УДК 517.988.6

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ РІВНЯНЬ

We obtain new conditions for the existence of bounded solutions of nonlinear discrete equations with application of the local linear approximation of these equations.

Отримано нові умови існування обмежених розв'язків нелінійних дискретних рівнянь із використанням локальної лінійної апроксимації цих рівнянь.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{K}$ — поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ дійсних або комплексних чисел відповідно, E — довільний скінченновимірний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$, G — зліченна адитивна група, X і Y — довільні банахові простори і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Позначимо через $l_\infty(G,E)$ банаховий простір відображень $x\colon G \to E$, для кожного з яких $\sup_{g\in G}\|x(g)\|_E < +\infty$, з нормою

$$\|x\|_{l_\infty(G,E)} = \sup_{g\in G}\|x(g)\|_E.$$

Розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{F}$, що діє в просторі $l_\infty(G,E)$, та відповідне рівняння

$$\mathcal{F}x = h, \tag{1}$$

де $h \in l_\infty(G,E)$.

Метою статті є встановлення умов, за яких рівняння (1) для кожного $h \in l_\infty(G,E)$ має в просторі $l_\infty(G,E)$ хоча б один розв'язок x, тобто множина значень $R(\mathcal{F})$ оператора $\mathcal{F}$ збігається з $l_\infty(G,E)$. Зазначимо, що розв'язання такої задачі навіть для різницевих рівнянь є складною проблемою (див., наприклад, [1 – 8]). Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношення $R(\mathcal{F}) = l_\infty(G,E)$ і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цього співвідношення.

В основу досліджень оператора $\mathcal{F}$ у статті покладено метод, в якому використовується локальна лінійна апроксимація цього оператора.

2. Формулювання основного результату. Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх лінійних c-неперервних операторів $\mathcal{A}\colon l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$, кожний з яких має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$.

Основним результатом статті є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, що*

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_{l_\infty(G,E)} \le \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}} - H. \tag{2}$$

Тоді $R(\mathcal{F}) = l_\infty(G,E)$.

Цю теорему покладено в основу методу, за допомогою якого з'ясовуються умови існування обмежених розв'язків нелінійних дискретних рівнянь. Ми доведемо це твердження, використавши ряд допоміжних результатів.

Зазначимо, що при використанні на практиці теореми 1 потрібно знати норму оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Тому наведемо деяку інформацію про цей оператор. Нагадаємо, що оператор $\mathcal{A}^{-1}$, який розглядається в теоремі 1, можна записати за допомогою рівності

$$\left(\mathcal{A}^{-1}h\right)(g)=\sum_{\alpha\in G}G(g,\alpha)h(\alpha),$$

в якій для $G(g,\alpha)\in L(E,E),\ (g,\alpha)\in G\times G$, виконується співвідношення

$$\sup_{g\in G}\sum_{\alpha\in G}\|G(g,\alpha)\|_{L(E,E)}<+\infty$$

(див., наприклад, [9]). Отже, для норми оператора $\mathcal{A}^{-1}$ справджується оцінка

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}\le\sup_{g\in G}\sum_{\alpha\in G}\|G(g,\alpha)\|_{L(E,E)},$$

яку можна використати в (2).

Зауваження **1.** У теоремі 1 можна обмежитися розглядом не всіх $H>0$, а лише тих, що є елементами довільної зліченної необмеженої множини $\{H_n : n\in\mathbb{N}\}\subset(0,+\infty)$, де $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

3. Допоміжні твердження. Наведемо ряд результатів про c-неперервні оператори, потрібні для доведення теореми 1.

Розглянемо довільні скінченні множини $M_k\subset G,\ k\in\mathbb{N}$, що задовольняють умови:

1) $M_k\subset M_{k+1}$ і $M_k\neq M_{k+1}$ для всіх $k\in\mathbb{N}$;

2) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}M_k=G$.

Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m\in\mathbb{N}$, лінійний неперервний оператор, що діє у просторі $l_\infty(G,E)$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{P}_mx)(g)=\begin{cases}x(g), & \text{якщо}\quad g\in M_m,\\ 0, & \text{якщо}\quad g\in G\setminus M_m.\end{cases}\tag{3}$$

Послідовність $(x_k)_{k\ge1}$ елементів простору $l_\infty(G,E)$ називатимемо *локально збіжною* до $x\in l_\infty(G,E)$ при $k\to\infty$ і позначатимемо

$$x_k\xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(G,E)}x\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

якщо

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|_{l_\infty(G,E)}<+\infty$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathcal{P}_m(x_k-x)\|_{l_\infty(G,E)}=0$$

для кожного числа $m\in\mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H}\colon l_\infty(G,E) \longrightarrow l_\infty(G,E)$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in \in l_\infty(G,E)$ і $x_k \in l_\infty(G,E)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(G,E)} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(G,E)} \mathcal{H}x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора (на мові „ε, δ”) уведено в розгляд Е. Мухамадієвим [10]. Вивчення цих понять було продовжено в [11–16]. Визначення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано автором (див. [17]).

Легко перевірити, що якщо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — c-неперервні оператори, то для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{K}$ оператори $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$ і $\mathcal{A}\mathcal{B}$ також є c-неперервними, і якщо послідовність $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 1}$ c-неперервних елементів простору $L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$ збігається до $\mathcal{A} \in L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$, то елемент $\mathcal{A}$ також є c-неперервним. Отже, множина $\mathfrak{A}$ всіх c-неперервних елементів банахової алгебри $L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$ є банаховою підалгеброю цієї алгебри.

Важливими для подальшого є наступні два твердження про c-неперервні оператори.

Теорема 2 [9]. *Нехай c-неперервний оператор $\mathcal{A} \in L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тоді оператор $\mathcal{A}^{-1}$ є c-неперервним.*

Теорема 3 [8]. *Нехай $\mathcal{B}$ — замкнена куля з центром у точці 0 у банаховому просторі $l_\infty(G,E)$ і оператор $\mathfrak{C}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ є c-неперервним. Тоді $\mathfrak{C}$ має нерухому точку.*

Зауважимо, що завдяки теоремі 2 підалгебра $\mathfrak{A}$ алгебри $L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$ є наповненою [18].

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі $l_\infty(G,E)$, потрібно мати на увазі, що ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає із c-неперервності (див. [6]).

4. Доведення теореми 1. Розглянемо у просторі $l_\infty(G,E)$ замкнену кулю

$$\mathcal{B}_R = \{x\colon \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq R\}$$

радіуса R з центром у точці 0.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 1. *Нехай для деяких чисел $H > 0$, $r > 0$ і елемента $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ справджується нерівність* (2) *і $h \in \mathcal{B}_H$.*

Тоді рівняння (1) *має хоча б один розв'язок $x \in \mathcal{B}_r$.*

Доведення. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\mathcal{A}x = (\mathcal{A} - \mathcal{F})x + h \tag{4}$$

і розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{W}$, що діє у просторі $l_\infty(G,E)$ і визначається формулою

$$\mathcal{W}x = (\mathcal{A} - \mathcal{F})x + h.$$

Оскільки оператор $\mathcal{A}$ має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$, то рівняння (4) можна записати у вигляді

$$x = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{W}x. \tag{5}$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}\colon l_\infty(G,E)\to l_\infty(G,E)$ на підставі теореми 2 є c-неперервним. Тому завдяки c-неперервності оператора $\mathcal{W}$ оператор $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{W}$ також буде c-неперервним.

Крім того, виконується співвідношення

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{W}\,\mathcal{B}_r\subset\mathcal{B}_r.$$

Справді, позначимо

$$a=\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}$$

і

$$b=\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r}\|\mathcal{F}x-\mathcal{A}x\|_{l_\infty(G,E)}.$$

Тоді якщо

$$\|y\|_{l_\infty(G,E)}\le r\qquad\text{і}\qquad\|h\|_{l_\infty(G,E)}\le H,$$

то згідно з нерівністю (2)

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{W}y\right\|_{l_\infty(G,E)}\le\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}\|\mathcal{W}y\|_{l_\infty(G,E)}\le$$
$$\le a(b+\|h\|_{l_\infty(G,E)})\le a\left(\frac{r}{a}-H+\|h\|_{l_\infty(G,E)}\right)\le r.$$

Тому завдяки теоремі 3 рівняння (5) має хоча б один розв’язок $x^*\in\mathcal{B}_r$. На підставі рівносильності рівнянь (5) і (4)

$$\mathcal{F}x^*=h.$$

Отже, рівняння (1) має розв’язок $x^*\in\mathcal{B}_r$, і лему 1 доведено.

Очевидно, що твердження теореми 1 є наслідком леми 1.

Зауважимо, що виконання умов теореми 1 недостатньо для єдиності розв’язків рівняння (1).

5. Застосування теореми 1. Розглянемо окремі випадки рівняння (1).

***5.1. Випадок лінійного рівняння* (1).** Розглянемо лінійний неперервний і c-неперервний оператор $\mathcal{B}\colon l_\infty(G,E)\to l_\infty(G,E)$ та відповідне рівняння

$$\mathcal{B}x=h,\tag{6}$$

де $h\in l_\infty(G,E)$.

Справджується таке твердження.

Теорема 4. *Для кожного числа $H>0$ існують такі число $r>0$ і оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{E}$, що*

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r}\|\mathcal{B}x-\mathcal{A}x\|_{l_\infty(G,E)}\le\frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}}-H\tag{7}$$

тоді і тільки тоді, коли оператор $\mathcal{B}$ має обернений неперервний оператор.

Очевидно, що нерівність (7) рівносильна нерівності

$$\|\mathcal{B}-\mathcal{A}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}\le\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}}-\frac{H}{r}.\tag{8}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай для кожного числа $H>0$ існують такі число $r>0$ і елемент $\mathcal{A}\in\mathcal{E}$, що виконується нерівність (7). Тоді за теоремою 1

$$R(\mathcal{B}) = l_\infty(G, E). \tag{9}$$

Покажемо, що

$$\ker \mathcal{B} = \{0\}, \tag{10}$$

тобто однорідне рівняння

$$\mathcal{B}x = 0 \tag{11}$$

має лише нульовий обмежений розв'язок. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\mathcal{A}x = (\mathcal{A} - \mathcal{B})x.$$

Оскільки оператор $\mathcal{A}$ має неперервний обернений, то у просторі $l_\infty(G, E)$ рівняння (11) рівносильне рівнянню

$$x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{B})x. \tag{12}$$

Нехай x^* — обмежений розв'язок рівняння (12). На підставі (8) і (12) маємо

$$\|x^*\|_{l_\infty(G,E)} \leq \|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{B})\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))} \|x^*\|_{l_\infty(G,E)} \leq$$
$$\leq \left(1 - \frac{H}{r} \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}\right) \|x^*\|_{l_\infty(G,E)}.$$

Звідси та з того, що

$$0 \leq 1 - \frac{H}{r} \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))} < 1,$$

випливає рівність

$$\|x^*\|_{l_\infty(G,E)} = 0,$$

тобто співвідношення (10) виконується. Отже, звідси, з рівності (9) і теореми Банаха про обернений оператор [19] випливає, що оператор $\mathcal{B}$ має неперервний обернений.

Достатність. Нехай оператор $\mathcal{B}\colon l_\infty(G, E) \to l_\infty(G, E)$ має неперервний обернений. Тоді завдяки c-неперервності $\mathcal{B}$ та теоремі 2 $\mathcal{B}$ є елементом множини $\mathcal{E}$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H > 0.$$

Поклавши $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, отримаємо нерівність (7).

Теорему 4 доведено.

***Наслідок* 1.** *Лінійний неперервний і c-неперервний оператор $\mathcal{B}$, що діє в просторі $l_\infty(G, E)$, має обернений неперервний оператор $\mathcal{B}^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, для якого*

$$\|\mathcal{B} - \mathcal{A}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}}. \tag{13}$$

Доведення. Нехай для деякого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ виконується нерівність (13). Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}} - \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))} > \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватиметься нерівність (8), а отже і нерівність (7). Тому за теоремою 4 оператор $\mathcal{B}$ має обернений неперервний оператор.

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{B}$ має обернений неперервний оператор, то на підставі теореми 4 для кожного $H > 0$ існують $r > 0$ і $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, для яких виконується нерівність (7), а отже і нерівність (8). Із (8) випливає (13).

Наслідок 1 доведено.

Отже, рівняння (6) для кожного $h \in l_\infty(G,E)$ має єдиний розв'язок $x \in l_\infty(G,E)$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, для якого виконується співвідношення (13).

Зауважимо, що теорема 4 і наслідок 1 справджуються й у випадку невиконання вимоги c-неперервності операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

5.2. Нелінійні збурення лінійних рівнянь. Наведемо ще одне твердження, яке можна отримати за допомогою теореми 1.

Розглянемо рівняння

$$\mathcal{B}x + \mathcal{G}x = h, \tag{14}$$

де $\mathcal{B}\colon l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$ і $\mathcal{G}: l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$ — відповідно лінійний неперервний і нелінійний c-неперервні оператори, h — заданий елемент простору $l_\infty(G,E)$.

Окремим випадком теореми 1 є таке твердження.

Теорема 5. *Нехай оператор $\mathcal{B}$ має неперервний обернений $\mathcal{B}^{-1}$ і*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(G,E)}}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{B}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}}. \tag{15}$$

Тоді рівняння (14) *для кожного $h \in l_\infty(G,E)$ має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(G,E)$.*

Справді, завдяки (15) існує послідовність $(r_k)_{k\ge1}$ додатних чисел, для якої

$$\lim_{k\to\infty} r_k = +\infty$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r_k} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(G,E)}}{r_k} < \frac{1}{\|\mathcal{B}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}}.$$

Тому для кожного числа $H > 0$ існує таке число r_k (k залежить від H), що виконується співвідношення

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r_k} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(G,E)} \le \frac{r_k}{\|\mathcal{B}^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E),l_\infty(G,E))}} - H,$$

аналогічне (2). Тоді на підставі теореми 1 справджується твердження теореми 5.

***Зауваження* 2.** Теорема 5 застосовна до рівняння (14) і у випадку

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)}\le r} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(G,E)}}{r} = +\infty. \tag{16}$$

***Приклад* 1.** Вважатимемо, що $G = \mathbb{Z}$ і $E = \mathbb{R}$. Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n + g(x_{n-1}) = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

де $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ і $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що визначається рівністю

$$g(t) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k+1}\, \omega(t - 1 - k!) \right) t,$$

в якій

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |t| > 1, \\ 1 - |t|, & \text{якщо} \quad |t| \le 1, \end{cases}$$

і

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k.$$

Розглянемо c-неперервні оператори $\mathcal{B}$ і $\mathcal{G}$, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ і визначаються співвідношеннями

$$(\mathcal{B}x)_n = x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$(\mathcal{G}x)_n = g(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Перший із цих операторів, очевидно, є одиничним, а отже, оборотним оператором. Тому $\|\mathcal{B}^{-1}\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}), l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))} = 1$ і нерівність (15) у випадку рівняння (17) набирає вигляду

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le r} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{r} < 1.$$

Легко перевірити, що

$$\frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le n!} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{n!} = \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le (n-1)!+2} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{n!} =$$

$$= \frac{\max_{|t| \le (n-1)!+2} |g(t)|}{n!} \le \frac{\sqrt{n}((n-1)!+2)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{(n-1)!\sqrt{n}}, \quad n \ge 2,$$

і

$$\frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le n!+1} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{n!+1} = \frac{\max_{|t| \le n!+1} |g(t)|}{n!+1} = \sqrt{n+1}, \quad n \ge 2.$$

Тому

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le r} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{r} = 0$$

і

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \le r} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{r} = +\infty.$$

Отже, для рівняння (17) виконуються умови теореми 5 і тому це рівняння для кожного $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Також для рівняння (17) виконується співвідношення (16).

***Наслідок* 2.** *Нехай оператор $\mathcal{B}$ має неперервний обернений оператор $\mathcal{B}^{-1}$ і*

$$\sup_{x\in l_\infty(G,E)} \|\mathcal{G}x\|_{l_\infty(G,E)} < +\infty.$$

Тоді рівняння (14) *для кожного $h \in l_\infty(G,E)$ має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(G,E)$.*

Зазначимо, що умови оборотності оператора $\mathcal{B}$ з'ясовувалися в [11, 20, 21].

5.3. Достатні умови розв'язності скалярного різницевого рівняння у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Для нелінійного різницевого рівняння

$$x_{n+1} - f(x_n) = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

де $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $h \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, наведемо аналог теореми 1.

Теорема 6. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують числа $r > 0$ і $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, для яких*

$$\max_{|x|\le r} |f(x) - kx| \le r||k| - 1| - H. \tag{19}$$

Тоді різницеве рівняння (18) *для кожного $h \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$.*

Доведення. Розглянемо різницеві c-неперервні оператори $\mathcal{F}\colon l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ і $\mathcal{A}\colon l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, що визначаються відповідно співвідношеннями

$$(\mathcal{F}x)_n = x_{n+1} - f(x_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$(\mathcal{A}x)_n = x_{n+1} - kx_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко перевірити, що оператор $\mathcal{A}$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$ вигляду

$$(\mathcal{A}^{-1}y)_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} k^m y_{n-m-1}, & \text{якщо} \quad |k| < 1, \\ -\sum_{m=0}^{+\infty} k^{-m-1} y_{n+m}, & \text{якщо} \quad |k| > 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))} = \frac{1}{\left|\,|k| - 1\right|}. \tag{20}$$

Очевидно, що

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}\le r} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} = \max_{|y|\le r} |f(y) - ky|.$$

Звідси та з рівності (20) випливає, що у випадку рівняння (18) нерівність (2) рівносильна нерівності (19). Тому за теоремою 1 справджується твердження теореми 6.

Теорему 6 доведено.

***Приклад* 2.** Розглянемо різницеве рівняння (18) у випадку

$$f(x) = |x|^\alpha x - x,$$

де α — довільне додатне число.

Покажемо, що це рівняння з таким f для кожного $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Візьмемо довільне досить велике додатне число r. Покладемо

$$k = r^\alpha - 1.$$

За допомогою методів диференціального числення легко переконатися, що

$$\max_{|x| \leq r} |(|x|^\alpha x - x) - kx| = r^{\alpha+1} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}.$$

Оскільки

$$r^{\alpha+1} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}} = r(k-1) - H + \left(2r - r(k+1)\left(1 - \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}\right) + H\right)$$

і для досить великого додатного числа r

$$2r - r(k+1)\left(1 - \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}\right) + H < 0,$$

то

$$\max_{|x| \leq r} |(|x|^\alpha x - x) - kx| \leq r(k-1) - H,$$

тобто для f справджується нерівність (19).

Отже, рівняння (18) у випадку $f(x) = |x|^\alpha x - x$ для кожного $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

6. Множина рівнянь, до яких застосовна теорема 1. Покажемо, що множина рівнянь, до дослідження обмежених розв'язків яких застосовна теорема 1, є достатньо широкою.

Справджується таке твердження.

Теорема 7. *Для довільних послідовності додатних чисел H_n, $n \geq 1$, для якої $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$, і послідовності неперервних елементів $\mathcal{A}_n \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$, існують обмежений c-неперервний оператор $\mathcal{F}\colon l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$ і послідовність додатних чисел r_n, $n \geq 1$, такі, що виконується співвідношення*

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_n} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}_n x\|_{l_\infty(G,E)} \leq \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H_n, \quad n \geq 1. \tag{21}$$

Доведення. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел r_n, $n \geq 1$, для якої $r_1 \geq 1$ і $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \geq 1$ (значення r_n уточнимо пізніше). Для кожного $n \geq 1$ визначимо відображення

$$\omega_{1,n}\colon \left\{x \in l_\infty(G,E)\colon r_n \leq \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_n + 1\right\} \to [0,1]$$

і

$$\omega_{2,n}\colon \left\{x \in l_\infty(G,E)\colon r_n + 1 \leq \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_n + 2\right\} \to [0,1]$$

за допомогою рівностей

$$\omega_{1,n}(x) = r_n \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{l_\infty(G,E)}} - 1 \right)^2 x \right\|_{l_\infty(G,E)}$$

і

$$\omega_{2,n}(x) = (r_n + 2)\left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{l_\infty(G,E)}} - 1 \right)^2 x \right\|_{l_\infty(G,E)}.$$

Очевидно, що відображення $\omega_{1,n}$ і $\omega_{2,n}$ неперервні,

$$\omega_{1,n}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} = r_n, \tag{22}$$

$$\omega_{2,n}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} = r_n + 2, \tag{23}$$

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} = r_n + 1, \tag{24}$$

і

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0,1]. \tag{25}$$

Оператор $\mathcal{F}\colon l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$ і числа $r_n,\ n \geq 1$, визначимо таким чином.

Спочатку розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{F}_1 \in L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))$, що визначається рівністю

$$\mathcal{F}_1 x = \mathcal{A}_1 x.$$

Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r} \|\mathcal{F}_1 x - \mathcal{A}_1 x\|_{l_\infty(G,E)} = 0.$$

Виберемо число $r_1 \geq 1$ так, щоб

$$\frac{r_1}{\left\|\mathcal{A}_1{}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H_1 \geq 0.$$

Далі розглянемо нелінійний оператор $\mathcal{F}_2\colon l_\infty(G,E) \to l_\infty(G,E)$, що визначається рівністю

$$\mathcal{F}_2 x = \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_1, \\ \omega_{1,1}(x)\mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \quad r_1 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_1 + 1, \\ \omega_{2,1}(x)\mathcal{A}_2 x, & \text{якщо} \quad r_1 + 1 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_1 + 2, \\ \mathcal{A}_2 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} > r_1 + 2. \end{cases}$$

Цей оператор обмежений, неперервний і c-неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,1}$ і $\omega_{2,1}$, співвідношень (22) – (25) та неперервності і c-неперервності лінійних операторів $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{A}_2$. Легко перевірити, що на підставі обмеженості $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{A}_2$

$$\sup_{x \in l_\infty(G,E)} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_{l_\infty(G,E)} = \sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_1 + 2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_{l_\infty(G,E)} < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_2 > r_1 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \leq r_2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_{l_\infty(G,E)} \leq \frac{r_2}{\left\|\mathcal{A}_2^{-1}\right\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H_2.$$

Далі визначимо нелінійний оператор $\mathcal{F}_3 : l_\infty(G, E) \to l_\infty(G, E)$ за допомогою рівності

$$\mathcal{F}_3 x = \begin{cases} \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_2, \\ \omega_{1,2}(x)\mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \quad r_2 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_2 + 1, \\ \omega_{2,2}(x)\mathcal{A}_3 x, & \text{якщо} \quad r_2 + 1 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_2 + 2, \\ \mathcal{A}_3 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} > r_2 + 2. \end{cases}$$

Цей оператор обмежений, неперервний і c-неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,2}$ і $\omega_{2,2}$, співвідношень (22)–(25) та обмеженості, неперервності і c-неперервності операторів $\mathcal{F}_2$ та $\mathcal{A}_3$. Очевидно, що на підставі обмеженості $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{A}_3$

$$\sup_{x \in l_\infty(G,E)} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_{l_\infty(G,E)} = \sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_2 + 2} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_{l_\infty(G,E)} < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_3 > r_2 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_3} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_{l_\infty(G,E)} \le \frac{r_3}{\|\mathcal{A}_3^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H_3.$$

Аналогічним чином визначаємо оператори $\mathcal{F}_n : l_\infty(G, E) \to l_\infty(G, E)$, $n \ge 4$, і числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \ge 4$.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{F}_n : l_\infty(G, E) \to l_\infty(G, E)$ визначається за допомогою рівності

$$\mathcal{F}_n x = \begin{cases} F_{n-1} x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_{n-1}, \\ \omega_{1,n-1}(x)\mathcal{F}_{n-1} x, & \text{якщо} \quad r_{n-1} < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_{n-1} + 1, \\ \omega_{2,n-1}(x)\mathcal{A}_n x, & \text{якщо} \quad r_{n-1} + 1 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_{n-1} + 2, \\ \mathcal{A}_n x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} > r_{n-1} + 2. \end{cases}$$

Обмеженість, неперервність і c-неперервність цього оператора встановлюються аналогічним чином. Завдяки співвідношенню

$$\sup_{x \in l_\infty(G,E)} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_{l_\infty(G,E)} = \sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_{n-1} + 2} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_{l_\infty(G,E)} < +\infty$$

існує таке число $r_n > r_{n-1} + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_n} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_{l_\infty(G,E)} \le \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(l_\infty(G,E), l_\infty(G,E))}} - H_n. \tag{26}$$

Оператор $\mathcal{F} : l_\infty(G, E) \to l_\infty(G, E)$ визначимо за допомогою формули

$$\mathcal{F} x = \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_1, \\ \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \quad r_1 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_2, \\ \mathcal{F}_3 x, & \text{якщо} \quad r_2 < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_3, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{F}_n x, & \text{якщо} \quad r_{n-1} < \|x\|_{l_\infty(G,E)} \le r_n, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Очевидно, що звуження $\mathcal{F}|_{\mathcal{B}_{r_n}}$ і $\mathcal{F}_n|_{\mathcal{B}_{r_n}}$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_n$ на кулю $\mathcal{B}_{r_n}$ збігаються, тобто

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{B}_{r_n}} = \mathcal{F}_n|_{\mathcal{B}_{r_n}}. \tag{27}$$

Завдяки цій рівності, обмеженості, неперервності і c-неперервності операторів $\mathcal{F}_n,\ n \geq 1$, оператор $\mathcal{F}$ також є обмеженим, неперервним і c-неперервним.

Співвідношення (21) випливає із співвідношень (26) і (27).

Теорему 7 доведено.

7. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Ідею локального наближення нелінійних операторів лінійними регулярними операторами вперше використано у статтях [22 – 25] для отримання достатніх умов існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих, диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, що збігаються з необхідними умовами у випадку лінійних рівнянь.

Теореми 1, 4 та 5 цієї статті про розв'язність дискретних рівнянь у просторі $l_\infty(G, E)$ аналогічні відповідним твердженням для різницевих, диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, що досліджувалися в [22 – 25].

Аналогічні дослідження нелінійних різницевих та диференціальних рівнянь із використанням слабко регулярних операторів проведено в [26, 27].

Усі результати статті стосовно дискретних рівнянь є новими.

Приклади 1 і 2 про розв'язність різницевих рівнянь (17) і (18) у просторі $l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ наводяться вперше.

У випадку майже періодичних $\mathcal{F}$ і h обмежені розв'язки рівняння (1) при виконанні для них додаткових умов (див. [28, 29]) будуть майже періодичними.

Література

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Вища шк., 1992. – 319 с.
5. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах // Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. – 2008. – **72**. – 496 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.
7. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функцонально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660 – 662.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів у просторах обмежених на зліченній групі функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 421. – С. 105 – 108.
9. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 210 – 215.
10. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
11. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
12. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.

14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
16. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
17. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 15(49). – С. 32 – 35.
18. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. – М.: Мир, 1972. – 183 с.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
20. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и почти периодические решения линейных функциональных уравнений // Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 144 – 149.
21. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных c-непрерывных операторов в пространстве ограниченных на счетной группе функций // Дифференциально-функциональные уравнения и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 74 – 79.
22. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368 – 378.
23. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
24. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
25. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135 – 160.
26. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685 – 1698.
27. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122 – 126.
28. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407 – 418.
29. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125 – 138.

Одержано 08.07.17