УДК 517.9

М. В. Кузнєцов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОРЯДОК СПІВІСНУВАННЯ ГОМОКЛІНІЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ ДЛЯ ВІДОБРАЖЕНЬ ВІДРІЗКА

A nonperiodic trajectory of a discrete dynamical system is called n-homoclinic if its α- and ω-limit sets coincide and form the same cycle of period n. We prove the statement formulated in that the ordering $1 \rhd 3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 2 \cdot 1 \rhd 2 \cdot 3 \rhd$ $\rhd 2 \cdot 5 \rhd \ldots \rhd 2^2 \cdot 1 \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \ldots$ determines the coexistence of homoclinic trajectories of one-dimensional systems: If a one-dimensional dynamical system possesses an n-homoclinic trajectory, then it also has an m-homoclinic trajectory for each m such that $n \rhd m$. It is also proved that every one-dimensional dynamical system with a cycle of period $n \neq 2^i$ also possesses an n-homoclinic trajectory.

Неперіодичну траєкторію дискретної динамічної системи будемо називати n-гомоклінічною, якщо її α- та ω-граничні множини збігаються між собою і є одним і тим самим циклом періоду n. Доведено твердження, що порядок $1 \rhd 3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 2 \cdot 1 \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \ldots \rhd 2^2 \cdot 1 \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \ldots$ визначає співіснування гомоклінічних траєкторій одновимірних систем: якщо одновимірна динамічна система має n-гомоклінічну траєкторію, то вона також матиме m-гомоклінічну траєкторію для кожного m такого, що $n \rhd m$. Також встановлено, що кожна одновимірна динамічна система, яка має цикл періоду $n \neq 2^i$, буде мати n-гомоклінічну траєкторію.

1. Вступ. У цій статті розглядаються динамічні системи з дискретним часом. Якщо X — деякий топологічний простір, траєкторією точки $x_0 \in X$ динамічної системи $(X, \mathbb{Z}_+, f: X \to X)$ будемо називати послідовність $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ таку, що $x_{i+1} = f(x_i)$, $i \geq 0$. Тут $\mathbb{Z}_+$ позначає множину цілих невід'ємних чисел.

Будемо казати, що траєкторія $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ є гомоклінічною до циклу $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, якщо точка x_0 не є періодичною, її ω-гранична множина збігається з $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ та існує деяка послідовність $\{x_{-1}, x_{-2}, \ldots\} \subset X$ така, що $f(x_{-k-1}) = x_{-k}$, $k \geq 0$, і множина всіх часткових границь цієї послідовності збігається з $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Далі розглядаємо $X = I$ — замкнений інтервал і $f \in C^0(I)$.

У випадку одновимірних динамічних систем будемо казати, що гомоклінічна траєкторія є односторонньою, якщо до кожної з точок $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони. Якщо ж хоча б до однієї з точок вона наближається з двох сторін, будемо називати гомоклінічну траєкторію двосторонньою.

Позначимо через $F(m)$ множину всіх неперервних функцій відрізка, які мають цикл періоду m, через $H(m)$ множину всіх неперервних функцій відрізка, що мають односторонню гомоклінічну траєкторію до циклу періоду m або двосторонню до циклу періоду $m/2$.

Нехай $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — скінченна множина точок на інтервалі I та $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n$. Будемо казати, що множина S є відокремленою порядку 1 над f, якщо $n = 2m$, і множини $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ та $S_2 = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n\}$ переставляються відображенням f.

Також кажемо, що множина S є відокремленою порядку r над f, якщо вона є відокремленою порядку 1 над f і множини S_1, S_2 відокремлені порядку $r-1$ над f^2.

Нехай P — цикл функції f, що складається з $2^r m$ точок, де m непарне.

Цикл P називається найпростішим у таких випадках:

(1.1) якщо $r = 0$, $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $f(x_i) = x_{i+1}, f(x_m) = x_1$, то виконується $x_m <$ $< x_{m-2} < \ldots < x_3 < x_1 < x_2 < \ldots < p_{x-1}$ або обернений порядок;

(1.2) якщо $r > 0,\ m > 1,\ P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{2^r},\ P_1$ — найменші m точок, P_2 — наступні m точок і т. д. та кожна множина P_k є періодичною для f^{2^r} і має структуру (1.1) для f^{2^r};

(2) якщо $r > 0$, цикл P відокремлений порядку r над f.

Носієм циклу $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ функції f будемо називати відрізок $\mathrm{supp}_f(P) = [\min_{x \in P} x, \max_{x \in P} x]$.

2. Теорема Блока.

Теорема 1 [4]. *Якщо $f \in C^0(I, I)$ має цикл періоду n, то f також має найпростіший цикл періоду n.*

Для повноти інформації наведемо схему доведення Л. Блока. Позначимо через $F_s(m)$ множину всіх неперервних функцій відрізка, які мають найпростіший цикл періоду m.

Доведення теореми Блока розбивається на 7 кроків.

1. Якщо всі періоди функції f є степенями двійки, то кожна періодична траєкторія f є найпростішою.

Якщо відображення має не найпростіший цикл P, то існують підмножина $\{q_1 < q_2 < \ldots < q_n\} \subset P$ і ціле $r > 0$, яке ділить період циклу $m = 2^k$, таке, що $\{q_1, \ldots, q_n\}$ є періодичною траєкторією для f^r і $f^r(\{q_1, \ldots, q_{n/2}\}) \neq \{q_{n/2+1}, \ldots, q_n\}$. Отже, f^r має точку непарного періоду [2] і всі періоди функції f не можуть бути степенями двійки.

2. Цикл максимального періоду (в сенсі порядку Шарковського) є найпростішим.

Розглянемо періодичну траєкторію періоду $2^r m$ для непарних $m > 1$ і $r > 0$.

Тоді, як відомо (див. [3]), існує деяка вершина I_1 графа Маркова, побудованого на цьому циклі, яка накриває себе, $f(I_1) \subset I_1$, та існує шлях $I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k$ для кожного $k \leq 2^r m$, але немає ребра $I_k \to I_1$ (або існуватимуть петля непарної довжини і періодична точка непарного періоду, що суперечить максимальності $2^r m$). Але тоді всі точки циклу, які знаходяться зліва від I_1, рухаються вправо і навпаки, тому орбіта є відокремленою порядку 1. Кожна половина цього циклу є періодичною траєкторією для f^2 періоду $2^{r-1}m$, і твердження доводиться за індукцією.

3. Якщо $m > 1$ непарне і $f \in F_s(m)$, то $f \in F_s(k)$ для будь-якого непарного $k > m$.

За припущенням існує цикл $p_i,\ 1 < j < m$, такий, що $f(p_i) = p_{i+1}$, для якого виконується $p_m < p_{m-2} < \ldots < p_1 < p_2 < \ldots < p_{m-1}$ або обернений порядок.

Існують нерухома точка $e \in (p_1, p_2)$ і $x \in (e, p_2)$ такі, що $f(x) = p_1$, а також $y \in (p_1, e)$ така, що $f(y) = x$. Нехай $I_1, \ldots, I_{m-1}$ — відрізки, визначені так: $I_1 = [p_1, p_2],\ I_2 = [p_3, p_1],\ I_3 = [p_2, p_4]$ і т. д. Побудуємо новий граф Маркова таким чином: $J_1 = [y, e],\ J_2 = [e, x],\ J_3 = [p_1, y],\ J_4 = [x, p_2]$ і $J_k = I_{k-3}$ для $5 < k < m + 1$. Тоді існує (див. [3]) точка $w \in J_1$, нерухома для f^{m+2}, така, що $f^k(w)$ належать J_{k+1} і утворюють найпростішу періодичну траєкторію періоду $m + 2$. Далі доведення проводиться за індукцією.

4. $F_s(2^r m) \subset F_s(2^r k)$ для будь-якого r.

Ми будемо позначати перші (найлівіші) m точок циклу довжини $2^r m$ як P_1 і т. д.; $P_{(2^r)}$ позначає останні m точок.

За припущенням f переставляє $P_1, P_2, \ldots, P_{(2^r)}$, і для кожного i P_i є найпростішим циклом для $f^{(2^r)}$ періоду m. У кожному P_i можна вибрати x_i та y_i так, щоб доведення кроку 3 можна було провести для $f^{(2^r)}$ і циклу P_i. В результаті отримаємо найпростішу періодичну траєкторію функції f періоду $2^r(m + 2)$.

Знову висновок випливає за індукцією.

5. $F_s(m) \subset F_s(6)$ для непарних $m > 1$.

Нехай цикл $\{p_1, \ldots, p_m\}$ такий, як і раніше. За кроком 2 можна припустити, що $m \geq 9$. Якщо $\{I_k\}$ — граф Маркова, побудований на цьому циклі на другому кроці, то він містить петлю

$$I_{m-6} \to I_{m-5} \to \ldots \to I_{m-1} \to I_{m-6},$$

оскільки є найпростішим. Отже, існує найпростіший цикл періоду 6.

6. $F_s(2^r m) \subset F_s(2^{r+1} \cdot 3)$.

Це випливає з кроку 5 так само, як четвертий крок випливає з третього.

7. $F_s(2^r m) \subset F_s(2^k)$ для довільного k.

За попередніми кроками достатньо розглянути $k = r$. Нехай $\{p_1, \ldots, p_{m2^r}\}$ — найпростіший цикл періоду $2^r m$, $p_i < p_{i+1}$, і

$$I_k{}^* = [p_{(k-1)m+l}, p_{km}], \quad 1 < k < 2^r.$$

Тоді f переставляє відрізки $I_k{}^*$, отже, існують такі відрізки J_k, що (після перенумерування) утворюють петлю довжиною 2^r. Так отримуємо цикл періоду 2^r, який є найпростішим, оскільки цикл $\{p_i\}$ найпростіший.

3. Співіснування гомоклінічних траєкторій. Основним результатом цієї роботи є така теорема.

Теорема 2. *Має місце ланцюжок включень*

$$H(1) \subset H(3) \subset H(5) \subset H(7) \subset \ldots \subset H(2) \subset H(2 \cdot 3) \subset H(2 \cdot 5) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset H(2^2) \subset H(2^2 \cdot 3) \subset H(2^2 \cdot 5) \subset \ldots .$$

Лема 1. $H(1) \subset F(3)$.

Доведення. Нехай $f : I \to I$ — неперервна функція, яка має односторонню гомоклінічну траєкторію $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ до нерухомої точки a; $x_{-n} \to a$, $n \to \infty$, де $x_i = f(x_{i-1})$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Без втрати загальності нехай $x_{-n} \to a+$, $n \to \infty$.

Нехай x_k — така точка, що

$$f(x_k) = \max_{i \in \mathbb{Z}\,:\; f(x_i) > x_i > a} f(x_i).$$

З того, що існують $x_{-n} : a < x_{-n} < x_{-n+1}$, випливає, що таке x_k існує.

Оскільки $x_k > a$, то існує

$$y = f(y) = \max_{t = f(t), t < x_k} (t)$$

— максимальна нерухома точка функції f, що менша за x_k.

Тоді, якщо існує перше таке x_{k+n}, $n \geq 0$, що $x_{k+n} > y$ і $x_{k+n+1} \leq y$, отримаємо підкову, утворену відрізками $[y, x_k]$, $[x_k, x_{k+n}]$. Дійсно, оскільки $x_{k+n+1} < x_{k+n}$, внаслідок максимальності y x_{k+n} не може знаходитись на проміжку (y, x_k), отже,

$$x_{k+n+1} \leq y < x_k < x_{k+n} \leq x_{k+1}.$$

Випадок, коли $x_{k+n} > x_{k+1}$, неможливий, оскільки тоді внаслідок максимальності y повинно виконуватись $x_{k+n-1} < a$, а це суперечить тому, що x_{k+n} — перша з точок, для яких виконуються вищезазначені умови. Як відомо, з існування підкови випливає існування циклу періоду 3.

Якщо ж таке x_{k+n} не існує, тобто всі x_{k+i}, $i \geq 0$, більші за y, то з $x_i \to a$, $i \to \infty$, випливає, що $y = a$, тобто $f(x) > x$ на проміжку (a, x_k). Звідси також випливає, що $x_{k+i} \to a+$, $i \geq 0$, і $f(x) < x$ уздовж деякої прямуючої до a справа послідовності, що приводить до суперечності.

Теорема 3. *$H(m) = F(m)$ для будь-якого непарного $m > 1$.*

Доведення. $H(m) \subset F(m)$, оскільки без циклу періоду m не може існувати гомоклінічна траєкторія до циклу періоду m.

Покажемо, що $F(m) \subset H(m)$.

Нехай неперервна функція $f\colon I \to I$ має найпростіший цикл $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, де $f(p_i) = p_{i+1}$ і $p_m < p_{m-2} < \ldots < p_1 < p_2 < \ldots < p_{m-1}$.

Оскільки $f(p_1) > p_1$ і $f(p_2) < p_2$, то на відрізку $[p_1, p_2]$ існує нерухома точка a функції f.

Позначимо $I_1 = [p_1, a]$, $I_2 = [a, p_2]$, $I_3 = [p_3, p_1]$, $I_4 = [p_2, p_4]$, $\ldots$, $I_{m-1} = [p_{m-3}, p_{m-1}]$, $I_m = [p_m, p_{m-2}]$. Тоді

$f(p_2) < p_1$, $f(a) > p_1$, отже, на I_2 існує така максимальна точка $x_{2,1}$, що $f(x_{2,1}) = p_1$;

$I_2 \subset f(I_1)$, отже, на I_1 існує така точка $x_{1,1}$, що $f(x_{1,1}) = x_{2,1}$;

$I_1 \subset f(I_m)$, отже, на I_m існує така точка $x_{m,1}$, що $f(x_{m,1}) = x_{1,1}$;

$I_m \subset f(i_{m-1})$, отже, на I_{m-1} існує така точка $x_{m-1,1}$, що $f(x_{m-1,1}) = x_{m,1}$, і т. д.;

$I_3 \subset f([x_{2,1}, p_2])$, отже, на $[x_{2,1}, p_2]$ існує така точка $x_{2,2}$, що $f(x_{2,2}) = x_{3,1}$;

$[x_{2,1}, p_2] \subset f([p_1, x_{1,1}])$, отже, на $[p_1, x_{1,1}]$ існує така точка $x_{1,2}$, що $f(x_{1,2}) = x_{2,2}$ і т. д.;

$[x_{k,1}, p_k] \subset f([p_{k-1}, x_{k-1,1}])$, отже, на $[p_{k-1}, x_{k-1,1}]$ існує така точка $x_{k-1,2}$, що $f(x_{k-1,2}) = x_{k,2}$.

Продовжуючи цей процес, отримуємо m монотонних послідовностей $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, таких, що $x_{i,k}$ ближче до p_i, ніж $x_{i,k-1}$.

Внаслідок монотонності кожна з цих послідовностей має границю y_i. З неперервності f випливає, що $f(y_i) = y_{i+1}$, тобто точки y_i утворюють цикл періоду m, для якого можна повторити операцію, аналогічну до циклу P. Але оскільки $y_m \geq p_m$, то

існує така точка $y_{2,1} \in [a, x_{2,1}]$, що $f(y_{2,1}) = y_m$;

існує така точка $y_{1,1} \in [x_{1,1}, a]$, що $f(y_{1,1}) = y_{2,1}$;

існує така точка $y_{m,1} \in [x_{m,1}, p_{m-3}]$, що $f(y_{m,1}) = y_{1,1}$, і т. д.;

існує така точка $y_{2,2} \in [x_{2,1}, x_{2,2}]$, що $f(y_{2,2}) = y_{3,1}$, і т. д.

Кожна точка $y_{i,k}$ буде належати проміжку $[x_{i,k}, x_{i,k-1}]$, тому послідовності $y_{i,k}$ будуть збігатися до y_i. З іншого боку, $f(y_{2,1}) = y_m$, отже, $y_{i,k}$ утворюють гомоклінічну траєкторію. За побудовою ця траєкторія є односторонньою.

***Наслідок* 1.** $H(1) \subset H(3) \subset H(5) \subset H(7) \subset \ldots \subset H(2m+1) \subset \ldots$.

За теоремою Шарковського $F(n) \subset F(n+2)$ для непарних n, отже, для будь-якого непарного $n > 1$ виконується

$$H(n) = F(n) \subset F(n+2) = H(n+2),$$

$$H(1) \subset F(3) = H(3).$$

Лема 2. *$H(2) \supset F(2n+1)$ для будь-якого натурального n.*

Доведення. Нехай функція $f \in C^0(I)$ має найпростіший цикл $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}\}$, де $f(p_i) = p_{i+1}$ і

$$p_{2n+1} < p_{2n-1} < \ldots < p_1 < p_2 < \ldots < p_{2n}.$$

Оскільки $f(p_1) > p_1$ і $f(p_2) < p_2$, то на відрізку $[p_1, p_2]$ існує нерухома точка a функції f. Тоді

$f(p_{2n+1}) < a < f(p_{2n-1})$, отже, на $[p_{2n+1}, p_{2n-1}]$ існує така мінімальна точка x_1, що $f(x_1) = a$;

$f(p_{2n}) < x_1 < f(p_{2n-2})$, отже, на $[p_{2n-2}, p_{2n}]$ існує така мінімальна точка x_2, що $f(x_2) = x_1$;

$f(p_{2n-1}) < x_2 < f(p_{2n-3})$, отже, на $[p_{2n-1}, p_{2n-3}]$ існує така мінімальна точка x_3, що $f(x_3) = x_2$, і т. д.;

$f(p_2) < x_{2n} < f(a)$, отже, на $[a, p_2]$ існує така мінімальна точка $x_{1,1}$, що $f(x_{1,1}) = x_{2n}$;

$f(a) < x_{1,1} < f(p_1)$, отже, на $[p_1, a]$ існує така максимальна точка $x_{2,1}$, що $f(x_{2,1}) = x_{1,1}$;

$f(x_{1,1}) < x_{2,1} < f(a)$, отже, на $[a, x_{1,1}]$ існує така мінімальна точка $x_{1,2}$, що $f(x_{1,2}) = x_{2,1}$;

$f(a) < x_{1,2} < f(x_{2,1})$, отже, на $[x_{2,1}, a]$ існує така максимальна точка $x_{2,2}$, що $f(x_{2,2}) = x_{1,2}$, і т. д.;

$f(x_{1,k}) < x_{2,k} < f(a)$, отже, на $[a, x_{1,k}]$ існує така мінімальна точка $x_{1,k+1}$, що $f(x_{1,k+1}) = x_{2,k}$;

$f(a) < x_{1,k+1} < f(x_{2,k})$, отже, на $[x_{2,k}, a]$ існує така максимальна точка $x_{2,k+1}$, що $f(x_{2,k+1}) = x_{1,k}$.

Якщо обидві монотонні послідовності $\{x_{1,k}\}$, $\{x_{2,k}\}$ прямують до a, вони утворюють двосторонню гомоклінічну траєкторію до нерухомої точки, тобто 2-гомоклінічну траєкторію.

Якщо ж вони прямують до двох різних точок a_1, a_2 відповідно, то з неперервності випливає, що a_1, a_2 є циклом періоду 2. Для точки a_1 можна знайти послідовність прообразів аналогічно тому, як ми в ході доведення цієї леми знаходили її для точки a, причому легко бачити, що дві нові послідовності $\{x'_{1,k}\}$, $\{x'_{2,k}\}$ будуть задовольняти умови $x_{1,k+1} < x'_{1,k} < x_{1,k}$, $x_{2,k} < x'_{2,k} < x_{2,k+1}$, а отже, будуть збігатися до циклу a_1, a_2, утворюючи односторонню гомоклінічну траєкторію до циклу періоду 2.

Теорема 4. *$H(n) = F(n)$ для будь-якого $n = 2^k m$, де $m > 1$ непарне і $k \geq 0$.*

Доведення. Базою індукції по k є твердження теореми 3 $H(n) = F(n)$ для непарних n. Покажемо, як з $H(n) = F(n)$ для $n = 2^{k-1}m$ випливає $H(n) = F(n)$ для $n = 2^k m$.

Нехай маємо деякий найпростіший цикл P періоду $2^k m$, $\tilde{f}$ — функція, що з'єднує відрізками точки цього циклу. За означенням P переставляє два найпростіших цикли P_1, P_2 періоду $2^{k-1}m$ для функції $\tilde{f}^2$. У носіїв кожного з цих циклів за припущенням індукції існує одностороння гомоклінічна траєкторія для функції $\tilde{f}^2$.

Нехай $\{x_i,\ i \geq 0\}$ — одностороння гомоклінічна траєкторія до циклу P'_1 в носії циклу P_1 для функції $\tilde{f}^2$. Оскільки $\operatorname{supp}_{\tilde{f}}\ P_1 \cap \tilde{f}(P_1) = \varnothing$, то P'_1 не може бути циклом періоду $2^{k-1}m$ для функції $\tilde{f}$, тому він є частиною циклу P' періоду $2^k m$ для $\tilde{f}$. За неперервністю $\{x_i,\ \tilde{f}(x_i);\ i \geq 0\}$ є гомоклінічною траєкторією до циклу P'.

Покажемо, що ця гомоклінічна траєкторія є односторонньою. Точки $\{x_i,\ i \geq 0\}$ прямують до P_1 з однієї сторони. Нехай до деякої точки p_j циклу P' гомоклінічна траєкторія прямує з двох сторін.

Тоді для визначеності покладемо $\tilde{f}(p_{j-1}) = p_j$, $x_{i(t)} \to p_{j-1} -$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ на відрізку $[p_{j-1} - \varepsilon, p_{j-1}]$ функція $\tilde{f}$ має нескінченну кількість точок вище за p_j та нескінченну кількість точок нижче за p_j, причому $f(p_{j-1}) = p_j$. Це неможливо для складеної із скінченної кількості відрізків функції $\tilde{f}$, отже, до кожної точки циклу P' гомоклінічна траєкторія прямує з однієї сторони.

У $\tilde{f}$ існує ланцюжок накриттів $I_j = [p_s(j), x_u(j)]$, $j \in \mathbb{Z}$, такий, що $\operatorname{diam} I_j \to 0$, $j \to \pm\infty$, і $\tilde{f}(I_j) \supset I_{j+1}$, $I_j \to \{p_r\}$, $j \to \infty$, $\cup_{i=j}^{j+n} I_j \to P'$, $j \to -\infty$. Тому ланцюжок з такою самою структурою буде існувати і для будь-якої неперервної функції f, що має цикл типу

P. Це доводить існування односторонньої гомоклінічної траєкторії до циклу періоду $2^k m$ для функції f.

Лема 3. $H(2^k) \subset H(2^k m)$ *для будь-якого непарного* $m > 1$.

Доведення. Нехай функція f має гомоклінічну траєкторію типу 2^k. Тоді функція f^{2^k} має односторонню гомоклінічну траєкторію до нерухомої точки, а отже, f^{2^k} має цикли всіх періодів m. Тому f має цикли періодів $2^k m$ для кожного m, звідки

$$H(2^k) \subset F(2^k m) = H(2^k m).$$

Лема 4. $H(2^{k+1}) \supset F(2^k m)$ *для непарних* $m > 1$.

Доведення. Нехай f має цикл періоду $2^k m$, тоді функція f^{2^k} має цикл періоду m, а отже, за лемою 2 $f^{2^k} \in H(2)$. Функція f має гомоклінічну траєкторію до деякого циклу періоду 2^r, $r \leq k+1$, тобто $F(2^k m) \subset H(2) \cup H(4) \cup \ldots \cup H(2^{k+1})$. Але за теоремою 3 $H(2^i) \subset H(2^i m)$, отже, $F(2^k m) \subset H(2^{k+1})$.

Наслідком доведених у цьому пункті тверджень є ланцюжок включень

$$F(1) \supset F(2) \supset F(2^2) \supset \ldots \supset F(2^\infty) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset F(2^2 \cdot 5) = H(2^2 \cdot 5) \supset F(2^2 \cdot 3) = H(2^2 \cdot 3) \supset H(2^2) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset F(2 \cdot 5) = H(2 \cdot 5) \supset F(2 \cdot 3) = H(2 \cdot 3) \supset H(2) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset F(5) = H(5) \supset F(3) = H(3) \supset H(1).$$

Література

1. *Block L.* Homoclinic points of mapping of the interval // Proc. Amer. Math. Soc. – 1978. – **72**, № 3. – P. 131 – 138.
2. *Block L.* Simple periodic orbits of mappings of the interval // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **254**. – P. 391 – 398.
3. *Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L.-S.* Periodic points and topological entropy of one dimensional maps // Lect. Notes Math. – 1980. – **819**. – P. 18 – 34.
4. *Block L., Hart D.* Stratification of the space of unimodal interval maps // Ergodic Theory and Dynam. Systems. – 1983. – **3**. – P. 533 – 539.
5. *Block L., Hart D.* The bifurcation of homoclinic orbits of maps of the interval // Ergodic Theory and Dynam. Systems. – 1982. – **2**. – P. 131 – 138.
6. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* О сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий // V Всесоюз. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений: Сб. ст. – Кишинев, 1979. – С. 174 – 175.
7. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* Устойчивость свойства динамической системы иметь гомоклиническую траекторию // Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-функциональных уравнений: Сб. ст. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 111 – 113.
8. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 61 – 71.

Одержано 23.10.18