УДК 517.5

К. М. Жигалло, Т. В. Жигалло (Східноєвр. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА, ЗАДАНИХ НА ВІДРІЗКУ, ЇХНІМИ БІГАРМОНІЧНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ПУАССОНА

We obtain the exact equality for the upper bounds of deviations of biharmonic Poisson operators on the Hölder classes of functions continuous on the segment $[-1;1]$.

Отримано точну рівність для верхніх меж відхилень бігармонічних операторів Пуассона на класах Гельдера неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій.

1. Постановка задачі та деякі історичні відомості. Нехай $\hat{T}_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\hat{T}_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos k\arccos x$, $k\in\mathbb{N}$, — ортонормована з вагою $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1;1]$ система поліномів Чебишова першого роду. Для кожної неперервної функції f позначимо через $c_k = c_k(f) = \int_{-1}^{1}\dfrac{f(t)\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ послідовність її коефіцієнтів Фур'є по системі $\hat{T}_k(x)$ (див., наприклад, [1]). Тоді $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\hat{T}_k(x)$ називають рядом Фур'є – Чебишова функції f.

Лінійні методи підсумовування рядів та інтегралів Фур'є (методи Фур'є, Фейєра [2, с. 36], Валле Пуссена [3, 4], Абеля – Пуассона [5, 6], бігармонічного інтеграла [7, 8]) мають аналоги у випадку підсумовування рядів Фур'є – Чебишова. Зокрема, аналогом сум Фур'є $S_n(f;x)$ в алгебраїчному випадку є суми Фур'є – Чебишова $S_n(f;T;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\hat{T}_k$, аналогом сум Фейєра $\sigma_n(f;x)$ — суми Фейєра – Чебишова $\sigma_n(f;T;x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;T;x)$, аналогом інтегралів Абеля – Пуассона — оператори Абеля – Пуассона [1] $P_r(f;T;x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k c_k\hat{T}_k(x)$, $0\le r<1$, аналогом же бігармонічних інтегралів Пуассона є бігармонічні оператори Пуассона [9] вигляду

$$B_r(f;T;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-r^2\right)\right) r^k c_k\hat{T}_k(x), \qquad 0\le r<1.$$

Через H^α, як загальноприйнято, будемо позначати клас Гельдера порядку α, $0<\alpha\le 1$, функцій f, що задовольняють умову Ліпшиця

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|^\alpha \qquad \forall x_1,x_2\in[-1;1].$$

Дану роботу присвячено вивченню поведінки величини

$$\mathcal{E}(H^1;B_r;x) = \sup_{f\in H^1}|f(x)-B_r(f;T;x)| \tag{1}$$

у кожній точці x відрізка $[-1;1]$ при $0<r<1$.

Асимптотичні оцінки наближення функцій із класу Гельдера методом підсумовування, що визначається множниками $\eta_k^{(n)} = \dfrac{k\pi}{2n}\mathrm{ctg}\dfrac{k\pi}{2n}$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\ldots,n-1$, встановив С. М. Нікольський [10]. Ним також було досліджено питання щодо наближення функцій із класу H^1 частинними сумами порядку n ряду Фур'є – Чебишова $S_n(f;T;x)$. Пізніше

О. П. Тіман [11] отримав асимптотичні рівності для величин типу (1) у випадку наближення функцій із класу Гельдера порядку $\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, сумами $S_n(f;T;x)$ і $\sigma_n(f;T;x)$. Задачу типу (1) для операторів Абеля – Пуассона на класі $H^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, розв'язано у роботі Ю. І. Русецького [1]. Питанням рівномірного наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними многочленами присвячено роботу І. О. Шевчука [12]. Результати щодо наближення алгебраїчними многочленами деяких функцій і класів функцій у просторах $C,\ L_1$, а також щодо наближення з урахуванням положення точки на відрізку отримано в роботах О. В. Моторної та В. П. Моторного (див., наприклад, [13, 14]). Метою ж даної роботи, як зазначено вище, є знаходження точної рівності величин (1) для бігармонічного оператора Пуассона $B_r(f;T;x)$ на класі H^1 у кожній точці x відрізка $[-1;1]$ при $0 < r < 1$. Зауважимо, що поведінка верхніх меж наближень на класах періодичних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, інтегралами Абеля – Пуассона і бігармонічними інтегралами Пуассона досліджувалася в роботах [15 – 18].

2. Точна рівність для верхніх меж відхилень бігармонічних операторів Пуассона на класах H^1 неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій. Основним результатом даної роботи є таке твердження.

Теорема. *Для кожного* $x \in [-1;1],\ 0 < r < 1$, *має місце рівність*

$$\mathcal{E}(H^1;B_r;x) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi r}\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{(1+r)^2-4rx^2}}{1-r} +$$

$$+\frac{1-r}{2\pi}\left(2(\pi-2\arccos x)x + (1+r)^2\sqrt{1-x^2}\right) +$$

$$+\frac{(1-r)^2}{2\pi r}\left((1-r)^2-2r^2\right)x\,\mathrm{arctg}\frac{2rx\sqrt{1-x^2}}{1+r-2rx^2} +$$

$$+\frac{(1-r)^2}{2\pi}(1+r)\left((1+r)^2-4rx^2\right)\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+r)^2-4rx}. \tag{2}$$

Доведення. В роботі [9] показано, що

$$\mathcal{E}(H^1;B_r;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos y - \cos t|\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(2+(1-r)^2k)r^k\cos kt\cos ky\right). \tag{3}$$

Покладемо

$$K_r^1(t;y) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kt\cos ky, \qquad K_r^2(t;y) = (1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty}kr^k\cos kt\cos ky,$$

тоді співвідношення (3) можна записати так:

$$\mathcal{E}\left(H^1;B_r;x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^y(\cos t-\cos y)\left(K_r^1(t;y)+K_r^2(t;y)\right)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_y^{\pi}(\cos y-\cos t)\left(K_r^1(t;y)+K_r^2(t;y)\right)dt. \tag{4}$$

Розглянемо перший доданок у правій частині (4), використавши при цьому такі позначення:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y (\cos t - \cos y)\left(K_r^1(t;y) + K_r^2(t;y)\right)dt = I_1 - I_2, \tag{5}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^y \cos t K_r^1(t;y)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^y \cos t K_r^2(t;y)dt := \frac{1}{\pi}(I_1^1 + I_1^2), \tag{6}$$

$$I_2 = \frac{\cos y}{\pi}\int\limits_0^y \left(K_r^1(t;y) + K_r^2(t;y)\right)dt := \frac{\cos y}{\pi}(I_2^1 + I_2^2). \tag{7}$$

У роботі [1] показано, що

$$I_1^1 = \sin y + r\cos y\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right) + \sum_{k=2}^{\infty} r^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \tag{8}$$

Для величини I_1^2 очевидно:

$$I_1^2 = \frac{1-r^2}{2}\left(\frac{r\cos y \sin 2y}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} kr^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{9}$$

Із співвідношень (6), (8) і (9) випливає, що

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\left(\sin y + r\cos y\left(y + \frac{\sin 2y}{2}\right) + \frac{1-r^2}{4}r\cos y \sin 2y + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1-r^2}{2}k\right) r^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{10}$$

З рівності (7), оскільки

$$I_2^1 = y + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos ky \sin ky, \qquad I_2^2 = (1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ky \sin ky,$$

випливає

$$I_2 = \frac{\cos y}{\pi}\left(y + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos ky \sin ky + (1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ky \sin ky\right). \tag{11}$$

Об’єднуючи співвідношення (10), (11) і (5), отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y (\cos t - \cos y)\left(K_r^1(t;y) + K_r^2(t;y)\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\sin y + r\cos y\left(y + \frac{\sin 2y}{2}\right) - \right.$$

$$-y\cos y + \frac{1-r^2}{4}r\cos y \sin 2y + \sum_{k=2}^{\infty} r^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right) -$$

$$-2\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos ky \sin ky + \frac{1-r^2}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} kr^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \right.\right.$$

$$+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\Bigg) - 2\cos y \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ky \sin ky\Bigg)\Bigg). \tag{12}$$

Другий доданок із правої частини (4) записуємо у вигляді

$$\frac{1}{\pi}\int_y^{\pi} (\cos y - \cos t)\left(K_r^1(t;y) + K_r^2(t;y)\right) dt = I_3 - I_4, \tag{13}$$

$$I_3 = \frac{\cos y}{\pi}\left(\int_y^{\pi} K_r^1(t;y)dt + \int_y^{\pi} K_r^2(t;y)dt\right) := \frac{\cos y}{\pi}\left(I_3^1 + I_3^2\right), \tag{14}$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi}\left(\int_y^{\pi} \cos t K_r^1(t;y)dt + \int_y^{\pi} \cos t K_r^2(t;y)dt\right) := \frac{1}{\pi}(I_4^1 + I_4^2). \tag{15}$$

Далі маємо

$$I_3^1 = \pi - y - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k}\cos ky \sin ky, \qquad I_3^2 = -\left(1 - r^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ky \sin ky. \tag{16}$$

Для знаходження інтеграла I_4^1 скористаємось оцінкою інтеграла I_4 з роботи [1, с. 142]. Таким чином,

$$I_4^1 = -\sin y + r\cos y\left(\pi - y - \frac{1}{2}\sin 2y\right) -$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} r^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \tag{17}$$

І, насамкінець, для інтеграла I_4^2 отримуємо

$$I_4^2 = \frac{1-r^2}{2}\int_y^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} kr^k \left(\cos(k-1)t + \cos(k+1)t\right)\cos ky dt =$$

$$= -\frac{1-r^2}{2}\left(\frac{r}{2}\cos y \sin 2y + \sum_{k=2}^{\infty} kr^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{18}$$

Зіставляючи співвідношення (13)–(18), можемо записати

$$\int_y^{\pi} (\cos y - \cos t)\left(K_r^1(t;y) + K_r^2(t;y)\right) dt = \cos y\Bigg(\pi - y -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k}\cos ky \sin ky - \left(1 - r^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ky \sin ky\Bigg) + \sin y -$$

$$-r\cos y\left(\pi-y-\frac{1}{2}\sin 2y\right)+\sum_{k=2}^{\infty}r^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)+$$

$$+\frac{1-r^2}{2}\left(\frac{r}{2}\cos y\sin 2y+\sum_{k=2}^{\infty}kr^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{19}$$

Підставляючи (12) і (19) у праву частину (4), отримуємо

$$\pi\mathcal{E}\left(H^1;B_r;x\right)=2\sin y+r\cos y\sin 2y+\cos y(\pi-2y)(1-r)+$$

$$+2\sum_{k=2}^{\infty}r^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)-4\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos ky\sin ky+$$

$$+\frac{1-r^2}{2}r\cos y\sin 2y-2(1-r^2)\cos y\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos ky\sin ky+$$

$$+(1-r^2)\sum_{k=2}^{\infty}kr^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \tag{20}$$

Зауважимо, що для величини $\mathcal{E}\left(H^1;P_r;x\right)$, де P_r — оператори Абеля–Пуассона, при всіх $x\in[-1;1]$ було отримано (див. [1, c. 142]) рівність

$$\pi\mathcal{E}\left(H^1;P_r;x\right)=\frac{1-r^2}{r}\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{(1+r)^2-4rx^2}}{1-r}+$$

$$+(1-r)(\pi-2\arccos x)x+\frac{(1-r)^2}{r}x\,\mathrm{arctg}\,\frac{2rx\sqrt{1-x^2}}{1+r-2rx^2},\qquad 0<r<1. \tag{21}$$

Завершуючи доведення теореми, позначаємо

$$\Omega:=\frac{1-r^2}{2}r\cos y\sin 2y-2(1-r^2)\cos y\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos ky\sin ky+$$

$$+(1-r^2)\sum_{k=2}^{\infty}kr^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \tag{22}$$

Тоді

$$\Omega=(1-r^2)\sum_{k=2}^{\infty}kr^k\cos ky\Delta^2\left(\frac{\sin ky}{k}\right)-\frac{1-r^2}{2}r\cos y\sin 2y+$$

$$+(1-r^2)(1-\cos y)\sum_{k=2}^{\infty}r^k\sin 2ky, \tag{23}$$

де $\Delta^2\left(\dfrac{\sin ky}{k}\right)=\dfrac{\sin(k-1)y}{k-1}-2\dfrac{\sin ky}{k}+\dfrac{\sin(k+1)y}{k+1}$. Використовуючи тотожність

$$\sum_{k=2}^{n}u_k\Delta^2(v_k)=\sum_{k=2}^{n}v_k\Delta^2(u_k)+u_2v_1-u_1v_2+u_nv_{n+1}-u_{n+1}v_n,$$

знаходимо

$$\sum_{k=2}^{\infty} kr^k \cos ky \Delta^2 \left(\frac{\sin ky}{k}\right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin ky}{k} \Delta^2 \left(kr^k \cos ky\right) + 2r^2 \cos 2y \sin y - r \cos y \frac{\sin 2y}{2}, \tag{24}$$

оскільки

$$nr^n \cos ny \frac{\sin(n+1)y}{n+1} - (n+1)r^{n+1} \cos(n+1)y \frac{\sin ny}{n} = o(1).$$

Крім того, неважко переконатися в тому, що

$$\Delta^2 \left(kr^k \cos ky\right) = kr^k \Delta^2 (\cos ky) + kr^k \left(\frac{(1-r)^2}{r} \cos ky \cos y + \right.$$
$$\left. + \frac{1-r^2}{r} \sin ky \sin y\right) - r^k \left(\frac{1-r^2}{r} \cos ky \ \cos y + \frac{1+r^2}{r} \sin ky \sin y\right).$$

Співвідношення (23), з урахуванням останньої рівності та (24), а також того, що $\Delta^2 (\cos ky) = = 2 \cos ky(\cos y - 1)$, записуємо у вигляді

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+r}{2r}(1-r)^2 \left(1 - r - \frac{1+r}{k}\right) r^k \sin 2ky \cos y +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-r)^2}{2r} \left((1+r)^2 - \frac{1+r^2}{k}\right) r^k (1 - \cos 2ky) \sin y. \tag{25}$$

Беручи до уваги формули 1.447(1) та 1.447(2) з [19], $0 < r < 1$, а також 1.448(1) та 1.448(2), з рівності (25) для величини Ω, що визначена за допомогою формули (22), де $y = \arccos x$, отримуємо

$$\Omega = (1+r)(1-r)^3 \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{(1+r)^2 - 4rx^2} + \frac{(1+r)^2}{2}(1-r)^2\sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{1-r} + \frac{1+r-2x^2}{(1+r)^2 - 4rx^2}\right) -$$
$$- \frac{(1+r)^2}{2r}(1-r)^2 x \operatorname{arctg} \frac{2rx\sqrt{1-x^2}}{1+r-2rx^2} -$$
$$- \frac{1+r^2}{2r}(1-r^2)\sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{(1+r)^2 - 4rx^2}}{1-r}. \tag{26}$$

Із рівності (20), враховуючи (21), (22) і (26), отримуємо (2).

Теорему доведено.

Література

1. *Русецкий Ю. И.* О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 1. – С. 136 – 144.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближения: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
3. *Rukasov V. I., Chaichenko S. O.* Approximation of analytic periodic functions by de la Vallee-Poussin sums // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 12. – P. 2006 – 2024.
4. *Rukasov V. I., Chaichenko S. O.* Approximation by de la Vallee-Poussin operators on the classes of functions locally summable on the real axis // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 7. – P. 1126 – 1138.
5. *Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T. V.* Approximation of $(\psi;\beta)$-differentiable functions defined on the real axis by Abel – Poisson operators // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 8. – P. 1297 – 1315.
6. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel – Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 1. – P. 86 – 98.
7. *Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T. V.* Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 5. – P. 769 – 798.
8. *Zhyhallo T. V., Kharkevych Yu. I.* Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 5. – P. 757 – 765.
9. *Zhyhallo T. V.* Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson – Chebyshev integrals // J. Automat. and Inform. Sci. – 2018. – **50**, № 5. – P. 34 – 48.
10. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **27**, № 4. – С. 295 – 318.
11. *Тиман А. Ф.* Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **77**, № 6. – С. 969 – 972.
12. *Шевчук И. А.* К равномерному приближению функций на отрезке // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 1. – С. 36 – 48.
13. *Motornyi V. P., Motornaya O. V.* On asymptotically exact estimates for the approximation of certain classes of functions by algebraic polynomials // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, № 1. – P. 91 – 107.
14. *Motornyi V. P.* Approximation of certain classes of singular integrals by algebraic polynomials // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, № 3. – P. 377 – 394.
15. *Kal'chuk I. V., Kharkevych Yu. I.* Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2018. – **22**, № 1. – P. 23 – 36.
16. *Kharkevych Yu. I., Pozharska K. V.* Asymptotics of approximation of conjugate functions by the Poisson integrals // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2018. – **22**, № 2. – P. 235 – 243.
17. *Hembars'ka S. B., Zhyhallo K. M.* Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 7. – P. 1075 – 1084.
18. *Hrabova U. Z., Kal'chuk I. V., Stepanyuk T. A.* Про наближення бігармонічними інтегралами Пуассона класів $W^r_\beta H^\alpha$ // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 5. – P. 719 – 729.
19. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 21.01.19