УДК 517.98
А. Ю. Хамраев (Каршин. гос. ун-т, Узбекистан)

О ДИНАМИКЕ КВАЗИСТРОГО НЕВОЛЬТЕРРОВСКОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

We find all fixed and periodic points for a quasistrictly non-Volterra quadratic stochastic operator on the two-dimensional simplex. The description of the limit set of trajectories for this operator is presented.

Для одного квазістрого невольтеррівського квадратичного стохастичного оператора на двовимірному симплексі знайдено всі нерухомі та періодичні точки. Наведено опис граничної множини траєкторій для цього оператора.

Введение. Одна из основных задач при исследовании динамической системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно „потомки" состояния системы определяются некоторым законом. Квадратичные стохастические операторы впервые были введены в работе С. Н. Бернштейна [1] и используются для решения задач, возникающих в математической генетике [1, 3 – 14]. Изучение асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов впервые начато С. Уламом [14]. В работах [7 – 9] теория вольтерровских квадратичных стохастических операторов была развита на основе теорий функции Ляпунова и турниров. Бесконечномерные вольтерровские квадратичные стохастические операторы рассмотрены в работах [12, 13]. Понятие строго невольтерровского квадратичного стохастического оператора было введено в работе [3]. Результаты работ [3, 4] показывают, что динамика строго невольтерровских операторов намного богаче, чем динамика вольтерровских операторов. Следовательно, каждый невольтерровский квадратичный оператор является хорошим примером в теории нелинейных динамических систем. Кроме того, задача полного описания поведения траекторий квадратичных стохастических операторов не решена полностью даже в двумерном симплексе и остается открытой проблемой до настоящего времени. Именно для класса невольтерровских квадратичных стохастических операторов многие вопросы остаются открытыми, и в этом случае пока не построена общая теория.

В настоящей работе рассматриваются квадратичные стохастические операторы, которые будем называть квазистрого невольтерровскими.

Опишем кратко структуру работы. Во-первых, дано определение квазистрого невольтерровского оператора и описан вид произвольного квазистрого невольтерровского оператора на двумерном симплексе S^2. Во-вторых, изучены неподвижные, периодические и предельные точки квазистрого невольтерровского оператора на S^2. Доказано, что существуют две неподвижные точки и континуальное множество 2-периодических точек. Все 2-периодические точки являются притягивающими. Одна из неподвижных точек является отталкивающей. Приведено полное описание множества предельных точек.

Пусть $V: S^{n-1} \to S^{n-1}$ — квадратичный стохастический оператор (КСО), определенный на симплексе

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$

т. е.

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $P_{ij,k} \geq 0,\ P_{ij,k} = P_{ji,k}$ и

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1 \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

КСО называется строго невольтерровским, если

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \{i, j\}. \tag{3}$$

Определение 1. *КСО V, определенный на S^{n-1}, назовем квазистрого невольтерровским, если* (3) *не выполняется только для $P_{ii,i}$, т. е. $P_{ii,i} \geq 0$.*

Определение 2 (см. [2]). *Если якобиан J оператора V в неподвижной точке λ не имеет собственного значения на единичной окружности, то точка λ называется гиперболической.*

Определение 3 (см. [2]). *Гиперболическая неподвижная точка λ называется притягивающей, если все модули собственных значений матрицы Якоби $J(\lambda)$ меньше единицы*; *отталкивающей, если все модули собственных значений матрицы Якоби $J(\lambda)$ больше единицы*, *и седловой — в остальных случаях.*

Для данного $x^{(0)} \in S^{m-1}$ траектория $\{x^{(n)}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, под действием КСО (1) определяется так: $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Одна из главных проблем в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Эта проблема была полностью решена для вольтерровских КСО (см. [8]), которые определены равенствами (2) и дополнительным предположением

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \{i, j\}.$$

В данной работе мы ограничимся изучением квазистрого невольтерровских операторов, определенных на S^2. Тогда квазистрого невольтерровский оператор V имеет вид

$$V: \quad \begin{cases} x' = P_{11,1}x^2 + P_{22,1}y^2 + P_{33,1}z^2 + 2P_{23,1}yz, \\ y' = P_{11,2}x^2 + P_{22,2}y^2 + P_{33,2}z^2 + 2P_{13,2}xz, \\ z' = P_{11,3}x^2 + P_{22,3}y^2 + P_{33,3}z^2 + 2P_{23,1}xy. \end{cases} \tag{4}$$

Положим

$$\begin{aligned} &P_{11,1} = \alpha_1, \qquad P_{22,1} = \beta_1, \qquad P_{33,1} = \gamma_1, \\ &P_{11,2} = \alpha_2, \qquad P_{22,2} = \beta_2, \qquad P_{33,2} = \gamma_2, \\ &P_{11,3} = \alpha_3, \qquad P_{22,3} = \beta_3, \qquad P_{33,3} = \gamma_3. \end{aligned}$$

Тогда из (4) получим

$$V: \quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 z^2 + 2yz, \\ y' = \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2 + \gamma_2 z^2 + 2xz, \\ z' = \alpha_3 x^2 + \beta_3 y^2 + \gamma_3 z^2 + 2xy, \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha_i, \ \beta_i, \ \gamma_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i = 1.$

***Замечание* 1.** Вообще говоря, изучение оператора (5) является очень трудной задачей. Эта задача в случае $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 0$ для некоторых подклассов таких операторов рассмотрена в [3]. В работе [10] в случае $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ показано, что оператор имеет четыре неподвижные точки, вершины симплекса $e_1, \ e_2, \ e_3$ являются отталкивающими, центр симплекса $C(1/3, 1/3, 1/3)$ — притягивающий и траектория любой точки, за исключением вершин, сходится к центру симплекса.

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$, тогда оператор (5) имеет вид

$$V: \quad x' = x^2 + (y+z)^2, \quad y' = 2xz, \quad z' = 2xy. \tag{6}$$

В данной работе мы будем изучать асимптотическое поведение траекторий (динамику) оператора (6).

Неподвижные точки. Неподвижная точка оператора (6) есть решение $\lambda = (x, y, z)$ уравнения $V(\lambda) = \lambda$, т. е. решение системы

$$\begin{aligned} &x^2 + (1-x)^2 = x, \\ &2xz = y, \\ &2xy = z. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим

$$\mathrm{Fix}(V) = \left\{\lambda \in S^2 : V(\lambda) = \lambda\right\}.$$

Тогда для оператора V получим

$$\mathrm{Fix(V)} = \left\{(1,0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}.$$

***Замечание* 2.** Вольтерровские КСО на двумерном симплексе имеют, по крайней мере, три неподвижные точки (см. [8]). А строго невольтерровский КСО при любых параметрах имеет единственную неподвижную точку (см. [3]). Квазистрого невольтерровский КСО (5) только при $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$, т. е. когда оператор рассматривается виде (6), имеет две неподвижные точки, а в остальных случаях — единственную неподвижную точку (см. [5]) на двумерном симплексе. В случае, когда динамическая система имеет более чем одну неподвижную точку, исследование траекторий таких динамических систем представляет особый интерес. И этот факт является мотивацией для изучения отдельно траекторий КСО (6).

Инвариантные множества. Обозначим

$$M_\alpha = \left\{(x,y,z) \in S^2 : y = \alpha z \ \vee \ y = \frac{1}{\alpha} z\right\}, \quad \alpha \in (0, +\infty),$$
$$M_0 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : y \cdot z = 0\right\}.$$

Лемма 1. *Множества M_0 и M_α являются инвариантными относительно оператора V.*

Доказательство. Пусть $(x,y,z) \in M_\alpha$, т. е. $y = \alpha z$ или $y = \dfrac{1}{\alpha} z$, тогда из (6) имеем $y' = \alpha z'$ или $y' = \dfrac{1}{\alpha} z'$. Следовательно, $V(M_\alpha) \subset M_\alpha$. Ясно, что $S^2 = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,+\infty)} M_\alpha$.

Пусть $(x,y,z) \in M_0$, т. е. $y \cdot z = 0$. Тогда $y' \cdot z' = 4x^2 yz = 0$.

Лемма 1 доказана.

Периодические точки. Сначала найдем 2-периодические точки, т. е. рассмотрим уравнение $V^2(\lambda) = \lambda$, где $\lambda = (x,y,z)$ и $V^2(\lambda) = V(V(\lambda))$ имеет вид

$$\begin{aligned} &x'' = 8x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x + 1 \equiv f^2(x), \\ &y'' = 2^2 \cdot x \cdot (2x^2 - 2 + 1) \cdot y, \\ &z'' = 2^2 \cdot x \cdot (2x^2 - 2x + 1) \cdot z. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$f(x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1, \quad x\in[0,1].$$

Обозначим через $f^n(x)=f(f(\ldots f(x))\ldots)$ n-ю итерацию.

Лемма 2. *Для любого значения $n\geq 2$ функция $f(x)$ не имеет n-периодических точек, отличных от неподвижных точек.*

Доказательство. Покажем, что $f^2(x)=x$ не имеет решения $x\in[0,1]$, отличного от неподвижной точки. Поскольку решения уравнения $f(x)=x$ являются решениями для $f^2(\lambda)=\lambda$, то мы рассмотрим уравнения

$$\frac{f^2(x)-x}{f(x)-x}=\frac{8x^4-16x^3+12x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}=4x^2-2x+1=0.$$

Но последнее уравнение не имеет решений. Поэтому в силу теоремы Шарковского (см. [3]) уравнение $f^n(x)=x$ не имеет решений при всех $n\geq 2$.

Лемма 2 доказана.

Обозначим

$$S_0=\left\{\left(\frac{1}{2},y,z\right)\in S^2: y+z=\frac{1}{2}\right\}, \quad \mathrm{Per}_2(V)=\left\{\lambda\in S^2: V^2(\lambda)=\lambda\right\}.$$

Лемма 3. *Для оператора* V, *т. е.* (7), *справедливо* $\mathrm{Per}_2(V)=S_0$.

Доказательство. В силу леммы 2 уравнение $f^2(x)=x$ имеет следующие решения: $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$. Пусть $x=1$. Тогда из уравнения $V^2(\lambda)=\lambda$ получаем $y=4y$, $z=4z$, т. е. $y=z=0$ или $(1,0,0)\in \mathrm{Fix}(V)$. Пусть теперь $x=\dfrac{1}{2}$, тогда из уравнения $V^2(\lambda)=\lambda$ имеем $y=y$, $z=z$, т. е. y и z являются произвольными и такими, что $y+z=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $V^2\left(\dfrac{1}{2},y,z\right)=V\left(\dfrac{1}{2},z,y\right)=\left(\dfrac{1}{2},y,z\right)$ $\forall\left(\dfrac{1}{2},y,z\right)\in S_0$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для оператора V имеет место*

$$\mathrm{Per}_n(V)=\left\{\lambda\in S^2: V^n(\lambda)=\lambda\right\}=\varnothing,$$

где $n\geq 3$.

Доказательство. Легко получить, что

$$V^3:\quad \begin{cases} x'''=f^3(x),\\ y'''=2^2x\,f(x)\cdot f^2(x)\cdot z,\\ y'''=2^3x\,f(x)\cdot f^2(x)\cdot y. \end{cases} \tag{9}$$

Используя математическую индукцию, получаем

$$V^n:\quad \begin{cases} x^{(n)}=f^n(x),\\ y^{(n)}=\left[2^n\prod_{i=0}^{n-1}f^i(x)\right]\left[\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)y+\left(\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)z\right],\\ z^{(n)}=\left[2^n\prod_{i=0}^{n-1}f^i(x)\right]\left[\left(\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)y+\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)z\right]. \end{cases}$$

В силу леммы 2 из первого уравнения $V^n(\lambda)=\lambda$ находим $x=1,\ x=\dfrac{1}{2}$.

Пусть $x=\dfrac{1}{2}$, тогда

$$2^n\prod_{i=0}^{n-1}f^i\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

Из уравнения $V^n(\lambda)=\lambda$ получаем

$$y=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)y+\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)z,$$
$$z=\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)y+\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)z.$$

Отсюда

$$y-z=(-1)^n(y-z). \tag{10}$$

Пусть n является четным. Тогда (10) выполняется для любых $y,\ z$ с условием $y+z=\dfrac{1}{2}$, т. е.

$$\left(\frac{1}{2},y,z\right)\in\mathrm{Per}_2(V).$$

Если n — нечетное, то из (10) получаем $y=z$, а из $y+z=\dfrac{1}{2}$ имеем $y=z=\dfrac{1}{4}$, т. е.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\in\mathrm{Per}_2(V).$$

Таким образом, все решения уравнения $V^n(\lambda)=\lambda$ для оператора V являются либо неподвижными, либо 2-периодическими.

Лемма 4 доказана.

***Замечание* 3.** Из [8] известно, что вольтерровские КСО не имеют периодических траекторий. В работе [4] показано, что строго невольтерровские КСО имеют бесконечно много периодических точек. Леммы 2 – 4 показывают, что квазистрого невольтерровские операторы тоже имеют бесконечно много периодических точек.

Предельные точки. Далее мы изучим динамику оператора V на $M_\alpha,\ \alpha\in[0,+\infty)$.

Пусть $\lambda=(x,y,z)\in M_\alpha,\ \alpha\in(0,+\infty)$. Тогда либо $x+(\alpha+1)y=1$, либо $x+\left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)y=1$. Для определенности пусть $x+(\alpha+1)y=1$. Тогда оператор V на этой прямой имеет вид

$$V_\alpha:\quad\begin{cases}x'=2x^2-2x+1,\\[2mm] y'=2\alpha xy.\end{cases}$$

Очевидно, что $\lim_{n\to\infty}x^{(n)}=\lim_{n\to\infty}f^n(x)=\dfrac{1}{2}$. Тогда из $x^{(2k)}+(\alpha+1)y^{(2k)}=1$ и $x^{(2k+1)}+\left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)y^{(2k+1)}=1$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} y^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(\alpha+1)}, & n=2k, \quad k=0,1,2, \\ \dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}, & n=2k+1, \quad k=0,1,2. \end{cases}$$

Следовательно, для любого $\lambda \in M_\alpha,\ \alpha \in (0,+\infty)$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(2k)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(\alpha+1)}, \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\right)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(2k+1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2\,(\alpha+1)}, \frac{1}{2(\alpha+1)}\right).$$

Аналогично можно доказать, что для любого $\lambda_0 \in M_0$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(2k+1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(2k)} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Из приведенного выше получаем следующую теорему.

Теорема 1. 1. *Для любого* $\lambda \in \left\{(x,y,z)\in S^2 : x=0\right\} \cup \{(1,0,0)\}$ *справедливо* $\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = (1,0,0)$.

2. *Для любого* $\lambda \in S^2 \backslash \left\{(x,y,z)\in S^2 : x=0\right\}$ *существует* $\alpha \in [0;+\infty)$ *такое, что* λ *принадлежит* M_α.

При $\alpha = 0$ для любого $\lambda^{(0)} \in M_0$

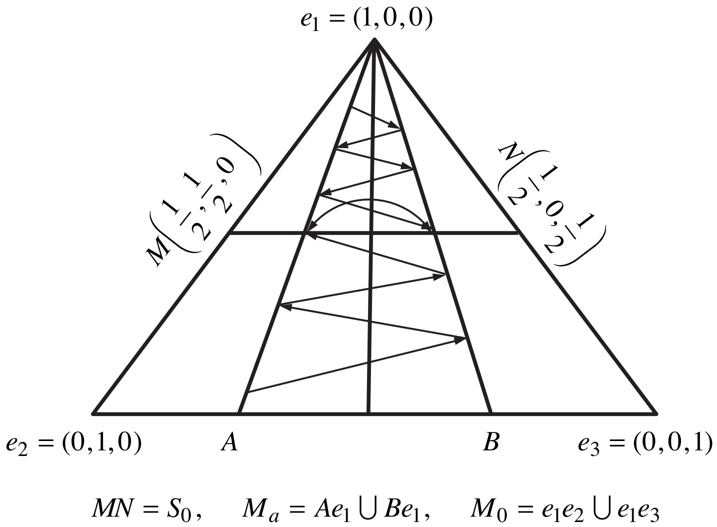
$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right), & \text{если} \quad n=2k, \quad k=0,1,2,\ldots, \\ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right), & \text{если} \quad n=2k+1, \quad k=0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

а при $\alpha \in (0,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}, \dfrac{1}{2(\alpha+1)}\right), & n=2k, \quad k=0,1,2,\ldots, \\ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}, \dfrac{1}{2(\alpha+1)}\right), & n=2k+1, \quad k=0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

***Замечание* 4.** Из [8] известно, что вольтерровские КСО не имеют периодических траекторий. В работе [4] показано, что строго невольтерровские КСО имеют сходящие, периодические и несходящие траектории. Из теоремы 1 следует, что квазистрого невольтерровские операторы имеют сходящие и периодические траектории (см. рисунок).

Автор выражает признательность профессору У. А. Розикову за полезные замечания, которые дали возможность значительно улучшить стиль и содержание работы.



Поведение траектории на инвариантном множестве M_α.

Литература

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Учен. зап. науч.-исслед. кафедры Украины. Отд-ние математики. – 1924. – № 1. – С. 83 – 115.
2. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical systems // Nonlinearity. – 2003.
3. *Жамилов У. У., Розиков У. А.* О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 9. – С. 81 – 94.
4. *Jamilov U. U.* On symmetric strictly non-Volterra quadratic stochastic operators // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. – 2016. – **5**, № 3. – P. 263 – 283.
5. *Hardin A. J. M., Rozikov U. A.* A quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator // arXiv: 1808.00229.
6. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth. I // Adv. Appl. Probab. – 1970. – **2**, № 1. – P. 1 – 82.
7. *Ganikhodzhaev R. N., Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* Quadratic stochastic operators: results and open problems // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Fields. – 2011. – **14**, № 2. – P. 279 – 335.
8. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Мат. сб. – 1992. – **83**, № 8. – С. 119 – 140.
9. *Ганиходжаев Р. Н.* Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 40 – 49.
10. *Ганиходжаев Р. Н.* Об одном семействе квадратичных стохастических операторов, действующих в S^2 // Докл. АН УзССР. – 1989. – № 1. – С. 3 – 5.
11. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. – Киев: Наук. думка, 1983.
12. *Mukhamedov F., Ganikhodjaev N.* Quantum quadratic operators and processes // Lect. Notes Math. – 2015. – **2133**.
13. *Мухамедов Ф. М.* О бесконечномерных квадратичных вольтерровских операторах // Успехи мат. наук. – 2000. – **55**, № 6. – С. 149 – 150.
14. *Ulam S. M.* A collection of mathematical problems. – New York etc.: Intersci. Publ., 1960.

Получено 15.03.18,
после доработки — 12.02.19