УДК 517.927

О. Б. Пелехата, Н. В. Рева (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We establish sufficient conditions for the sequence of solutions of general boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of any order on a finite interval to be convergent in the uniform norm.

Знайдено достатні умови збіжності послідовності розв'язків загальних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку у рівномірній нормі на скінченному інтервалі.

1. Вступ. Граничні теореми для розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь виникають у багатьох задачах сучасного аналізу і його застосувань. Становлення і розвиток цього наукового напрямку пов'язані з фундаментальними результатами відомих математиків. Так, Й. І. Гіхман [1], а пізніше М. А. Красносельський і С. Г. Крейн [2], Я. Курцвейль і З. Ворел [3], А. М. Самойленко [4, 5] довели ряд теорем про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь і їх систем від параметра. Частина цих теорем пов'язана з обґрунтуванням відомого принципу усереднення М. М. Боголюбова в нелінійній механіці та характеризується спільною точкою зору на лінійний і нелінійний випадки.

Для лінійних задач Коші ці результати посилювалися та уточнювалися в роботах [7 – 11]. Більш складний випадок лінійних крайових задач досліджував І. Т. Кігурадзе [6]. Ці результати отримали подальший розвиток у роботах [12 – 14].

Метою даної роботи є знаходження достатніх умов збіжності єдиних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку. При цьому автори орієнтувалися на пошук конструктивних умов, які б забезпечили рівномірну збіжність послідовності розв'язків до розв'язку граничної крайової задачі.

2. Постановка задачі. Розглянемо на скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ систему $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \in \mathbb{N}$

$$y^{(r)}(t,0) + A_{r-1}(t,0)y^{(r-1)}(t,0) + \ldots + A_0(t,0)y(t,0) = f(t,0) \qquad (1)$$

із неоднорідними крайовими умовами

$$B_j(0)y(\cdot,0) = c_j(0), \quad j \in \{1,2,\ldots,r\} =: [r], \qquad (2)$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j(0)\colon C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m, \qquad j \in [r].$$

Припускається, що матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,0)$ належать $L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot,0)$ належить $L([a,b];\mathbb{C}^m)$, а вектори $c_j(0)$ належать $\mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) будемо розуміти вектор-функцію $y(\cdot,0) \in W_1^r([a,b];\mathbb{C}^m)$, яка абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ разом зі своїми похідними до порядку $r-1$ і задовольняє векторне рівняння (1) майже скрізь.

Неоднорідні крайові умови (2) коректно визначені на розв'язках системи (1) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Крайова задача (1), (2) є фредгольмовою з нульовим індексом [16]. Тому для однозначної скрізь розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача мала лише тривіальний розв'язок.

Нехай поряд із задачею (1), (2) задано послідовність неоднорідних крайових задач

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{3}$$

із крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \tag{4}$$

де $j \in [r]$, $n \in \mathbb{N}$, матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n)$, оператори $B_j(n)$, вектор-функції $f(\cdot,n)$ і вектори $c_j(n)$ задовольняють наведені вище умови для задачі (1), (2).

Нехай відомо, що розв'язки задачі (1), (2) однозначно визначені. Тоді цікавими є такі задачі: при яких умовах на ліві частини задач (3), (4) їхні розв'язки $y(\cdot,n)$ існують і єдині при достатньо великих $n \in \mathbb{N}$;

які додаткові умови на ліві і праві частини задач (3), (4) гарантують, що

$$\left\| y^{(j-1)}(\cdot,0) - y^{(j-1)}(\cdot,n) \right\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \quad j \in [r], \tag{5}$$

де $\|\cdot\|_\infty$ — $\sup$-норма на відрізку $[a,b]$.

Уперше ці питання дослідив І. Т. Кігурадзе [6] для випадку $r = 1$. При цьому припускалося, що всі функції в задачах є дійснозначними.

3. Формулювання результатів. Далі вважатимемо, що $j \in [r]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Введемо деякі позначення:

$$R_{A_{j-1}}(\cdot,n) := A_{j-1}(\cdot,0) - A_{j-1}(\cdot,n) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$F(\cdot,n) := \begin{bmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$R_F(\cdot,n) := F(\cdot,0) - F(\cdot,n),$$

$$R_F^\vee(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds, \qquad R_{A_{j-1}}^\vee(t,n) := \int_a^t R_{A_{j-1}}(s,n)ds,$$

де $\|\cdot\|_1$ — норма у просторі Лебега вектор(матриць)-функцій на відрізку $[a,b]$.

Для випадку $r = 1$ в роботі [6] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай*:

(0) *однорідна крайова задача* (1), (2) *має лише тривіальний розв'язок*;

(I) $\|R_{A_{j-1}}^\vee(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(II) $\|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 = O(1)$;

(III) $B_j(n)y \to B_j(0)y$ *для кожного* $y(\cdot) \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n *задача* (3), (4) *має єдиний розв'язок.*

Якщо, крім того, виконано такі умови на праві частини задач:

(IV) $c_j(n) \to c_j(0)$;

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$,

то єдині розв'язки задач (1), (2) *і* (3), (4) *задовольняють граничну рівність* (5).

Приклади показують, що в теоремі І. Т. Кігурадзе всі умови є суттєвими і жодну з них не можна відкинути. Однак частину умов можна послабити. Зокрема, в роботі [12] для випадку $r=1$ доведено таку теорему.

Теорема 2. *У теоремі* 1 *умову* (II) *можна замінити на слабшу*

(II)$'$ $\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0$,

якщо виконано додаткову умову

(VI) $\|F(\cdot,n)\|_1 = O(1)$.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 3. *У формулюванні теореми* 2 *умову* (VI) *можна замінити на умову*

(VI)$'$ $\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0$.

Ця теорема доповнює теорему 1 і узагальнює теорему 2.

З нерівностей

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \le \|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty\,\|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1,$$

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \le \|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty\,\|R_F(\cdot,n)\|_1$$

випливає, що умови (II)$'$ і (VI)$'$ виконано, якщо

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \cdot \|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0,$$

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \cdot \|R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0.$$

Останні умови завідомо виконано, якщо $\|A_{j-1}(\cdot,n)\|_1 = O(1),\ j \in [r-1],\ \ \|R_F(\cdot,n)\|_1 = O(1)$.

4. Доведення теореми 3. Спочатку розглянемо випадок $r=1$. У цьому випадку крайові задачі (1), (2) і (3), (4) мають вигляд

$$y'(t,n) + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n), \qquad B_1(n)y(\cdot,n) = c_1(n), \tag{6}$$

де $n \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$. Накладені на задачі (6) умови запишемо у вигляді

(I) $\|R_{A_0}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(II)$'$ $\|R_{A_0}^{\vee}(\cdot,n)R_{A_0}(\cdot,n)\|_1 \to 0$;

(III) $B_1(n)y \to B_1(0)y$ для кожного $y(\cdot) \in C([a,b];\mathbb{C}^m)$;

(IV) $c_1(n) \to c_1(0)$;

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(VI)$'$ $\|R_{A_0}^{\vee}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0$.

Справедливість першого твердження теореми 3 випливає з теореми 2. Тому достатньо довести друге твердження.

Поряд із вихідними неоднорідними крайовими задачами (6) відносно вектор-функцій $y(\cdot,n)$ розглянемо ще три векторні напіводнорідні послідовності задач:

$$z'(t,n) + A_0(t,n)z(t,n) = 0, \qquad B_1(n)z(\cdot,n) = c_1(n), \tag{7}$$

$$x'(t,n) + A_0(t,n)x(t,n) = f(t,n), \qquad x(a,n) = 0, \tag{8}$$

$$w'(t,n) + A_0(t,n)w(t,n) = f(t,n), \qquad B_1(n)w(\cdot,n) = 0. \tag{9}$$

Як відомо, крайова задача (8) (задача Коші) має єдиний розв'язок. Із першої частини теореми 2 випливає, що задачі (7) і (9) для достатньо великих n мають єдині розв'язки. При $n = 0$ цей факт випливає з припущення (0) і фредгольмовості з нульовим індексом розглядуваних задач. Звідси випливає, що

$$y(\cdot, n) = z(\cdot, n) + w(\cdot, n) \quad \text{при} \quad n \gg 1.$$

Тому для доведення теореми 3 достатньо показати, що при її умовах

$$\|z(\cdot, 0) - z(\cdot, n)\|_\infty \to 0, \tag{10}$$

$$\|w(\cdot, 0) - w(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{11}$$

Асимптотична рівність (10) випливає з другої частини теореми 2.

Лема 1. *Нехай задачі* (8) *задовольняють умови* (I), (II)$'$, (VI)$'$ *і* (V). *Тоді*

$$\|x(\cdot, 0) - x(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{12}$$

Доведення. Визначимо за заданими матрицями-функціями $A_0(\cdot, n)$ і $F(\cdot, n)$ блочні $(2m \times 2m)$-матриці-функції

$$A_F(\cdot, n) := \begin{pmatrix} A_0(\cdot, n) & F(\cdot, n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad R_{AF}(\cdot, n) := A_F(\cdot, 0) - A_F(\cdot, n),$$

$$R^\vee_{AF}(t, n) := \int\limits_a^t R_{AF}(s, n) ds.$$

Розглянемо тепер матричні задачі Коші

$$S'(t, n) + A_F(t, n) S(t, n) = 0, \qquad S(a, n) = I_{2m}. \tag{13}$$

Тоді

$$R^\vee_{AF}(\cdot, n) R_{AF}(\cdot, n) = \begin{pmatrix} R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_{A_0}(\cdot, n) & R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_F(\cdot, n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix},$$

звідки згідно з припущеннями (II)$'$ і (VI)$'$

$$\|R^\vee_{AF}(\cdot, n) R_{AF}(\cdot, n)\|_1 = \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_{A_0}(\cdot, n)\|_1 + \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_F(\cdot, n)\|_1 \to 0,$$

крім того, згідно з (I) і (V) маємо

$$\|R^\vee_{AF}(\cdot, n)\|_\infty = \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n)\|_\infty + \|R^\vee_F(\cdot, n)\|_\infty \to 0.$$

Звідси відповідно до теореми Лєвіна [9, 10] випливає, що

$$\|S(\cdot, 0) - S(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{14}$$

Розглянемо тепер послідовність матричних задач

$$T'(t, n) + A_F(t, n) T(t, n) = 0, \qquad T(a, n) = C \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}. \tag{15}$$

Розв'язки цих задач можна записати у вигляді

$$T(\cdot, n) = S(\cdot, n)C.$$

Тому

$$\|T(\cdot, 0) - T(\cdot, n)\|_\infty = \|\,(S(\cdot, 0) - S(\cdot, n))\,C\|_\infty \leq \|S(\cdot, 0) - S(\cdot, n)\|_\infty \|C\| \to 0.$$

Визначимо для розв'язків $x(\cdot, n) = (x_1(\cdot, n), x_2(\cdot, n), \ldots, x_m(\cdot, n))$ крайових задач (8) матриці-функції

$$X(\cdot, n) := \begin{pmatrix} x_1(\cdot, n) & 0 & \ldots & 0 \\ x_2(\cdot, n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(\cdot, n) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторні крайові задачі (8) рівносильні матричним задачам

$$X'(t, n) + A_0(t, n)X(t, n) = F(t, n), \quad X(a, n) \equiv 0. \tag{16}$$

Неважко переконатися, що розв'язки задач (15) і (16) пов'язані між собою рівностями

$$T(\cdot, n) = \begin{pmatrix} X(\cdot, n) & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Тому з доведеного вище співвідношення випливає, що

$$\|x(\cdot, 0) - x(\cdot, n)\|_\infty = \|X(\cdot, 0) - X(\cdot, n)\|_\infty = \|T(\cdot, 0) - T(\cdot, n)\|_\infty \to 0.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *В умовах теореми* 3 *виконується гранична рівність* (11).

Доведення. Покладемо

$$v(\cdot, n) := x(\cdot, n) - w(\cdot, n).$$

Тоді вектор-функції $v(\cdot, n)$ є розв'язками крайових задач

$$v'(t, n) + A_0(t, n)v(t, n) = 0, \qquad B_1(n)v(\cdot, n) = B_1(n)x(\cdot, n) =: \widetilde{c}_1(n),$$

але

$$\|B_1(0)x(\cdot, 0) - B_1(n)x(\cdot, n)\| \leq \|(B_1(0) - B_1(n))x(\cdot, 0)\| + \|B_1(n)\|\|x(\cdot, 0) - x(\cdot, n)\|_\infty. \tag{17}$$

Перший доданок у правій частині нерівності (17) прямує до нуля за припущенням (III) теореми. З цієї ж умови за принципом рівномірної обмеженості для лінійних операторів випливає також, що $\|B_1(n)\| = O(1)$. Тому зі співвідношення (12) випливає, що ліва частина нерівності (17) прямує до нуля, тобто $\widetilde{c}_1(n) \to \widetilde{c}_1(0)$. Але

$$v(\cdot, n) = Y(\cdot, n)\,\overline{c}_1(n),$$

де вектор $\overline{c}_1(n)$ належить $\mathbb{C}^m$, $Y(\cdot, n)$ — матричний розв'язок задачі Коші

$$Y'(t, n) + A_0(t, n)Y(t, n) = 0, \quad Y(a, n) = I_m,$$

а вектори $\overline{c}_1(n)$ і $\widetilde{c}_1(n)$ пов'язані між собою рівністю

$$[B_1(n)Y(\cdot,n)]\,\overline{c}_1(n)=\widetilde{c}_1(n).$$

Тут вираз (так звані дужки Кігурадзе)

$$[B_1(n)\,Y(\cdot,n)] \tag{18}$$

позначає числову $(m\times m)$-матрицю, k-й стовпець якої є результатом дії оператора $B_1(n)$ на k-й стовпець квадратної матриці $Y(\cdot,n)$. Із однозначної розв'язності крайових задач (7) при $n\gg 1$ випливає [12], що матриці (18) оборотні при достатньо великих n. Крім того, $\|Y(\cdot,0)-Y(\cdot,n)\|_\infty\to 0$ за теоремою 2. Тому

$$\overline{c}_1(n)=[B_1(n)\,Y(\cdot,n)]^{-1}\,\widetilde{c}_1(n)\to[B_1(0)\,Y(\cdot,0)]^{-1}\,\widetilde{c}_1(0)=\overline{c}_1(0)$$

з урахуванням умови (III) і доведеної властивості $\widetilde{c}_1(n)\to\widetilde{c}_1(0)$. Звідси випливає, що

$$\|v(\cdot,0)-v(\cdot,n)\|_\infty\to 0. \tag{19}$$

Тепер співвідношення (11) випливає з рівностей $w(\cdot,n)=x(\cdot,n)-v(\cdot,n)$ і співвідношень (12), (19).

Лему 2 доведено, а разом з нею доведено і теорему 3 для випадку $r=1$.

Покажемо, що випадок $r\geq 2$ може бути редукований до випадку $r=1$.

Диференціальні рівняння (1) і (3) порядку $r\geq 2$ зводяться до системи $m'=rm$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$x'(t,n)+\widetilde{A}_0(t,n)x(t,n)=\widetilde{f}(t,n), \tag{20}$$

якщо покласти

$$x(\cdot,n):=(y(\cdot,n),y'(\cdot,n),\ldots,y^{(r-1)}(\cdot,n)),\quad \widetilde{f}(\cdot,n):=(0,\ldots,0,f(\cdot,n))\in L([a,b];\mathbb{C}^{rm}),$$

а блочну матрицю-функцію $\widetilde{A}_0(\cdot,n)$ визначити рівністю

$$\widetilde{A}_0(\cdot,n):=\begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m\\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m\\ -A_0(\cdot,n) & -A_1(\cdot,n) & -A_2(\cdot,n) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot,n)\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Кожен з операторів $B_j(n)$ в крайових умовах (2), (4) допускає однозначне зображення [15]

$$B_j(n)y=\sum_{l=1}^{r-1}\alpha_{j,l}(n)y^{(l-1)}(a)+\int_a^b[d\Phi_j(t,n)]\,y^{(r-1)}(t), \tag{22}$$

де числові матриці $\alpha_{j,l}(n)$ належать $\mathbb{C}^{m\times m}$, $(m\times m)$-матриці-функції $\Phi_j(\cdot,n)$ мають обмежену варіацію на $[a,b]$, неперервні зліва на інтервалі (a,b) і $\Phi_j(a,n)=0_m$, а інтеграл в (22) розуміється як інтеграл Рімана – Стільтьєса.

Визначимо, виходячи з формули (22), r^2 лінійних операторів

$$B_{j,l}(n)\colon C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)\to\mathbb{C}^m,$$

покладаючи для $j,\ l\in[r]$

$$B_{j,l}(n)y:=\alpha_{j,l}(n)y^{(l-1)},\qquad l\in[r-1],\tag{23}$$

$$B_{j,r}(n)y:=\int\limits_a^b\left[d\Phi_j(t,n)\right]y^{(r-1)}(t).\tag{24}$$

Визначимо тепер оператори $\widetilde{B}_1(n)$, поклавши

$$\widetilde{B}_1(n):=\begin{bmatrix} B_{1,1}(n) & \ldots & B_{1,r}(n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{r,1}(n) & \ldots & B_{r,r}(n)\end{bmatrix},\qquad \widetilde{c}_1(n):=(c_1(n),\ldots,c_r(n))\in\mathbb{C}^{rm}.\tag{25}$$

Лема 3 [15]**.** *Неоднорідні крайові задачі* (1), (2) *і* (3), (4) *еквівалентні неоднорідним крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь* (20) *із крайовими умовами*

$$\widetilde{B}_1(n)y=\widetilde{c}_1(n),\tag{26}$$

які задаються формулами (23) – (25).

Із результатів роботи [15] випливає така лема.

Лема 4. *Якщо для крайових задач вигляду* (1), (2) *і* (3), (4) *виконано умови теореми* 3, *то задачі вигляду* (20), (26) *також задовольняють умови цієї теореми.*

Тепер теорема 3 у випадку $r\geq 2$ випливає з лем 3, 4 і того факту, що цю теорему ми довели у випадку $r=1$.

Порівняємо на прикладі умови теорем 1 – 3 про неперервність розв'язків загальних крайових задач за параметром. Оскільки умови на граничні оператори в усіх теоремах однакові, то достатньо порівняти умови на ліві і праві частини неоднорідних крайових задач.

Приклад. Розглянемо крайову задачу для скалярного звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$Ly=y'(t)+a(t)y(t)=f(t),\quad t\in(a,b),\tag{27}$$

де $a(\cdot)$ і $f(\cdot)$ належать простору $L([a,b],\mathbb{C})$.

Розглянемо тепер послідовність неоднорідних крайових задач

$$L(n)y(t;n)=y'(t;n)+(a(t)+n^{\alpha}e^{in^{\beta}t})y(t;n)=f(t)+n^{\gamma}e^{in^{\delta}t},t\in(a,b),n\in\mathbb{N},\tag{28}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — дійсні числові параметри.

Тоді

$$R_a(t,n)=n^{\alpha}e^{in^{\beta}t},\qquad R_f(t,n)=n^{\gamma}e^{in^{\delta}t},$$

$$R_a^{\vee}(t,n)=n^{\alpha}e^{in^{\beta}t}/in^{\beta},\qquad R_f^{\vee}(t,n)=n^{\gamma}e^{in^{\delta}t}/in^{\delta}.$$

Зауважимо, що умови на параметри α,β відповідають умовам на ліві частини задач, а на параметри γ,δ — умовам на праві.

Легко перевірити, що для виконання умов теорем $1-3$ параметри повинні задовольняти відповідно умови

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \leq 0, \quad \gamma < \delta;$$

$$\alpha < \min\left\{\beta, \frac{\beta}{2}\right\}, \quad \gamma < \min\{0, \delta\};$$

$$\alpha < \min\left\{\beta, \frac{\beta}{2}\right\}, \quad \gamma < \min\{\beta - \alpha, \delta\}.$$

Таким чином, теорема 3 доповнює теорему І. Т. Кігурадзе в частині умов на коефіцієнти рівнянь і покращує теорему Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, послаблюючи її умови на праві частини задач.

Література

1. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215 – 219.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147 – 153.
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чех. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568 – 583.
4. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1962. – № 10. – С. 1290 – 1293.
5. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 289 – 298.
6. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
7. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 3. – P. 423 – 439.
8. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571 – 579.
9. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774 – 777.
10. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105 – 132.
11. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970 – 975.
12. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – C. 77 – 90.
13. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – № 81. – P. 1 – 13.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – № 87. – P. 1 – 16.
15. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
16. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a, b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24 – 28.

Одержано 24.02.19