$

Полагая $\Phi(t):=m(fB(x_0,t))$, из соотношения (6) получаем оценку

$$n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\,\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t)\le\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\dfrac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.\tag{7}$$

Заметим, что в силу предложения 1 и гомеоморфности отображения f

$$\frac{1}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, d_0).$$

Далее, устремляя в неравенстве (7) Δt к 0, а также учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t \in (0, d_0)$ и равенство $\omega_{n-1} = n\Omega_n$, убеждаемся, что для почти всех t существует производная $\Phi'(t)$ и

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \le \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}.$$

Отсюда легко следует неравенство

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \le \left(\frac{\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(t)}{\dfrac{p-n}{n(p-1)}}\right)'. \tag{8}$$

Рассмотрим неравенство (8) при $p > n$. Заметим, что функция $g(t) = \dfrac{\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(t)}{\dfrac{p-n}{n(p-1)}}$ является неубывающей. Интегрируя обе части этого неравенства по $t \in [\varepsilon, r]$ и учитывая, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r} \left(\frac{\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(t)}{\dfrac{p-n}{n(p-1)}}\right)' dt = \int\limits_{\varepsilon}^{r} g'(t)dt \le g(r) - g(\varepsilon) \le \frac{\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(\varepsilon)}{\dfrac{p-n}{n(p-1)}}$$

(см., например, теорему IV. 7.4 в [29]), получаем

$$n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \le \frac{\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(\varepsilon)}{\dfrac{p-n}{n(p-1)}}. \tag{9}$$

Устремляя в неравенстве (9) ε к 0 и учитывая, что $\Phi(0) = 0$, имеем

$$\Phi(r) \ge \Omega_n \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} \left(\int\limits_{0}^{r} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r) = m(fB(x_0, r))$, получаем оценку

$$m\big(fB(x_0, r)\big) \ge \Omega_n \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} \left(\int\limits_{0}^{r} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Теорема 1 доказана.

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию*

$$q_{x_0}(t) \leq q_0\, t^{-\alpha}, \qquad q_0 \in (0,\infty), \qquad \alpha \in [0,\infty), \tag{10}$$

для почти всех $t \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0,d_0)$. Тогда при всех $r \in (0,\varepsilon_0)$ имеет место оценка

$$m\big(fB(x_0,r)\big) \geq \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}}. \tag{11}$$

Доказательство. Воспользовавшись условием (10), оценим правую часть неравенства (3). Затем с помощью элементарных преобразований получим оценку (11).

Полагая в теореме 2 $\alpha = 0$, получаем следующее заключение.

***Следствие* 1.** *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$ и $q_{x_0}(t) \leq q_0$, $0 < q_0 < \infty$, для почти всех $t \in (0,d_0)$. Тогда имеет место оценка*

$$m\big(fB(x_0,r)\big) \geq q_0^{\frac{n}{n-p}}\, \Omega_n r^n$$

для всех $r \in (0,d_0)$.

***Следствие* 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $Q(z) \leq K$, $K \in (0,\infty)$, для почти всех $x \in D$. Тогда имеет место оценка*

$$m\big(fB(x_0,r)\big) \geq K^{\frac{n}{n-p}} m\big(B(x_0,r)\big)$$

для всех $r \in (0,d_0)$.

***Замечание* 1.** Следствие 2 является частным случаем результата Геринга для шара $E = B(x_0,r)$ (см. лемму G).

Следующий результат доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 3. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$. Предположим, что функция $Q\colon D \to [0,\infty]$ удовлетворяет условию*

$$q_{x_0}(t) \leq q_0 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n}, \qquad q_0 \in (0,\infty), k \in (1,\infty),$$

для почти всех $t \in (0,\delta_0)$, $\delta_0 = \min\{1, d(x_0,\partial D)\}$, где $q_{x_0}(t) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}\, t^{n-1}} \displaystyle\int_{S(x_0,t)} Q(x)d\mathcal{A}$ — среднее интегральное значение по сфере $S(x_0,t) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = t\big\}$. Тогда при всех $r \in (0,\delta_0)$ имеет место оценка

$$m\big(fB(x_0,r)\big) \geq \Omega_n \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}} \left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)n(p-1)}{p-n}},$$

где $B(x_0,r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| \leq r\big\}$, Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

3. Искажение площади по Минковскому. Для множества $E \subset \mathbb{R}^n$ зададим верхний $(n-1)$-мерный объем Минковского

$$M^{*\,n-1}(E) = \overline{\lim_{\varepsilon\to+0}}\, \frac{m\{x\colon \operatorname{dist}(x;E)<\varepsilon\}}{2\,\varepsilon}$$

и $(n-1)$-мерный нижний объем Минковского

$$M_*^{n-1}(E) = \underline{\lim_{\varepsilon\to+0}}\, \frac{m\{x\colon \operatorname{dist}(x;E)<\varepsilon\}}{2\,\varepsilon}.$$

В случае, когда верхний и нижний объемы Минковского совпадают, их общее значение называется $(n-1)$-мерным объемом Минковского $M_{n-1}(E)$ (см. [30, с. 294]). Известно, что если $E \subset \mathbb{R}^n$ и $m(\overline{E}) < \infty$, то

$$M_*^{n-1}(\partial E) \geq n\Omega_n^{\frac{1}{n}} \left(m(\overline{E})\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{12}$$

(см. [30, с. 299], п. 3.2.43).

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ∂E — граница множества E, тогда *нижней $(n-1)$-мерной площадью Минковского* границы ∂E будем называть $(n-1)$-мерный нижний объем Минковского.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $p > n$, и $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$. Тогда для всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка*

$$M_*^{n-1}\big(fS(x_0,r)\big) \geq \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}},$$

где ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Применяя изопериметрическое неравенство (12) к оценке (3), приходим к заключению теоремы.

Из теоремы 4 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию*

$$q_{x_0}(t) \leq q_0\, t^{-\alpha}, \qquad q_0 \in (0,\infty), \qquad \alpha \in [0,\infty),$$

для почти всех $t \in (0, d_0)$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка

$$M_*^{n-1}\big(fS(x_0,r)\big) \geq \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, r^{\frac{(n-1)(\alpha+p-n)}{p-n}}.$$

***Следствие* 3.** *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$ и $q_{x_0}(t) \leq q_0$, $0 < q_0 < \infty$, для почти всех $t \in (0, d_0)$. Тогда имеет место оценка*

$$M_*^{n-1}\big(fS(x_0,r)\big) \geq q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, \omega_{n-1}\, r^{n-1}$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

***Следствие* 4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *и* $Q(z) \leq K,\ K \in (0, \infty)$, *для почти всех* $x \in D$. *Тогда имеет место оценка*

$$M_*^{n-1}\big(fS(x_0, r)\big) \geq K^{\frac{n-1}{n-p}} \omega_{n-1} r^{n-1}$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Теорема 6. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}^n$ — *кольцевой* Q-*гомеоморфизм относительно* p-*модуля в точке* $x_0 \in D$ *при* $p > n$. *Предположим, что функция* $Q : D \to [0, \infty]$ *удовлетворяет условию*

$$q_{x_0}(t) \leq q_0 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n}, \qquad q_0 \in (0, \infty), \quad k \in (1, \infty),$$

для почти всех $t \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 = \min\big\{1, d(x_0, \partial D)\big\}$, *где* $q_{x_0}(t) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}\, t^{n-1}} \displaystyle\int_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — *среднее интегральное значение по сфере* $S(x_0, t) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\big\}$. *Тогда при всех* $r \in (0, \delta_0)$ *имеет место оценка*

$$M_*^{n-1}\big(fS(x_0, r)\big) \geq \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)(n-1)(p-1)}{p-n}},$$

где $S(x_0, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\big\}$, ω_{n-1} — *площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

4. Экстремальные задачи для функционалов объема и площади. Положим $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $B_r = B(0, r)$ и $S_r = S(0, r)$ Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция и $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(p, q_0, \alpha)$ — множество всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$ при $p > n$ с условием

$$q(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, t^{n-1}} \int\limits_{S_t} Q(x)\, d\mathcal{A} \leq q_0\, t^{-\alpha}, \qquad q_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in [0, \infty),$$

для почти всех $t \in (0, 1)$.

Рассмотрим на классе $\mathcal{H}_1$ функционал объема $\mathbf{V}_r(f) = m(fB_r)$ и функционал площади по Минковскому $\mathbf{A}_r(f) = M_*^{n-1}(fS_r)$. Докажем теорему о минимизации функционалов $\mathbf{V}_r(f)$ и $\mathbf{A}_r(f)$.

Теорема 7. *Для всех* $r \in [0, 1]$ *справедливы равенства*

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \mathbf{V}_r(f) = \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha + p - n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}},$$

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \mathbf{A}_r(f) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{\alpha + p - n}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, r^{\frac{(n-1)(\alpha+p-n)}{p-n}},$$

где Ω_n — *объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} — *площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из теорем 2 и 5 непосредственно следуют оценки

$$\mathbf{V}_r(f) \geq \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha + p - n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_r(f) \geq \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, r^{\frac{(n-1)(\alpha+p-n)}{p-n}}. \tag{14}$$

Построим гомеоморфизм $f_1 \in \mathcal{H}_1$, на котором реализуются минимумы функционалов $\mathbf{V}_r(f)$ и $\mathbf{A}_r(f)$. Пусть $f_1 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{n-p}} \left(\dfrac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} |x|^{\frac{\alpha+p-n}{p-n}} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что оценки (13) и (14) являются точными и знак равенства в них достигается на отображении f_1. Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с функцией $Q(x) = q_0\,|x|^{-\alpha}$ в точке $x_0 = 0$. Очевидно, что $q_{x_0}(t) = q_0\, t^{-\alpha}$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Заметим, что отображение f_1 преобразует кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\widetilde{\mathbb{A}}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, где

$$\widetilde{r}_i = q_0^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} r_i^{\frac{\alpha+p-n}{p-n}}, \qquad i = 1, 2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$. Тогда p-модуль семейства кривых $f_1\Gamma$ вычисляется в явном виде (см., например, соотношение (2) в [28, с. 177])

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1} \left(\widetilde{r}_2^{\frac{p-n}{p-1}} - \widetilde{r}_1^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Подставляя в предыдущее равенство значения $\widetilde{r}_1$ и $\widetilde{r}_2$, определенные выше, получаем

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1}\, q_0 \left(\frac{\alpha+p-n}{p-1}\right)^{p-1} \left(r_2^{\frac{\alpha+p-n}{p-1}} - r_1^{\frac{\alpha+p-n}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Заметим, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}},$$

где $q_{x_0}(t) = q_0\, t^{-\alpha}$.

Следовательно, в силу предложения 1 гомеоморфизм f_1 является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n$ с функцией $Q(x) = q_0\,|x|^{-\alpha}$ в точке $x_0 = 0$.

Теорема 7 доказана.

Далее, предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию

$$q(t) \leq q_0 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n}, \qquad q_0 \in (0, \infty), \quad k \in (1, \infty), \tag{15}$$

при почти всех $t \in (0, 1)$, и $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(q_0, p, k)$ — множество всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$ при $p > n$ с условием (15).

Теорема 8. *Для всех* $r \in [0,1)$ *справедливы равенства*

$$\min_{f\in\mathcal{H}_2} \mathbf{V}_r(f) = \Omega_n\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)n(p-1)}{p-n}},$$

$$\min_{f\in\mathcal{H}_2} \mathbf{A}_r(f) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)(n-1)(p-1)}{p-n}},$$

где Ω_n *— объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} *— площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из теорем 3 и 6 непосредственно следуют оценки

$$\mathbf{V}_r(f) \geq \Omega_n\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)n(p-1)}{p-n}},$$

$$\mathbf{A}_r(f) \geq \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)(n-1)(p-1)}{p-n}}.$$

Осталось построить гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}_2$, на котором реализуется минимум функционалов $\mathbf{V}_r(f)$ и $\mathbf{A}_r(f)$. Пусть $f_2\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, где

$$f_2(x) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{(k-1)(p-1)}{p-n}}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n$ с $Q(x) = q_0\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{k(p-1)}|x|^{p-n}$ в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Отображение f_2 преобразует кольцо $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$ в кольцо $\widetilde{\mathbb{A}}(0,\widetilde{r_1},\widetilde{r_2})$, где

$$\widetilde{r_i} = q_0^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\ln\frac{1}{r_i}\right)^{-\frac{(k-1)(p-1)}{p-n}}, \qquad i=1,2.$$

Пусть Γ — семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0,r_1)$ и $S(0,r_2)$ в кольце $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$. Тогда p-модуль семейства кривых $f_2\Gamma$ вычисляется следующим образом (см., например, соотношение (2) в [28, с. 177]):

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1}\left(\widetilde{r_2}^{\frac{p-n}{p-1}} - \widetilde{r_1}^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}. \tag{16}$$

Подставляя в (16) значения $\widetilde{r_1}$ и $\widetilde{r_2}$, определенные выше, получаем

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = \omega_{n-1}\, q_0\left(\frac{\left(\ln\frac{1}{r_2}\right)^{-(k-1)} - \left(\ln\frac{1}{r_1}\right)^{-(k-1)}}{k-1}\right)^{1-p}.$$

Заметим, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}},$$

где $q_{x_0}(t) = q_0 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n}$.

Следовательно, в силу предложения 1 гомеоморфизм f_2 является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n$ с $Q(x) = q_0 \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{k(p-1)} |x|^{p-n}$ в точке $x_0 = 0$.

Теорема 8 доказана.

Литература

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
3. *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1983. – **8**, № 2. – P. 257 – 324.
4. *Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Ryazanov V. I., Vuorinen M.* Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2000. – **25**, № 1. – P. 101 – 130.
5. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane // EMS Tracts Math. – 2013. – **19**. – x+205 p.
6. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181 – 188.
7. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
8. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 53 – 64.
9. *Salimov R., Sevost'yanov E.* The Poletskii and Vaisala inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2014. – **59**, № 2. – P. 217 – 231.
10. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. – 2014. – **26**, № 6. – С. 143 – 171.
11. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Граничное поведение классов Орлича – Соболева // Мат. заметки. – 2014. – **95**, № 4. – С. 564 – 576.
12. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 49 – 101.
13. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева. – Киев: Наук. думка, 2013. – 303 с.
14. *Боярский Б. В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**. – С. 661 – 664.
15. *Gehring F. W., Reich E.* Area distortion under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1966. – **388**. – P. 1 – 15.
16. *Astala K.* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. – 1994. – **173**. – P. 37 – 60.
17. *Eremenko A., Hamilton D. H.* On the area distortion by quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – **123**. – P. 2793 – 2797.
18. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Наука, 1962. – 136 с.
19. *Ломако Т. В., Салимов Р. Р.* К теории экстремальных задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 264 – 269.
20. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 6. – С. 920 – 930.

21. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. — **130**, № 2. – С. 185 – 206.
22. *Sevost'yanov E. A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2010. – **55**. – P. 91 – 101.
23. *Sevost'yanov E. A.* Towards a theory of removable singularities for maps with unbounded charasteristic of quasi-conformity // Izv. Math. – 2010. – **74**, № 1. – P. 151 – 165.
24. *Севостьянов Е. А.* Исследование пространственных отображений геометрическим методом. — Киев: Наук. думка, 2014. – 304 с.
25. *Cristea M.* Open discrete mapping having local ACLn inverses // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2010. – **55**. – P. 61 – 90.
26. *Cristea M.* Some properties of open, discrete generalized ring mappings // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2016. – **61**. – P. 623 – 643.
27. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216 – 221.
28. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Adv. Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, New York, 1969): Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
29. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 495 с.
30. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

Получено 12.03.19