УДК 512.542

Наньин Ян, Шуя Чжао* (Школа науки, Цзяннан. ун-т, Китай),
Н. Т. Воробьев** (Витеб. гос. ун-т им. П. М. Машерова, Беларусь)

О ПРОБЛЕМЕ ФРАТТИНИЕВОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ КЛАССОВ ФИТТИНГА

We determine the application of the Frattini duality to the description of multiple local Fitting classes. In particular, we establish a necessary and sufficient condition for the local Fitting class to be a formation.

Знайдено застосування фраттінієвої двоїстості для опису кратно локальних класів Фіттінга. Зокрема, встановлено необхідну і достатню умову, при якій локальний клас Фіттінга є формацією.

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено противное. Напомним, что *класс групп* — множество групп, которое наряду с каждой группой содержит ей изоморфные. Отображение τ множества классов групп во множество классов групп называется *операцией замыкания* (см. [1], II, определение 1.4), если для любых классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{X} \subseteq \tau\mathfrak{X}$; 2) $\tau\mathfrak{X} = \tau(\tau\mathfrak{X})$; 3) если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $\tau\mathfrak{X} \subseteq \tau\mathfrak{Y}$.

В дальнейшем будем использовать общепринятые обозначения операций замыкания: S_n, Q, R_0, N_0 и E_ϕ, которые для класса групп $\mathfrak{X}$ определяются следующим образом:

$$\mathrm{S}_n\mathfrak{X} = (G : G \trianglelefteq \trianglelefteq H \text{ для некоторой группы } H \in \mathfrak{X}),$$

$$\mathrm{Q}\mathfrak{X} = (G : \exists H \in \mathfrak{X} \text{ и эпиморфизм } H \text{на} G),$$

$$\mathrm{R}_0\mathfrak{X} = \Big(G : \exists N_i \trianglelefteq G\,(i = 1, \ldots, r),\, G/N_i \in \mathfrak{X} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{r} N_i = 1\Big),$$

$$\mathrm{N}_0\mathfrak{X} = \big(G : \exists K_i \trianglelefteq \trianglelefteq G\,(i = 1, \ldots, r), K_i \in \mathfrak{X} \text{ и } G = \langle K_1, \ldots, K_r\rangle\big),$$

$$\mathrm{E}_\phi\mathfrak{X} = \big(G : \exists N \trianglelefteq G, N \leq \Phi(G) \text{ и } G/N \in \mathfrak{X}\big), \quad \text{где} \quad \Phi(G) \text{ — подгруппа Фраттини } G.$$

Класс групп $\mathfrak{X}$ называют *τ-замкнутым*, если $\tau\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ одновременно Q-замкнут и R_0-замкнут, то класс $\mathfrak{X}$ называется *формацией*, а в случае, когда $\mathfrak{X}$ одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут, $\mathfrak{X}$ называется *классом Фиттинга*. Формацию $\mathfrak{X}$ называют *насыщенной*, если она E_ϕ-замкнута, т. е. из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ следует $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Отображения $f : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ и $h : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называют *формационной функцией* [1] (IV, 3.1(a)) и *функцией Хартли* или коротко *H-функцией* [2] соответственно.

Символами $\mathrm{Supp}(f)$ и $\mathrm{Supp}(h)$ обозначают соответственно множества $\{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ и $\{p \in \mathbb{P} : h(p) \neq \varnothing\}$, а символами $\mathfrak{E}_\pi$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ — классы всех π-групп ($\pi \subseteq \mathbb{P}$), всех p-групп и всех p'-групп ($p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$).

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — классы групп, то их произведение — класс $\mathfrak{X}\mathfrak{H} = (G : \exists K \in \mathfrak{X} \text{и } G/K \in \mathfrak{X})$.

* Исследования поддержаны НФСО грант Китая (грант № 11301227) и проектом Фонда естественных наук провинции Цзянсу (грант № БК20130119)).

** Исследования поддержаны Государственной программой научных исследований Беларуси „Конвергенция” (2016 – 2020)).

Пусть $LF(f)$ и $LR(h)$ — классы групп $\mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap\limits_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right)$ и $\mathfrak{E}_\sigma \cap \left(\bigcap\limits_{p\in\sigma} h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)$, где $\pi = \mathrm{Supp}(f)$ и $\sigma = \mathrm{Supp}(h)$.

Определение 1.1. *Класс групп* $\mathfrak{F}$ *называется*:

1) *локальной формацией* [1] (IV, 3.1(в)), *если* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *для некоторой формационной функции* f;

2) *локальным классом Фиттинга* [2], *если* $\mathfrak{F} = LR(h)$ *для некоторой* H*-функции* h.

Основополагающим результатом в теории формаций групп является следующая теорема Гашюца – Любезедер – Шмида [3, 4] (см. также [1], IV, теорема 4.6): непустая формация $\mathfrak{F}$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ насыщена. Дальнейшее развитие этот результат получил в работах А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [5, 6], где найдены характеризации частично локальных формаций посредством частичной насыщенности. Однако в [7] (теорема 2.1) было установлено, что получить дуальный аналог теоремы Гашюца – Любездер – Шмида в теории классов Фиттинга посредством применения подгруппы $\Psi(G)$ группы G, двойственной подгруппе Фраттини G, невозможно. Напомним, что подгруппа $\Psi(G)$ была определена Ито [8] и изучалась Гашюцом [9] как подгруппа группы G, порожденная всеми минимальными подгруппами G. В связи с этим для характеризации классов Фиттинга Дерком и Хауком [7, 10] было предложено использовать фраттиниевую двойственность в смысле следующего определения.

Определение 1.2 ([10], определение 2.2, см. также [1], XI, 6). *Пусть* τ — *операция замыкания*, G — *группа и* $\Psi_\tau(G)$ — *наименьшая из нормальных подгрупп* G *такая, что* $\tau(\Psi_\tau(G) \cap \cap M) \supseteq \tau(M)$ *для всех* $M \trianglelefteq \trianglelefteq G$. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *называется* τ*-насыщенным или* E^{Ψ_τ}*-замкнутым, если из условия* $\Psi_\tau(G) \in \mathfrak{F}$ *всегда следует* $G \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что если τ_1 и τ_2 — операции замыкания, то $\tau_1 \le \tau_2$ в том и только в том случае, когда $\tau_1\mathfrak{X} \subseteq \tau_2\mathfrak{X}$ для всех групп класса $\mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называют *разрешимым*, если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — класс Фиттинга всех разрешимых групп.

Дерк и Хоукс [1] сформулировали следующую общую проблему для характеризации τ-насыщенных классов Фиттинга.

Проблема 1.1 [1, с. 829]. *Для данной операции замыкания* τ $(\mathrm{S}_n \le \tau)$ *какие классы Фиттинга в классе* $\mathfrak{S}$ *групп являются* τ*-насыщенными?*

Основная цель настоящей работы — нахождение счетного множества семейств разрешимых классов Фиттинга, для которых $\tau \le \mathrm{S}_n$ и каждый из классов Фиттинга этих семейств является τ-насыщенным. Для решения этой задачи будем использовать идею локализации Хартли [11] и кратной локализации Скибы [12].

Любой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем считать 0-*кратно локальным*, а при натуральном $m > > 0$ класс $\mathfrak{F}$ называется m*-кратно локальным* [2], если он определяется H-функцией f, все значения которой являются $(m-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *тотально локальным*, если он n-кратно локален для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* τ_m — *операция, сопоставляющая каждому классу групп* $\mathfrak{X}$ *пересечение всех тех* m*-кратно локальных классов Фиттинга, содержащих* $\mathfrak{X}$, *которые являются формациями.*

Легко видеть, что τ_m — *операция замыкания и* $\mathrm{S}_n \le \tau_m$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос 1.1 для счетного множества семейств классов Фиттинга и, в частности, классифицирует локальные классы Фиттинга, которые являются формациями.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимый m-кратно локальный класс Фиттинга $(m \geq 1)$ и τ_m — операция замыкания из определения* 1.3. *$\mathfrak{F}$ является формацией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ τ_m-насыщен.*

***Следствие* 1.1.** *Разрешимый локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда он τ_1-насыщен.*

Пусть τ_∞ — операция замыкания, которая сопоставляет каждому классу групп $\mathfrak{X}$ тотально локальный класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{X}$. Как установлено в [2], разрешимый тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ — это в точности класс Фиттинга, замкнутый относительно взятия подгрупп. Кроме того, согласно теореме Брайса – Косси [13], это равносильно тому, что $\mathfrak{F}$ — примитивная насыщенная формация. Поэтому из теоремы 1.1 получаем следующие утверждения.

***Следствие* 1.2.** *Разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является τ_∞-насыщенным в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ тотально локален.*

***Следствие* 1.3** (теорема Дерка – Хаука [7], теорема 2.5)**.** *Разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является τ_∞-насыщенным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — формация, замкнутая относительно взятия подгрупп.*

2. Необходимые сведения. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и τ — операция замыкания. Символом E^{Ψ_τ} будем обозначать класс $(G\colon \exists N \trianglelefteq \trianglelefteq G$ такая, что $\Psi_\tau(G) \leq N \in \mathfrak{X})$ (см. [1], определение XI, 6.10). Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $\tau\{G\}$ будем обозначать просто τG.

Из определения формации (класса Фиттинга) следует, что для любой группы G в G существует наименьшая (наибольшая) нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ $(G_{\mathfrak{F}})$ такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ $(G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F})$. Такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$-корадикалом ($\mathfrak{F}$-радикалом) G соответственно. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G\colon G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ — произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Известно, что произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. [1], теорема IX, 1.12(a), (c)).

Группу G называют *комонолитической*, если она имеет единственную максимальную нормальную подгруппу — *комонолит* G.

Мы неоднократно будем использовать следующие свойства комонолитических групп, полученные в универсуме $\mathfrak{S}$ Дерком [14].

Лемма 2.1 ([14], леммы 1 – 3)**.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если $N \trianglelefteq G$, G/N — комонолитическая группа и S — минимальное субнормальное добавление к N в G, то S — комонолитическая группа*;

2) *если N_1, N_2 — такие нормальные подгруппы группы G, что $N_1N_2 \neq G$, $N_1 \cap N_2 = 1$, G/N_i, $i = 1, 2$, — комонолитическая группа, и S — минимальное субнормальное добавление N_1N_2 в G, то S — такая комонолитическая группа, что $S/S \cap N_i \cong G/N_i$ для $i = 1, 2$. Кроме того, если G/N_1N_2 является p-группой, то $S/(S \cap N_i)(S \cap N_i)$ — нетривиальная циклическая p-группа*;

3) *если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, p — простое число и G_1 — такая группа, что $(G_1)_{\mathfrak{F}}$ — комонолит индекса p в группе G_1 и G_2 — комонолитическая не p-совершенная группа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, то существует комонолитическая группа S со следующими свойствами*:

а) *S имеет такие нормальные подгруппы S_1 и S_2, что $S_1 \cap S_2 = 1$, S_1S_2/S_2 — циклическая нетривиальная p-группа и $S/S_i \cong G_i$ для $i = 1, 2$;*

б) *$S_{\mathfrak{F}}$ — максимальная нормальная подгруппа S индекса p.*

Мы будем использовать также операцию Локетта $*$ из [15].

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то операция $*$ сопоставляет $\mathfrak{F}$ наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ и такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Лемма 2.2 ([16], лемма 5)**.** *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Лемма 2.3 (усиленный вариант квази-R_0-леммы, [1], теорема X, 1.24)**.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\mathfrak{F}$ — класс Локетта*;

2) *для каждой группы G с нормальными подгруппами N_1 и N_2 такими, что G/N_1N_2 — нильпотентная группа, справедливо следующее условие*:

$$G \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow G/N_1 \quad \text{и} \quad G/N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Символом $G \operatorname{wr} H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H. Если $K \leq G$, то обозначим через K^* подгруппу базисной группы $G \operatorname{wr} H$, изоморфную прямому произведению $|H|$ множителей группы K. Символом Z_n будем обозначать циклическую группу порядка n.

Лемма 2.4 ([1], A, 18.11(a))**.** *Если $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$, $W = Z_{p^{n-1}} \operatorname{wr} Z_p$, то W содержит субнормальную подгруппу, изоморфную Z_{p^n}.*

Лемма 2.5 ([1], X, 2.1(a))**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и G — группа. Если $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \operatorname{wr} H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^*$ для всех групп H.*

Лемма 2.6 ([1], лемма A, 18.2)**.** *Пусть $W = G \operatorname{wr} H$. Тогда если $K \trianglelefteq G$, то $K^* \trianglelefteq W$ и $W/K^* \cong (G/K) \operatorname{wr} H$.*

Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то символами $\sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$ обозначают соответственно множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{X}$ и характеристику класса $\mathfrak{X}$ — множество $\{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{X}\}$.

Лемма 2.7. *Если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем функции π, то справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi = \sigma(\mathfrak{F}) = \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ [18] (лемма 2.3);

2) *$LR(f) = LR(f^*)$, где f^* — такая H-функция, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \pi$* [17] (теорема 1).

3. Доказательство теоремы 1.1.

Лемма 3.1. *Для каждого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой комонолитической группы $G \in \mathfrak{F}$ с комонолитом M индекса p в G регулярное сплетение $G \operatorname{wr} Z_p \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G — комонолитическая $\mathfrak{F}$-группа с комонолитом M индекса p в G и $W = G \operatorname{wr} Z_p$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга, то $G \in \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap\limits_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \right)$, где $\pi = \mathrm{Supp}(f)$.

Очевидно, что $O^{p'}(G) \neq 1$. Если $O^{p'}(G) \lneqq G$ и M — комонолит группы G, то $O^{p'}(G) \leq M$ и индекс $|G : M|$ — p'-число, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $G = O^{p'}(G)$ для всех $p \in \pi$ и в силу утверждения 1 леммы 2.7 $W \in \mathfrak{E}_\pi$.

Осталось показать, что $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$.

Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для каждого $p \in \pi$. Согласно утверждению 2 леммы 2.7 и теореме X. 1.8 (a) [7], получаем

$$f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} = f^*(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}.$$

Поэтому без ограничения общности можем предположить, что f — H-функция $\mathfrak{F}$ такая, что $f(p)$ является классом Локетта для каждого $p \in \pi$.

Если $G \in f(p)$, то, очевидно, $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Пусть $G \in f(p)\mathfrak{N}_p \setminus f(p)$. Тогда в силу леммы 2.5 $W_{f(p)} = (G_{f(p)})^*$. Следовательно, по лемме 2.6 $W/W_{f(p)} \cong (G/G_{f(p)}) \operatorname{wr} Z_p$ и $W \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$.

Пусть $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \setminus f(p)\mathfrak{N}_p$. Аналогично, применяя леммы 2.5 и 2.6, получаем $W/W_{f(p)\mathfrak{N}_p} \cong (G/G_{f(p)\mathfrak{N}_p}) \operatorname{wr} Z_p$. Учитывая условие $G = O^{p'}(G) \neq 1$, имеем $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$ и $W \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ — m-кратно локальный класс Фиттинга, который является формацией. Докажем, что $\mathfrak{F}$ τ_m-насыщен. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $\Psi_{\tau_m}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$ и M — любая максимальная нормальная подгруппа G. Покажем, что $\Psi_{\tau_m}(M) \leq \Psi_{\tau_m}(G)$. Пусть $K \trianglelefteq\trianglelefteq M$. Тогда, очевидно, $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Следовательно, $\tau_m K \leq \tau_m(K \cap \Psi_{\tau_m}(G)) = \tau_m(K \cap (M \cap \Psi_{\tau_m}(G)))$. Отсюда следует, что $\Psi_{\tau_m}(M) \leq M \cap \cap \Psi_{\tau_m}(G) \leq \Psi_{\tau_m}(G)$ и поэтому $\Psi_{\tau_m}(M) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по индукции $M \in \mathfrak{F}$ и $M = G_{\mathfrak{F}}$. Итак, группа G комонолитична.

Поскольку $G \in \tau_m G$ и $G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$, то $G_{\mathfrak{F}} \in \tau_m G$ и $\tau_m G_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau_m G$.

Если $\tau_m G_{\mathfrak{F}} = \tau_m G$, то $\tau_m G \subseteq \tau_m \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G.

Пусть $\tau_m G_{\mathfrak{F}} \subsetneqq \tau_m G$. Тогда $G = \Psi_{\tau_m}(G) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ τ_m-насыщен.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{F}$ — τ_m-насыщенный m-кратно локальный класс Фиттинга. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является формацией, т. е. класс $\mathfrak{F}$ одновременно Q-замкнут и R_0-замкнут.

Докажем вначале, что $\mathfrak{F}$ — Q-замкнутый класс Фиттинга.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является Q-замкнутым классом. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{F}$ и $G/K \notin \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной подгруппы K группы G. Тогда в G/K существует такая субнормальная подгруппа H/K, все собственные нормальные подгруппы которой являются $\mathfrak{F}$-группами. Пусть L/K — $\mathfrak{F}$-радикал группы H/K. Согласно выбору G мы можем считать $L = G$. Следовательно, группа G/K комонолитична и ее комонолит $(G/K)_{\mathfrak{F}}$. Вследствие разрешимости G/K индекс $|G/K : (G/K)_{\mathfrak{F}}| = p$, где $p \in \mathbb{P}$. Пусть S — минимальное субнормальное добавление K в G. Тогда из $G \in \mathfrak{F}$ следует $S \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 2.1 группа S комонолитична. Кроме того, $G/K \cong S/S \cap K \notin \mathfrak{F}$. В результате выбора группы G можем считать $S = G$. Следовательно, G — комонолитическая $\mathfrak{F}$-группа. Поскольку $G \in \tau_m G$ и класс Фиттинга $\tau_m G$ является Q-замкнутым, $G/K \in \tau_m G$ и имеет место включение

$$\tau_m(G/K) \subseteq \tau_m G. \tag{3.1}$$

Пусть M — комонолит группы G. Тогда $\tau_n M \subseteq \tau_n G$. Предположим, что справедливо равенство

$$\tau_n M = \tau_n G. \tag{3.2}$$

Пусть $\overline{G} = G/K$. Очевидно, группа $\overline{G}$ комонолитична и $\overline{G}_{\mathfrak{F}}$ — ее комонолит, причем индекс $|\overline{G} : \overline{G}_{\mathfrak{F}}| = p$ для некоторого простого p. Кроме того, G — комонолитическая не p-совершенная $\mathfrak{F}$-группа. Следовательно, по утверждению 3 леммы 2.1 существует комонолитическая группа R со свойствами:

а) R имеет такие нормальные подгруппы R_1 и R_2, что $R_1 \cap R_2 = 1$, R/R_1R_2 — циклическая нетривиальная p-группа, $R/R_1 \cong G$, $R/R_2 \cong \overline{G}$ и $R_{\mathfrak{F}}/R_1 \cong M$, $R_{\mathfrak{F}}/R_1 \cong \overline{G}_{\mathfrak{F}}$;

б) $R_{\mathfrak{F}}$ — максимальная нормальная подгруппа индекса p в группе R.

Тогда $R/R_1 \in \tau_m G$ и, согласно (3.1), $R/R_2 \in \tau_m G$.

С другой стороны, учитывая свойство а), заключаем, что G — гомоморфный образ группы R. Следовательно, $G \in \mathrm{Q}(\tau_m R) = \tau_m R$ и $\tau_m G \subseteq \tau_m R$. Итак, справедливо равенство $\tau_m R = \tau_m G$. Рассуждая аналогично, из $M \in \mathrm{Q}R_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{Q}(\tau_m R_{\mathfrak{F}}) = \tau_m R_{\mathfrak{F}}$ получаем $\tau_m M \subseteq \tau_m R_{\mathfrak{F}}$. Теперь, согласно предположению (3.2), имеем $\tau_m G = \tau_m M \subseteq \tau_m R_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau_m R = \tau_m G$. Следовательно, $\tau_m R_{\mathfrak{F}} = \tau_m R$ и $\Psi_{\tau_m}(R) \leq R_{\mathfrak{F}}$. Значит, $\Psi_{\tau_m}(R) \in \mathfrak{F}$. Поскольку класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ τ_m-насыщен, то $R \in \mathfrak{F}$, что противоречит свойству б). Это доказывает, что равенство (3.2) невозможно. Следовательно, справедливо включение

$$\tau_n M \subsetneqq \tau_n(G). \tag{3.3}$$

Пусть $W = G \,\mathrm{wr}\, Z_p$. Тогда $M^* = M \times \ldots \times M$ — подгруппа базисной группы G^* группы W. Заметим, что в данном случае $M = G_{\tau_m M}$ является максимальной нормальной подгруппой индекса p в G. Так как $M \trianglelefteq G$, то по лемме 2.6 $W/M^* \cong (G/M) \,\mathrm{wr}\, Z_p$. Следовательно, $W/M^* \cong Z_p \,\mathrm{wr}\, Z_p$. Теперь, применяя лемму 2.4, заключаем, что сплетение $Z_p \,\mathrm{wr}\, Z_p$ имеет циклическую подгруппу Z_{p^2} такую, что пересечение базисной группы $Z_p \,\mathrm{wr}\, Z_p$ с Z_{p^2} является циклической группой порядка p. Пусть $\overline{Z}_{p^2}$ — полный прообраз Z_{p^2} в W. Поскольку $W/M^* \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$, то $\overline{Z}_{p^2} \trianglelefteq \trianglelefteq W$. Кроме того, в силу изоморфизма $W/M^* \cong Z_p \,\mathrm{wr}\, Z_p$ следует, что $\overline{Z}_{p^2}/M^* \cong Z_{p^2}$ и $(\overline{Z}_{p^2} \cap G^*)/M^*$ является подгруппой порядка p группы $\overline{Z}_{p^2}/M^*$. Так как $G \in \tau_m G$ и $\tau_m G$ — локальный класс Фиттинга, то по лемме 2.5 $W \in \tau_m G$. Теперь, учитывая $\overline{Z}_{p^2} \trianglelefteq \trianglelefteq W$, получаем $\overline{Z}_{p^2} \in \tau_m G$. Следовательно, $\tau_m \overline{Z}_{p^2} \subseteq \tau_n G$.

С другой стороны, по лемме 2.2 из локальности класса $\tau_m \overline{Z}_{p^2}$ следует, что $\tau_m \overline{Z}_{p^2}$ является классом Локетта. Так как $\overline{Z}_{p^2} \nsubseteq G^*$, то, применяя лемму 2.5, получаем $W \in \tau_m \overline{Z}_{p^2}$. Следовательно, группа $G \in \tau_m \overline{Z}_{p^2}$ и справедливо включение $\tau_m G \subseteq \tau_m \overline{Z}_{p^2}$. Таким образом, доказано равенство

$$\tau_m \overline{Z}_{p^2} = \tau_m G. \tag{3.4}$$

Как уже установлено выше, $W \in \tau_m G$, и поэтому $\tau_m W \subseteq \tau_m G$. Поскольку $\overline{Z}_{p^2} \trianglelefteq \trianglelefteq W$, то $\tau_m \overline{Z}_{p^2} \subseteq \tau_m W$. Теперь, учитывая (3.4), получаем равенство

$$\tau_m \overline{Z}_{p^2} = \tau_m W. \tag{3.5}$$

Пусть F — минимальное субнормальное добавление M^* в группе $\overline{Z}_{p^2}$. Тогда $\tau_m F \subseteq \tau_m \overline{Z}_{p^2}$. Предположим, что $F \subseteq G^*$. В этом случае $\overline{Z}_{p^2} \subseteq G^*$, что невозможно, так как $(\overline{Z}_{p^2} \cap G^*)/M^*$ — подгруппа порядка p в $\overline{Z}_{p^2}/M$. Следовательно, $F \nleq G^*$. Поскольку класс $\tau_m F$ локален, то по лемме 2.2 $\tau_m F$ — класс Локетта. Следовательно, по лемме 2.5 $W \in \tau_m F$. Поэтому, учитывая (3.5), имеем включение $\tau_m \overline{Z}_{p^2} \subseteq \tau_m F$. Таким образом, справедливы равенства

$$\tau_m F = \tau_m \overline{Z}_{p^2} = \tau_m G. \tag{3.6}$$

Поскольку $\overline{Z}_{p^2}/M^*$ — комонолитическая группа, то по утверждению 1 леммы 2.1 добавление F в M^* также является комонолитической группой. Заметим, что вследствие изоморфизма $F/F \cap M^* \cong \overline{Z}_{p^2}/M^*$ группа $F/F \cap M^*$ является циклической порядка p^2 и $F \cap G^*$ — максимальная нормальная подгруппа F.

Далее покажем справедливость равенства

$$\tau_m F = \tau_m(F \cap G^*). \tag{3.7}$$

Пусть $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} \nleq G^*$. Так как по лемме 2.2 $\tau_m(F \cap G^*)$ является классом Локетта, то по лемме 2.5 $W \in \tau_m(F \cap G^*)$. Поскольку $\overline{Z}_{p^2} \trianglelefteq\trianglelefteq W$, то $\overline{Z}_{p^2} \in \tau_m(F \cap G^*)$. Теперь из $F \trianglelefteq\trianglelefteq \overline{Z}_{p^2}$ получаем $F \in \tau_m(F \cap G^*)$ и, значит, $\tau_m F \subseteq \tau_m(F \cap G^*)$. Так как обратное включение очевидно, равенство (3.7) в данном случае справедливо.

Предположим, что $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} \leq G^*$. Если $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} = G^*$, то получаем противоречие с тем, что $G^* \nleq \overline{Z}_{p^2}$. Следовательно, $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} \leq (G^*)_{\tau_m M} = M^* < G$.

Заметим, что к указанному соотношению приводят те соображения, что по лемме 2.2 радикалы прямых произведений групп для локальных классов Фиттинга совпадают с прямыми произведениями радикалов этих групп для этих классов, и поэтому между радикалами групп G и G^* существует взаимно однозначное соответствие.

Но $F \cap G^* \nleq M^*$, и поэтому случай $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} \leq M^*$ невозможен.

Таким образом, остается признать, что $(\overline{Z}_{p^2})_{\tau_m(F\cap G^*)} \nleq G^*$ и равенство (3.7) доказано. Применяя теперь равенство (3.5), имеем $\Psi_{\tau_m}(F) \leq F \cap G^* \in \mathfrak{F}$. Следовательно, с учетом τ_m-насыщенности $\mathfrak{F}$ получаем $F \in \mathfrak{F}$.

Теперь, согласно (3.6), заменим в равенстве (3.1) $\tau_m G$ на $\tau_m F$, равенство (3.2) на равенство (3.7) и, проведя для групп $\overline{G}$ и F рассуждения, аналогичные рассуждениям для групп $\overline{G}$ и G, построим, применив утверждение 3 леммы 2.1, комонолитическую группу $\widetilde{R}$, которая не является $\mathfrak{F}$-группой. Но $\Psi_{\tau_m}(\widetilde{R}) \in \mathfrak{F}$ и вследствие τ_m-насыщенности $\mathfrak{F}$ имеем $\widetilde{R} \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство Q-замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Докажем, что $\mathfrak{F}$ — R_0-замкнутый класс Фиттинга.

Пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда в G найдутся такие нормальные подгруппы K_1 и K_2, что $K_1 \cap K_2 = 1$, $G/K_i \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$.

Пусть $K_1K_2 < G$. Покажем, что в этом случае группа G комонолитична с комонолитом $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p. Пусть L/K_1 — максимальная нормальная погруппа группы G/K_1. Тогда $L/K_1 \in \mathfrak{F}$. Кроме того, вследствие изоморфизма $L/L \cap K_2 \cong LK_2/K_2$, группа $L/L \cap K_2 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по индукции $L/K_1 \cap L \cap K_2 = L \in \mathfrak{F}$. Если в G/K_1 существует другая максимальная нормальная подгруппа L_1/K_1, то, рассуждая аналогично, получаем $L_1 \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G = L_1L_2 \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает, что группа G/K_1 комонолитична. Аналогично заключаем, что G/K_2 — комонолитическая группа.

Пусть H — минимальное субнормальное добавление K_1K_2 в G. Поскольку группа G/K_i, $i = 1, 2$, комонолитична, то по утверждению 2 леммы 2.1 следует комонолитичность группы H и $H/H \cap K_i \cong G/K_i$. Поскольку $|K_1K_2| < |G|$ и $K_1K_2/K_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, по индукции $K_1K_2/K_i \in \mathfrak{F}$. Но тогда из условия $G \notin \mathfrak{F}$ следует $H \notin \mathfrak{F}$. Так как $H/H \cap K_i \in \mathfrak{F}$, учитывая минимальность выбора группы G, получаем $H = G$ и G — комонолитическая группа с комонолитом $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p в G.

Теперь из утверждения 3 леммы 2.1 для комонолитических групп G/K_1 и G/K_2 следует существование комонолитической группы M с двумя максимальными нормальными подгруппами M_1 и M_2 такими, что $M_1 \cap M_2 = 1,\ M/M_1M_2$ — нетривиальная циклическая p-группа и $M/M_i \cong G/K_i$ для $i = 1, 2$. Так как $G/K_i \in \mathfrak{F}$, то по квази-R_0-лемме (см. [1], теорема IX, 1.13) $M \in \mathfrak{F}$. Учитывая лемму 2.2, заключаем, что $\tau_m M$ — класс Локетта. Следовательно, по лемме 2.3 (усиленный вариант квази-R_0-леммы) получаем $G/K_i \cong M/M_i \in \tau_m M,\ i = 1, 2$. Поскольку $G \in \tau_m M$, имеет место включение

$$\tau_m G \subseteq \tau_m M. \tag{3.8}$$

Таким образом, мы установили, что G — комонолитическая группа с комонолитом $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p в G и M — комонолитическая $\mathfrak{F}$-группа.

Далее следуя доказательству Q-замкнутости класса $\mathfrak{F}$, путем очевидных изменений и замен (3.1) на (3.8) и групп $\overline{G}$ на G, G на M приходим к противоречию с τ_m-насыщенностью класса $\mathfrak{F}$.

Предположим, что $G = K_1K_2$. В данном случае $K_2 \cong G/K_1$ и $K_2 \cong G/K_2$. Следовательно, $G = G/K_1 \cap K_2 \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Литература

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. *Воробьев Н. Т.* О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 6. – С. 1296 – 1302.
3. *Gaschütz W., Lubeseder U.* Kennzeichnung gesättigter Formationen // Math. Z. – 1963. – **82**, № 3. – S. 198 – 199.
4. *Schmid P.* Every saturated formation is a local formation // J. Algebra. – 1978. – **51**, № 1. – P. 144 – 148.
5. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. – 1999. – **2**, № 2. – С. 114 – 147.
6. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 783 – 797.
7. *Doerk K., Hauck P.* Frattini duale und Fitting klassen endlicher auflösbarer Gruppen // J. Algebra. – 1981. – **69**, № 2. – P. 402 – 415.
8. *Ito N.* Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung // Nagoja Math. J. – 1955. – № 9. – P. 123 – 127.
9. *Gaschütz W.* Über das Frattinidual // Arch. Math. – 1965. – **16**, № 1. – S. 1 – 2.
10. *Doerk K., Hauck P.* Über Frattiniduale in endlichen Gruppen // Arch. Math. – 1980. – **35**, № 1. – S. 218 – 227.
11. *Hartley B.* On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. – 1969. – **3**, № 2. – P. 193 – 207.
12. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
13. *Bryce R. A., Cossey J.* Subgroup Fitting classes // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1982. – **91**, № 2. – P. 225 – 258.
14. *Doerk K.* Über den Rand einer Fittingklasse auflösbarer Gruppen // J. Algebra. – 1978. – **51**, № 2. – P. 619 – 630.
15. *Lockett P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. – 1974. – **137**, № 2. – S. 131 – 136.
16. *Воробьев Н. Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 2. – С. 91 – 94.
17. *Воробьев Н. Т.* О максимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. – 1992. – № 7. – С. 60 – 69.
18. *Guo W., Liu Xi, Li Baojun.* On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble group // Algebra and Discrete Math. – 2006. – № 3. – P. 49 – 54.

Получено 04.12.18