УДК 517.929

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

We establish asymptotic bounds for the solutions of functional and differential-functional equations with linearly transformed arguments and constant delays.

Встановлено асимптотичні границі розв'язків функціонального та диференціально-функціонального рівнянь з лінійно перетвореними аргументами і сталими запізненнями.

В данной работе рассматриваются уравнения

$$x(t) = a_1 x\left(t - r_1\right) + \ldots + a_{n_0} x\left(t - r_{n_0}\right) + b_1 x\left(q_1 t\right) + \ldots + b_{n_1} x\left(q_{n_1} t\right) + f(t), \qquad (1)$$

где $\{a_k, b_k\} \subset \mathrm{C},\ r_k > 0,\ 0 < q_k < 1$, и

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x\left(t - r_{0,k}\right) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'\left(t - r_{1,k}\right) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k x\left(q_{0,k} t\right) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'\left(q_{1,k} t\right) + f(t), \qquad (2)$$

где $\{p_k, h_k\} \subset \mathrm{C},\ r_{0,k} \geq 0,\ r_{1,k} > 0,\ 0 < q_{0,k}, q_{1,k} < 1$, частные случаи которых изучались многими математиками. Так, в [1, 3, 18] исследовалось уравнение

$$y'(x) = ay(\lambda x) + by(x),$$

в [2, 23, 24] установлены новые свойства решений уравнения

$$y'(x) = ay(\lambda x),$$

в [4, 6, 14 – 17] построены представления общего решения и асимптотические формулы для решений уравнения

$$x'(t) = ax(t) + px(qt) + hx'(qt),$$

в [19] исследовались системы линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом линейных запаздываний, в [27, 28] изучались нелинейные системы дифференциальных уравнений с одним линейным запаздыванием, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [7] доказано существование решений уравнения

$$x'(t) = F\left(x(2t)\right)$$

с периодическим модулем, в [8] изучалось асимптотическое поведение решений систем уравнений

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-r) + p(t)x(qt),$$

в [9, 10] определены мажоранты для решений уравнения

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt),$$

в [11, 12] установлены достаточные условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + px(qt)$$

и разработан метод их стабилизации, в [20–22] исследовались функциональные и дифференциально-функциональные уравнения с конечным числом постоянных и линейных запаздываний, в [25, 26] получены асимптотические границы решений уравнения

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f(t)$$

при $a < 0$ и $a > 0$, широкий класс дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа с линейным отклонением аргумента и особенностью при производной изучался в большом цикле работ (см. [32–36] и приведенную там библиографию).

Один из наиболее сложных частных случаев функционального уравнения (1)

$$x(t) = x\,(t-1) + bx\,(qt)$$

исследовался в [22].

Дифференциальные уравнения с линейным отклонением аргумента, в которых нет зависимости от производной искомой функции с запаздывающим аргументом, находят широкие приложения в различных областях науки и техники (см. [13] и приведенную в ней библиографию). Нелинейное дифференциальное уравнение с линейным запаздыванием нейтрального типа появилось в [37], где описан класс автомодельных потенциалов в уравнении Шредингера и частично изучены собственные функции операторов симметрии, называемые когерентными состояниями. Некоторые из этих когерентных состояний (например, состояния Юрке – Столера) имеют практическое применение. Это нелинейное уравнение в окрестности постоянных решений изучалось в [21].

Несмотря на это многие вопросы теории функциональных и дифференциально-функциональных уравнений вида (1), (2) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотических свойств решений этих уравнений в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому основной целью данной работы является изучение уравнения (1) и продолжение исследования, начатого в [11], по установлению новых свойств решений уравнения (2) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов.

В дальнейшем числа M_i — неотрицательные постоянные.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма [26]. *Пусть*:

1) $\mu < 0$, $\gamma > 0$ *и* l — *комплексное число такое, что* $|l| = e^{\gamma\mu}$;

2) $W(s)$ — *решение разностного уравнения*

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где $G(s)$ — *непрерывная функция такая, что*

$$|G(s)| \le M_1 e^{-\beta s}, \quad s \ge s_0,$$

для некоторых положительных величин β, s_0 *и* $|W(s)| \le M_2$ *для* $s \in [s_0+\mu, s_0]$.

Тогда:

1) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\gamma s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma < \beta$;

2) $|W(s)| \leq M_3 s e^{-\gamma s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma = \beta$;

3) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\beta s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma > \beta$.

Пусть $Y(t)$ — решение задачи

$$Y(t) = a_1 Y(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} Y(t - r_{n_0}) + 1, \quad t \geq 0,$$

$$Y(t) = 0, \quad t < 0,$$

где $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{n_0} \overset{\text{df}}{=} r < +\infty$. Функция $Y(t)$, как известно [29] (гл. 12), удовлетворяет условию

$$\operatorname*{var}_{s\in[t-r,t]} Y(s) \leq K e^{\alpha t},$$

где $\alpha > \sup\{\operatorname{Re} z \,|1 - a_1 e^{-zr_1} - \ldots - a_n e^{-zr_{n_0}} = 0\} \overset{\text{df}}{=} \alpha_D$, а K — некоторая постоянная.

Теорема 1. *Пусть*:

1) *выполняется условие* $\alpha_D < 0$;

2) *параметры* $v \in \mathrm{R}$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v > \beta \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, 1 = \frac{b_1 e^{\lambda \ln q_1} + \ldots + b_{n_1} e^{\lambda \ln q_{n_1}}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}\right\},$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1\right)\left(\left|b_1 q_1^{j+v}\right| + \ldots + \left|b_{n_1} q_{n_1}^{j+v}\right|\right) < 1;$$

3) *функция* $f(t) \in C^j(0, +\infty)$, $f^{(m)}(t) = O(t^{\alpha - m})$, $t \to +\infty$, $\alpha \in \mathrm{R}$, $m = \overline{0, j}$, *и* $v \geq \alpha$.

Тогда для каждого j *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения* (1) *выполняется оценка* $x(t) = O(t^v)$, $t \to +\infty$.

Доказательство. Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (1) j раз, получаем $j + 1$ дифференциальное уравнение

$$x^{(m)}(t) = a_1 x^{(m)}(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} x^{(m)}(t - r_{n_0}) + b_1 q_1^m x^{(m)}(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^m x^{(m)}(q_{n_1} t) +$$
$$+ f^{(m)}(t), \quad m = \overline{0, j}.$$

Выполняя при $m = j$ замену переменных $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$, приходим к уравнению

$$y(t) = a_1 y(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} y(t - r_{n_0}) + b_1 q_1^{j+v} y(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} y(q_{n_1} t) +$$
$$+ a_1\left(\left(1 - \frac{r_1}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_1) + \ldots + a_{n_0}\left(\left(1 - \frac{r_{n_0}}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_{n_0}) + t^{-v} f^{(j)}(t).$$

Запишем его в интегральной форме

$$y(t) = -a_1 \int\limits_{t_0 - r_1}^{t_0} [d_\theta Y(t - \theta - r_1)]\, y(\theta) - \ldots - a_{n_0} \int\limits_{t_0 - r_{n_0}}^{t_0} [d_\theta Y(t - \theta - r_{n_0})]\, y(\theta) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} [d_\theta Y(t - \theta)] \left(b_1 q_1^{j+v} y(q_1 \theta) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} y(q_{n_1} \theta)\right) +$$

$$+b_1 q_1^{j+v} y(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} y(q_{n_1} t) -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} [d_\theta Y(t-\theta)] \left(a_1 \left(\left(1-\frac{r_1}{\theta}\right)^v - 1\right) y(\theta - r_1) + \ldots + a_{n_0} \left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{\theta}\right)^v - 1\right) y(\theta - r_{n_0}) \right) +$$

$$+a_1 \left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} \left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_{n_0}) -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} [d_\theta Y(t-\theta)]\, \theta^{-v} f^{(j)}(\theta) + t^{-v} f^{(j)}(t).$$

Разобьем правую часть последнего уравнения на четыре группы слагаемых и оценим каждую из них отдельно, приняв во внимание первое и третье условия теоремы:

$$\left| -a_1 \int\limits_{t_0-r_1}^{t_0} [d_\theta Y(t-\theta-r_1)]\, y(\theta) - \ldots - a_{n_0} \int\limits_{t_0-r_{n_0}}^{t_0} [d_\theta Y(t-\theta-r_{n_0})]\, y(\theta) \right| \leq$$

$$\leq M \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |y(s)|,$$

где M — некоторая константа,

$$\left| -\int\limits_{t_0}^{t} [d_\theta Y(t-\theta)] \left(b_1 q_1^{j+v} y(q_1\theta) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} y(q_{n_1}\theta) \right) + \right.$$

$$\left. +b_1 q_1^{j+v} y(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} y(q_{n_1} t) \right| \leq$$

$$\leq \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \left(\left| b_1 q_1^{j+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} \right| \right) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|.$$

Пусть $t_0 \geq T$, где T — некоторый параметр. Обозначим

$$\sup_{t\geq T} \left(|a_1| \left| \left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v - 1 \right| + \ldots + |a_{n_0}| \left| \left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v - 1 \right| \right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} l(T),$$

тогда

$$\left| -\int\limits_{t_0}^{t} [d_\theta Y(t-\theta)] \left(a_1 \left(\left(1-\frac{r_1}{\theta}\right)^v - 1\right) y(\theta - r_1) + \ldots + a_{n_0} \left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{\theta}\right)^v - 1\right) y(\theta - r_{n_0}) \right) + \right.$$

$$\left. +a_1 \left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} \left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v - 1\right) y(t - r_{n_0}) \right| \leq$$

$$\leq \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) l(T) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|,$$

$$\left| - \int\limits_{t_0}^{t} \left[d_\theta Y(t-\theta) \right] \theta^{-v} f^{(j)}(\theta) + t^{-v} f^{(j)}(t) \right| \leq M_4, \quad t \geq t_0.$$

Теперь можно записать оценку для $y(t)$:

$$|y(t)| \leq (M+1) \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |y(s)| + M_4 +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \left(\left| b_1 q_1^{j+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} \right| + l(T) \right) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|, \quad t \geq t_0 \geq T.$$

Функция в правой части является неубывающей, поэтому из последнего неравенства следует

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)| \leq (M+1) \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |y(s)| + M_4 + \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \times$$

$$\times \left(\left| b_1 q_1^{j+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} \right| + l(T) \right) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|.$$

Поскольку по условию теоремы $\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \left(\left| b_1 q_1^{j+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{j+v} \right| \right) < 1$ и $l(T) \to 0,\ T \to +\infty$, то можем считать T настолько большим, что выполняется соотношение

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \left(\left| b_1 q_1^{m+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{m+v} \right| + l(T) \right) < 1.$$

Тогда имеем

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)| \leq \frac{(M+1) \sup\limits_{s\in[r(t_0),t_0]} |y(s)| + M_4}{1 - \left(\operatorname*{var}\limits_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1 \right) \left(\left| b_1 q_1^{m+v} \right| + \ldots + \left| b_{n_1} q_{n_1}^{m+v} \right| + l(T) \right)},$$

откуда получаем $x^{(j)}(t) = O(t^v),\ t \to +\infty$.

Обратимся к уравнению для производной $(j-1)$-го порядка. Запишем его в виде

$$x^{(j-1)}(t) = \frac{b_1 q_1^{j-1} x^{(j-1)}(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1} x^{(j-1)}(q_{n_1} t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$

$$+ \frac{a_1 \left(x^{(j-1)}(t-r_1) - x^{(j-1)}(t) \right) + \ldots + a_{n_0} \left(x^{(j-1)}(t-r_{n_0}) - x^{(j-1)}(t) \right) + f^{(j-1)}(t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}.$$

Для краткости обозначим

$$g(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{a_1 \left(x^{(j-1)}(t-r_1) - x^{(j-1)}(t) \right) + \ldots + a_{n_0} \left(x^{(j-1)}(t-r_{n_0}) - x^{(j-1)}(t) \right) + f^{(j-1)}(t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}$$

и, соответственно,

$$x^{(j-1)}(t) = \frac{b_1 q_1^{j-1} x^{(j-1)}(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1} x^{(j-1)}(q_{n_1} t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + g(t). \tag{3}$$

Оценим функцию $g(t)$. Для этого запишем ее с помощью теоремы Лагранжа следующим образом:

$$g(t) = \frac{-a_1 x^{(j)}\left(t - \theta_{1,j}(t) r_1\right) r_1 - \ldots - a_{n_0} x^{(j)}\left(t - \theta_{n_0,j}(t) r_{n_0}\right) r_{n_0} + f^{(j-1)}(t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}},$$

где $0 < \theta_{k,j}(t) < 1,\ k = \overline{1, n_0}$. С учетом мажоранты для $x^{(j)}(t)$ и третьего условия теоремы функцию $g(t)$ можно оценить так: $g(t) = O(t^v),\ t \to +\infty$. Выполняя в уравнении (3) замену переменных $x^{(j-1)}(t) = t^v y(t)$, получаем

$$y(t) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} y\left(q_1 t\right) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} y\left(q_{n_1} t\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + t^{-v} g(t).$$

С помощью замены $y(t) = z(\ln t)$ перейдем к разностному уравнению

$$z(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} z\left(\tau + \ln q_1\right) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} z\left(\tau + \ln q_{n_1}\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + e^{-v\tau} g\left(e^{\tau}\right),$$

$$\tau = \ln t \geq \tau_0 = \ln t_0.$$

По условию теоремы $v > \beta$. Следовательно, для однородного разностного уравнения

$$w(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} w\left(\tau + \ln q_1\right) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} w\left(\tau + \ln q_{n_1}\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}$$

верхняя граница действительных частей корней характеристического уравнения удовлетворяет условию

$$\sup \left\{ \operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, 1 = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} e^{\lambda \ln q_1} + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} e^{\lambda \ln q_{n_1}}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} \right\} = \beta - v - (j-1) < 0.$$

Следовательно, разностное уравнение для функции $w(\tau)$ асимптотически устойчиво. Обозначим его фундаментальное решение символом $Z_{v+j-1}(\tau)$ и запишем $z(\tau)$ в интегральной форме

$$z(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v}}{1 - \sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0 + \ln q_1}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+j-1}\left(\tau - \theta + \ln q_1\right)\right] z(\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v}}{1 - \sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0 + \ln q_{n_1}}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+j-1}\left(\tau - \theta + \ln q_{n_1}\right)\right] z(\theta) -$$

$$- \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left[d_s Z_{v+j-1}(\tau - s)\right] e^{-vs} g\left(e^s\right) + e^{-v\tau} g\left(e^{\tau}\right).$$

С учетом мажоранты для $g(t)$ оценим модуль решения:

$$|z(\tau)| \leq \Lambda_{j-1} \frac{1}{t_0^v} \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} \left| x^{(j-1)}(s) \right| + \left(\operatorname*{var}_{s \in [0, +\infty)} Z_{v+j-1}(s) + 1 \right) M_5, \quad \tau \geq \tau_0,$$

где Λ_{j-1} — некоторая константа, или $|y(t)| \leq M_6,\ t \geq r(t_0)$. Отсюда получаем $x^{(j-1)}(t) = O(t^v),\ t \to +\infty$.

Действуя аналогичным образом в случае производных меньшего порядка, получаем следующий результат: $x^{(m)}(t) = O(t^v),\ t \to +\infty,\ m = \overline{0, j}$.

Теорема 1 доказана.

Отдельно рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$x(t) = a_1 x\,(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} x\,(t - r_{n_0}) + bx\,(qt) + f(t). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть*:

1) $\alpha_D < 0,\ b \neq 0$ *и* $v_0 \overset{\text{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left| \dfrac{b}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} \right|$;

2) *параметр* $j \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$ *удовлетворяет неравенству* $\left(\underset{s \in [0, +\infty)}{\text{var}} Y(s) + 1 \right) \left| bq^{j + v_0} \right| < 1$;

3) *функция* $f(t) \in C^{j+1}(0, +\infty)$ *и* $f^{(m)}(t) = O(t^{\alpha - m}),\ t \to +\infty,\ \alpha \in \mathrm{R},\ m = \overline{0, j+1}$.

Тогда для каждого $j + 1$ *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения* (4) *выполняются оценки*:

I) $x(t) = O(t^{v_0}),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha < v_0$;

II) $x(t) = O(t^{v_0} \ln t),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha = v_0$;

III) $x(t) = O(t^{\alpha}),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha > v_0$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, запишем уравнение (4) в виде

$$x(t) = \frac{bx\,(qt)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + \frac{a_1\,(x\,(t - r_1) - x(t)) + \ldots + a_{n_0}\,(x\,(t - r_{n_0}) - x(t))}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$

$$+ \frac{f(t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}.$$

Вводя обозначение $g(t) \overset{\text{df}}{=} \dfrac{a_1\,(x\,(t - r_1) - x(t)) + \ldots + a_{n_0}\,(x\,(t - r_{n_0}) - x(t))}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}$, получаем

$$x(t) = \frac{bx\,(qt)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + g(t) + \frac{f(t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}. \tag{5}$$

Для последующей оценки функции $g(t)$ представим ее с помощью теоремы Лагранжа следующим образом:

$$g(t) = \frac{-a_1 x'\,(t - \theta_1(t) r_1)\, r_1 - \ldots - a_{n_0} x'\,(t - \theta_{n_0}(t) r_{n_0})\, r_{n_0}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}},$$

где $0 < \theta_k(t) < 1,\ k = \overline{1, n_0}$. В силу теоремы 1

$$x(t) = O\Big(t^{\max\{v_0 + \varepsilon, \alpha\}}\Big) = O\Big(t^{\max\{v_0, \alpha\} + \varepsilon}\Big), \quad t \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная величина. Если применить теорему 1 к уравнению

$$x'(t) = a_1 x'\,(t - r_1) + \ldots + a_{n_0} x'\,(t - r_{n_0}) + bqx'\,(qt) + f'(t),$$

то аналогично для производной получим оценку

$$x'(t) = O\Big(t^{\max\{v_0 - 1 + \varepsilon, \alpha - 1\}}\Big) = O\Big(t^{\max\{v_0 + \varepsilon, \alpha\} - 1}\Big) = O\Big(t^{\max\{v_0, \alpha\} + \varepsilon - 1}\Big), \quad t \to \infty.$$

Отсюда следует равенство $g(t) = O\big(t^{\max\{v_0, \alpha\} + \varepsilon - 1}\big),\ t \to \infty$.

Определим для краткости $h \overset{\text{df}}{=} \max\{v_0, \alpha\} + \varepsilon,\ \mu \overset{\text{df}}{=} \ln q$ и выполним в уравнении (5) замену переменных $x(t) = t^h W(\ln t),\ t = e^s$:

$$W(s) - \left(1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} bq^h W(s+\mu) = e^{-hs} g\left(e^s\right) + \left(1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} e^{-hs} f\left(e^s\right).$$

Обозначим $l \overset{\text{df}}{=} \left(1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} bq^h,\ G(s) \overset{\text{df}}{=} e^{-hs} g\left(e^s\right) + \left(1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} e^{-hs} f\left(e^s\right)$, тогда

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где $|l| = \left|\left(1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} bq^h\right| = e^{(h-v_0)\mu}$ и $|G(s)| \le M_7 e^{-s} + M_8 e^{(\alpha-h)s}$. Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2 дословно повторяют рассуждения из [26].

Случай I: $\alpha < v_0$. Если $v_0 < \alpha + 1$, выберем h так, чтобы $v_0 < h < \alpha + 1$. Тогда $|G(s)| \le (M_7 + M_8)\, e^{(\alpha-h)s},\ s \ge s_0$. Определим $\gamma \overset{\text{df}}{=} h - v_0,\ \beta \overset{\text{df}}{=} h - \alpha$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \le M_9 e^{(v_0-h)s},\ s \ge s_0$, т. е. $x(t) = e^{hs} W(s) = O(t^{v_0}),\ t \to +\infty$.

Если $v_0 \ge \alpha + 1$, выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \le (M_7 + M_8)\, e^{-s},\ s \ge s_0$. Определим $\gamma \overset{\text{df}}{=} h - v_0,\ \beta \overset{\text{df}}{=} 1$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \le M_{10} e^{(v_0-h)s},\ s \ge s_0$, т. е. $x(t) = O(t^{v_0}),\ t \to +\infty$.

Случай II: $\alpha = v_0$. Выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \le (M_7 + M_8)\, e^{(\alpha-h)s},\ s \ge s_0$. Из леммы получаем $|W(s)| \le M_{11} s e^{(v_0-h)s},\ s \ge s_0$, т. е. $x(t) = O(t^{v_0} \ln t),\ t \to +\infty$.

Случай III: $\alpha > v_0$. Выберем $h = \alpha + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \le (M_7 + M_8)\, e^{(\alpha-h)s},\ s \ge s_0$, и $\gamma \overset{\text{df}}{=} h - v_0 > \beta \overset{\text{df}}{=} h - \alpha$. Из леммы получаем $|W(s)| \le M_{12} e^{(\alpha-h)s},\ s \ge s_0$, т. е. $x(t) = O(t^\alpha)$, $t \to +\infty$.

Теорема 2 доказана.

Для фундаментального решения дифференциально-разностного уравнения

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x\left(t - r_{0,k}\right) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'\left(t - r_{1,k}\right)$$

(обозначим его символом $X(t)$) справедливы оценки [29] (гл. 1, 12)

$$|X(t)| \le k_1 e^{\alpha t}, \qquad \operatorname*{var}_{[t-r_{\max},t]} X \le k_2 e^{\alpha t}, \quad t \ge 0, \tag{6}$$

где $\sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{n_1} b_k e^{-\lambda r_{1,k}}\right) - \sum_{k=1}^{n_0} a_k e^{-\lambda r_{0,k}} = 0\right\} \overset{\text{df}}{=} \alpha_0 < \alpha,\ k_1$ и k_2 — некоторые постоянные, $r_{\max} \overset{\text{df}}{=} \max\{r_{0,k}, r_{1,k}\}$.

Теорема 3. *Пусть*:

1) *выполняется условие* $\alpha_0 < 0$;

2) *параметры* $v \in R$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v > \beta \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\operatorname{Re}\mu \,\middle|\, 1 = -\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m_0} p_k e^{\mu \ln q_{0,k}}\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{m_0} |p_k|\, q_{0,k}^{v+j} \int\limits_0^{+\infty} |X(s)|\, ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k|\, q_{1,k}^{v+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k|\, q_{1,k}^{v+j-1} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) < 1;$$

3) *функция* $f(t) \in C^j(0,+\infty)$, $f^{(m)}(t) = O(t^{\alpha-m})$, $t \to +\infty$, $\alpha \in \mathrm{R}$, $m = \overline{0,j}$, *и* $v \geq \alpha$.

Тогда для каждого $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения* (2) *выполняется оценка* $x(t) = O(t^v)$, $t \to +\infty$.

Доказательство. Из условия $\alpha_0 < 0$ получаем неравенство $\sum_{k=1}^{n_0} a_k \neq 0$. Поэтому из условия $\alpha_0 < 0$ и неравенств (6) следует справедливость второго условия теоремы для некоторых v и j.

Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (2) j раз, получаем $j+1$ уравнение

$$x^{(m+1)}(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m)}(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t - r_{1,k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}(q_{0,k} t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k} t) + f^{(m)}(t), \quad m = \overline{0,j}.$$

При $m = j$ для производной $x^{(j)}(t)$ выполним замену переменных $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$. Тогда получим

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k y(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y'(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} y(q_{0,k} t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j} y'(q_{1,k} t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_0} a_k \left[\left(1 - \frac{r_{0,k}}{t}\right)^v - 1\right] y(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1 - \frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v-1} \frac{1}{t} y(t - r_{1,k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_1} b_k \left[\left(1 - \frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right] y'(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v+j-1} \frac{1}{t} y(q_{1,k} t) - v\frac{1}{t} y(t) + t^{-v} f^{(j)}(t).$$

Запишем это уравнение в интегральной форме

$$y(t) = X(t - t_0)\left(y(t_0) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k y(t_0 - r_{1,k})\right) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k \int\limits_{t_0 - r_{0,k}}^{t_0} X(t - \theta - r_{0,k}) y(\theta) d\theta -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} b_k \int\limits_{t_0 - r_{1,k}}^{t_0} y(\theta) dX(t - \theta - r_{1,k}) - X(t - t_0) \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} y(q_{1,k} t_0) -$$

$$- X(t - t_0) \sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1 - \frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^v - 1\right) y(t_0 - r_{1,k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{t_0}^{t} X(t - s) y(q_{0,k} s)\, ds + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} y(q_{1,k} t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} \int_{t_0}^{t} y(q_{1,k}s)dX(t-s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_0} a_k \int_{t_0}^{t} X(t-s)\left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{s}\right)^{v}-1\right] y\left(s-r_{0,k}\right) ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1} b_k v \int_{t_0}^{t} X(t-s)\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{1}{s} y\left(s-r_{1,k}\right) ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v}-1\right) y(t-r_{1,k})-$$

$$-\int_{t_0}^{t} X(t-s)\left[\sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{r_{1,k}}{s^2} y(s-r_{1,k})\right] ds-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int_{t_0}^{t} \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v}-1\right) y(s-r_{1,k})dX(t-s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v+j-1} \int_{t_0}^{t} X(t-s)\frac{1}{s} y\left(q_{1,k}s\right) ds - v\int_{t_0}^{t} X(t-s)\frac{1}{s} y(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t} X(t-s)s^{-v} f^{(j)}(s)ds, \quad t \geq t_0.$$

Учитывая (6) и третье условие теоремы, имеем

$$\Bigg| X(t-t_0)\left(y(t_0)-\sum_{k=1}^{n_1} b_k y\left(t_0-r_{1,k}\right)\right)+\sum_{k=1}^{n_0} a_k \int_{t_0-r_{0,k}}^{t_0} X(t-\theta-r_{0,k})y(\theta)d\theta-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int_{t_0-r_{1,k}}^{t_0} y(\theta)dX(t-\theta-r_{1,k})-$$

$$-\sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} X(t-t_0)y(q_{1,k}t_0)-X(t-t_0)\sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^{v}-1\right) y(t_0-r_{1,k})\Bigg| \leq$$

$$\leq \Bigg(|X(t-t_0)|\left(1+\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\right)+\sum_{k=1}^{n_0}|a_k| \int_{t_0-r_{0,k}}^{t_0} |X(t-\theta-r_{0,k})|\, d\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\operatorname*{var}_{s\in\left[t-t_0-r_{1,k},t-t_0\right]}X(s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|\,q_{1,k}^{v+j-1}\,|X(t-t_0)|+|X(t-t_0)|\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\left|\left(1-\frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^{v}-1\right|\Bigg)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|\leq$$

$$\leq M(T)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|\,,$$

где $t_0\geq T,\ M(T)$ — некоторые константы,

$$\left|\sum_{k=1}^{m_0}p_kq_{0,k}^{v+j}\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)y\left(q_{0,k}s\right)ds+\sum_{k=1}^{m_1}h_kq_{1,k}^{v+j-1}y(q_{1,k}t)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m_1}h_kq_{1,k}^{v+j-1}\int\limits_{t_0}^{t}y(q_{1,k}s)dX(t-s)\right|\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{m_0}|p_k|\,q_{0,k}^{v+j}\int\limits_{0}^{+\infty}|X(s)|\,ds+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|\,q_{1,k}^{v+j-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|\,q_{1,k}^{v+j-1}\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}X(s)\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|\,,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0}a_k\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{s}\right)^{v}-1\right]y\left(s-r_{0,k}\right)ds+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}b_kv\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1}\frac{1}{s}y\left(s-r_{1,k}\right)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}b_k\left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v}-1\right)y(t-r_{1,k})-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\left[\sum_{k=1}^{n_1}b_kv\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1}\frac{r_{1,k}}{s^2}y(s-r_{1,k})\right]ds-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1}b_k\int\limits_{t_0}^{t}\left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v}-1\right)y(s-r_{1,k})dX(t-s)+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_1}h_kvq_{1,k}^{v+j-1}\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\frac{1}{s}y\left(q_{1,k}s\right)ds-v\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\frac{1}{s}y(s)ds\right|\leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \int\limits_{t_0}^{t} \left| X(t-s) \left[\left(1 - \frac{r_{0,k}}{s}\right)^v - 1 \right] \right| ds + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k v| \int\limits_{t_0}^{t} \left| X(t-s) \left(1 - \frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{1}{s} \right| ds + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \left| \left(1 - \frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1 \right| + \int\limits_{t_0}^{t} |X(t-s)| \sum_{k=1}^{n_1} \left| b_k v \left(1 - \frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{r_{1,k}}{s^2} \right| ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \sup_{s \geq t_0} \left| \left(1 - \frac{r_{1,k}}{s}\right)^v - 1 \right| \underset{s \in [0,+\infty)}{\mathrm{var}} X(s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_1} |h_k v| \, q_{1,k}^{v+j-1} \int\limits_{t_0}^{t} \left| X(t-s) \frac{1}{s} \right| ds +$$

$$\left. + |v| \int\limits_{t_0}^{t} \left| X(t-s) \frac{1}{s} \right| ds \right) \sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \stackrel{\mathrm{df}}{=} l(T,t) \sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \, ,$$

где $t_0 \geq T$, $\sup_{t \geq T} l(T,t) \to 0$, $T \to +\infty$;

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s) s^{-v} f^{(j)}(s) ds \right| \leq M_{12}$$

для всех $t \geq t_0$. Следовательно, справедливо соотношение

$$|y(t)| \leq M(T) \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} |y(s)| + M_{12} + \left(\sum_{k=1}^{m_0} |p_k| \, q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{0}^{+\infty} |X(s)| \, ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} \underset{s \in [0,+\infty)}{\mathrm{var}} X(s) + \sup_{t \geq T} l(T,t) \right) \sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \, .$$

Поскольку $M(T) \geq 1$ и функция в правой части является неубывающей, то получаем

$$\sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \leq M(T) \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} |y(s)| + M_{12} + \left(\sum_{k=1}^{m_0} |p_k| \, q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{0}^{+\infty} |X(s)| \, ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} \underset{s \in [0,+\infty)}{\mathrm{var}} X(s) + \sup_{t \geq T} l(T,t) \right) \sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \, .$$

Отсюда (в силу второго условия теоремы) при достаточно большом T находим

$$\sup_{s \in [r(t_0), t]} |y(s)| \leq \left(1 - \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| \, q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{0}^{+\infty} |X(s)| \, ds - \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v+j-1} \underset{s \in [0,+\infty)}{\mathrm{var}} X(s) - \sup_{t \geq T} l(T,t) \right)^{-1} \left(M(T) \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} |y(s)| + M_{12} \right)$$

и, следовательно, $x^{(j)}(t) = O(t^v),\ t \to +\infty$.

Для $0 \le m \le j-1$ предположим, что $x^{(m+1)}(t) = O(t^v),\ t \to +\infty$. Запишем дифференциальное уравнение для $x^{(m)}(t)$ в другой форме

$$x^{(m)}(t) = -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}\left(q_{0,k}t\right) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left(x^{(m)}(t) - x^{(m)}\left(t - r_{0,k}\right)\right) + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}\left(t - r_{1,k}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}\left(q_{1,k}t\right) - f^{(m)}(t)\right).$$

С помощью теоремы Лагранжа запишем разности $x^{(m)}(t) - x^{(m)}\left(t - r_{0,k}\right) = x^{(m+1)}(t - \theta_{0,k}^m(t))r_{0,k},\ 0 < \theta_{0,k}^m(t) < r_{0,k}$. Тогда

$$x^{(m)}(t) = -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}\left(q_{0,k}t\right) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)}\left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}\left(t - r_{1,k}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}\left(q_{1,k}t\right) - f^{(m)}(t)\right).$$

Выполнив замену переменных $x^{(m)}(t) = t^v y(t)$, получим

$$y(t) = -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{m+v} y\left(q_{0,k}t\right) + t^{-v}\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)}\left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}\left(t - r_{1,k}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}\left(q_{1,k}t\right) - f^{(m)}(t)\right).$$

На основании сделанного предположения об асимптотическом поведении производной $x^{(m+1)}(t)$ оценим неоднородность в уравнении для функции $y(t)$, обозначив ее символом

$$g(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-v}\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)}\left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}\left(t - r_{1,k}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}\left(q_{1,k}t\right) - f^{(m)}(t)\right), \tag{7}$$
$$|g(t)| \le M_{13}, \quad t \ge t_0 \ge T.$$

Запишем уравнение для $y(t)$ в новых обозначениях:

$$y(t)=-\left(\sum_{k=1}^{n_0}a_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{m_0}p_kq_{0,k}^{m+v}y\left(q_{0,k}t\right)+g(t),\quad t\geq t_0.$$

Выполняя в нем замену переменных $y\left(e^{\tau}\right)=z(\tau)$, получаем

$$z(\tau)=-\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\sum_{k=1}^{m_0}p_kq_{0,k}^{v+m}z\left(\tau+\ln q_{0,k}\right)+g\left(e^{\tau}\right),\quad \tau=\ln t\geq\tau_0=\ln t_0. \tag{8}$$

Характеристическое уравнение для однородного разностного уравнения

$$w(\tau)=-\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\sum_{k=1}^{m_0}p_kq_{0,k}^{v+m}w\left(\tau+\ln q_{0,k}\right)$$

имеет вид

$$D(\lambda)\stackrel{\mathrm{df}}{=}1+\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\sum_{k=1}^{m_0}p_ke^{(\lambda+v+m)\ln q_{0,k}}=0.$$

В силу второго условия теоремы имеем $\sup\left\{\operatorname{Re}\lambda\,|\,D(\lambda)=0\right\}=\beta-v-m<0$. Следовательно, разностное уравнение для функции $w(\tau)$ асимптотически устойчиво. Обозначим его фундаментальное решение символом $Z_{v+m}(\tau)$ и запишем уравнение (8) в интегральной форме

$$z\left(\tau\right)=\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}p_1q_{0,1}^{v+m}\int\limits_{\tau_0+\ln q_{0,1}}^{\tau_0}\left[d_{\theta}Z_{v+m}\left(\tau-\theta+\ln q_{0,1}\right)\right]z\left(\theta\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}p_{m_0}q_{0,m_0}^{v+m}\int\limits_{\tau_0+\ln q_{0,m_0}}^{\tau_0}\left[d_{\theta}Z_{v+m}\left(\tau-\theta+\ln q_{0,m_0}\right)\right]z\left(\theta\right)-$$

$$-\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\left[d_sZ_{v+m}(\tau-s)\right]g\left(e^{s}\right)+g\left(e^{\tau}\right),\quad \tau\geq\tau_0.$$

Учитывая (7), оцениваем модуль решения $\left|z\left(\tau\right)\right|\leq M_{14},\ \tau\geq\tau_0$. Отсюда получаем $|y(t)|\leq$ $\leq M_{15},\ t\geq t_0$. Следовательно, $x^{(m)}(t)=O(t^{v}),\ t\to+\infty$. Тем самым мы доказали (методом математической индукции) последнюю оценку для всех $m=\overline{0,j}$.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (2):

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{n_0}a_kx\left(t-r_{0,k}\right)+\sum_{k=1}^{n_1}b_kx'\left(t-r_{1,k}\right)+px\left(qt\right)+\sum_{k=1}^{m_1}h_kx'\left(q_{1,k}t\right)+f(t) \tag{9}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть*:

1) $\alpha_0 < 0,\ p \neq 0$ *и* $v_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left| p \left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j \right)^{-1} \right|$;

2) *параметр* $j \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{m_0} |p| \, q^{v_0+j} \int\limits_0^{+\infty} |X(s)| \, ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v_0+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| \, q_{1,k}^{v_0+j-1} \operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} X(s) < 1;$$

3) *функция* $f(t) \in C^{j+1}(0,+\infty)$ *и* $f^{(m)}(t) = O(t^{\alpha-m}),\ t \to +\infty,\ \alpha \in \mathrm{R},\ m = \overline{0, j+1}$.

Тогда для каждого $j+2$ *раза непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения* (9) *выполняются оценки*:

I) $x(t) = O(t^{v_0}),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha < v_0$;

II) $x(t) = O(t^{v_0} \ln t),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha = v_0$;

III) $x(t) = O(t^{\alpha}),\ t \to +\infty$, *если* $\alpha > v_0$.

Доказательство. Запишем уравнение (9) в форме

$$x(t) = -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} px\,(qt) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left(x(t) - x\,(t - r_{0,k}) \right) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'\,(t - r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'\,(q_{1,k} t) + x'(t) - f(t) \right).$$

Поскольку в силу теоремы Лагранжа имеем $x(t) - x\,(t - r_{0,k}) = x'\,(t - \theta_{0,k}(t))\, r_{0,k},\ 0 < < \theta_{0,k}(t) < r_{0,k},\ k = \overline{1, n_0}$, то уравнение (9) принимает вид

$$x(t) = -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} px\,(qt) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x'\,(t - \theta_{0,k}(t))\, r_{0,k} - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'\,(t - r_{1,k}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'\,(q_{1,k} t) + x'(t) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} f(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$
$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} px\,(qt) + g(t) - \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \right)^{-1} f(t). \qquad (10)$$

В силу теоремы 3

$$x(t) = O\Big(t^{\max\{v_0+\varepsilon, \alpha\}} \Big) = O\Big(t^{\max\{v_0, \alpha\}+\varepsilon} \Big), \quad t \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная величина. Если применить теорему 3 к уравнению

$$x''(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x'\,(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x''\,(t - r_{1,k}) + pqx'\,(qt) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k} x''\,(q_{1,k} t) + f'(t),$$

то аналогично для производной получим оценку

$$x'(t) = O\Big(t^{\max\{v_0-1+\varepsilon, \alpha-1\}} \Big) = O\Big(t^{\max\{v_0+\varepsilon, \alpha\}-1} \Big) = O\Big(t^{\max\{v_0, \alpha\}+\varepsilon-1} \Big), \quad t \to \infty.$$

Отсюда следует равенство $g(t) = O\big(t^{\max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon-1}\big),\ t\to\infty.$

Определим для краткости $h \overset{\text{df}}{=} \max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon,\ \mu \overset{\text{df}}{=} \ln q$ и выполним в уравнении (10) замену переменных $x(t) = t^h W(\ln t),\ t = e^s$:

$$W(s) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} pq^h W(s+\mu) = e^{-hs} g\left(e^s\right) - \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} e^{-hs} f\left(e^s\right).$$

Обозначим $l \overset{\text{df}}{=} -\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} pq^h,\ G(s) \overset{\text{df}}{=} e^{-hs} g\left(e^s\right) - \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} e^{-hs} f\left(e^s\right),$ тогда

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где $|l| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1} pq^h\right| = e^{(h-v_0)\mu}$ и $|G(s)| \le M_{16}e^{-s} + M_{17}e^{(\alpha-h)s}$. Дальнейшие рассуждения доказательства дословно повторяют завершение доказательства теоремы 2.

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi'(t) = \beta\Phi(qt) + \zeta\Phi'(qt) + f(t), \tag{11}$$

где $\{\beta,\zeta\} \subset \mathrm{C},\ 0<q<1$ и $f\colon (0,+\infty) \to \mathrm{C}$ — непрерывная функция.

Выполним в уравнении (11) замену $\Phi(t) = y\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$:

$$y'(x) = e^{\ln q^{-1}\cdot x + \ln|\beta| + i\arg\beta + \ln\ln q^{-1}} y(x-1) +$$

$$+\frac{\zeta}{q} y'(x-1) + e^{\ln q^{-1}\cdot x + \ln\ln q^{-1}} f\left(e^{\ln q^{-1}\cdot x}\right), \quad x = \frac{\ln t}{\ln q^{-1}}.$$

Введем новые обозначения $\ln q^{-1} \overset{\text{df}}{=} a > 0,\ \ln|\beta| + i\arg\beta + \ln\ln q^{-1} \overset{\text{df}}{=} b \in \mathrm{C},\ \dfrac{\zeta}{q} \overset{\text{df}}{=} c \in \mathrm{C}$:

$$y'(x) = e^{ax+b} y(x-1) + cy'(x-1) + e^{ax+\ln\ln q^{-1}} f\left(e^{ax}\right). \tag{12}$$

В [2, 23] вычислена функция

$$H(x) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2}a\left(x - a^{-1}\log x\right)^2 + \left(1 + b + \frac{1}{2}a - \ln a\right)x + \left(-1 + a^{-1}\ln a - a^{-1}b\right)\log x -$$

$$-\frac{1}{2}a^{-2}x^{-1}\log^2 x + a^{-2}\left(a + b - \ln a\right)x^{-1}\log x,$$

в частности в [23] — как решение функционального уравнения

$$\frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Выполним в уравнении (12) замену $y(x) = e^{H(x)} z(x)$:

$$z'(x) = -H'(x)z(x) + e^{H(x-1)-H(x)}\left\{e^{ax+b} + H'(x-1)c\right\} z(x-1) +$$

$$+ e^{H(x-1)-H(x)} cz'(x-1) + e^{-H(x)} e^{ax+\ln\ln q^{-1}} f\left(e^{ax}\right).$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Для непрерывно дифференцируемого решения уравнения* (11) *имеет место оценка*

$$\Phi(t) = O\left(e^{\operatorname{Re} H\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)}\left\{1 + \sum_{j=0}^{\left[\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right]} g\left(j\right)\right\}\right), \quad t \to +\infty,$$

где $g(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{-\operatorname{Re} H(x)} \int_x^{x+1} e^{as + \ln\ln q^{-1}} \left|f\left(e^{as}\right)\right| ds.$

Доказательство. Определим функцию $\operatorname{Re} H(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} H_1(x)$ и для краткости обозначим $\operatorname{Re} b \stackrel{\mathrm{df}}{=} b_1$. Выполним в уравнении (12) замену переменных $y(x) = e^{H_1(x)} z_1(x)$ и запишем дифференциальное уравнение для $z_1(x)$ в интегральной форме

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0) - H_1(x)}\left\{z_1\left(x_0\right) - e^{H_1(x_0 - 1) - H_1(x_0)} c z_1\left(x_0 - 1\right)\right\} +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s-1) - H_1(x)} e^{as+b} z_1(s-1) ds + e^{H_1(x-1) - H_1(x)} c z_1(x-1) +$$

$$+ e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{as + \ln\ln q^{-1}} f\left(e^{as}\right) ds.$$

Запишем последнее уравнение следующим образом:

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0) - H_1(x)}\left\{z_1\left(x_0\right) - e^{H_1(x_0 - 1) - H_1(x_0)} c z_1\left(x_0 - 1\right)\right\} +$$

$$+ e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)} H_1'(s) \frac{e^{H_1(s-1) - H_1(s) + as + b_1}}{H_1'(s)} e^{\mathrm{i}\operatorname{Im} b} z_1(s-1) ds + e^{H_1(x-1) - H_1(x)} c z_1(x-1) +$$

$$+ e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{as + \ln\ln q^{-1}} f\left(e^{as}\right) ds.$$

Как и $H(x)$, функция $H_1(x)$ является решением функционального уравнения

$$\frac{e^{H_1(x-1) - H_1(x) + ax + b_1}}{H_1'(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Отсюда получаем

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0) - H_1(x)}\left\{z_1\left(x_0\right) - e^{H_1(x_0 - 1) - H_1(x_0)} c z_1\left(x_0 - 1\right)\right\} +$$

$$+ e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)} H_1'(s) \left(1 + O\left(s^{-2}\right)\right) e^{\mathrm{i}\operatorname{Im} b} z_1(s-1) ds + e^{H_1(x-1) - H_1(x)} c z_1(x-1) +$$

$$+ e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{as + \ln\ln q^{-1}} f\left(e^{as}\right) ds.$$

Ограничим $x_0 \le x \le x_0+1$ и будем считать x_0 достаточно большим, тогда

$$|z_1(x)| \le e^{H_1(x_0)-H_1(x)} \left\{ |z_1(x_0)| + e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)} |c| \, |z_1(x_0-1)| \right\} +$$

$$+e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)} H_1'(s) \left(1+Ls^{-2}\right) |z_1(s-1)| \, ds + e^{H_1(x-1)-H_1(x)} |c| \, |z_1(x-1)| +$$

$$+e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{as+\ln\ln q^{-1}} |f(e^{as})| \, ds \le$$

$$\le e^{H_1(x_0)-H_1(x)} \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| + e^{H_1(x_0-1)-H_1(x)} |c| \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| +$$

$$+e^{-H_1(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)} H_1'(s) ds \left(1+Lx_0^{-2}\right) \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| +$$

$$+e^{H_1(x-1)-H_1(x)} |c| \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| +$$

$$+e^{-H_1(x_0)} \int\limits_{x_0}^{x_0+1} e^{as+\ln\ln q^{-1}} |f(e^{as})| \, ds =$$

$$= e^{H_1(x_0-1)-H_1(x)} |c| \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| + \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| +$$

$$+\left(1-e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\right) Lx_0^{-2} \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| + e^{H_1(x-1)-H_1(x)} |c| \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| +$$

$$+e^{-H_1(x_0)} \int\limits_{x_0}^{x_0+1} e^{as+\ln\ln q^{-1}} |f(e^{as})| \, ds \le$$

$$\le \left(1+Lx_0^{-2}+2e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)} |c|\right) \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| + e^{-H_1(x_0)} \int\limits_{x_0}^{x_0+1} e^{as+\ln\ln q^{-1}} |f(e^{as})| \, ds,$$

где L — некоторая константа. Легко показать, что при достаточно большом x_0 выполняется неравенство

$$H_1(x_0-1) - H_1(x_0) \le -\frac{a}{2} x_0.$$

Тогда

$$\sup_{x_0\le s\le x_0+1} |z_1(s)| \le \left(1+Lx_0^{-2}+2e^{-\frac{a}{2}x_0} |c|\right) \times$$

$$\times \sup_{x_0-1\le s\le x_0} |z_1(s)| + e^{-H_1(x_0)} \int\limits_{x_0}^{x_0+1} e^{as+\ln\ln q^{-1}} |f(e^{as})| \, ds.$$

Для краткости обозначим $\sup_{x-1\leq s\leq x}|z_1(s)|\overset{\mathrm{df}}{=}h(x),\ 1+Lx^{-2}+2e^{-\frac{a}{2}x}\,|c|\overset{\mathrm{df}}{=}k(x)$ и запишем последнее неравенство в новых обозначениях:

$$h\left(x_0+1\right)\leq k\left(x_0\right)h\left(x_0\right)+g\left(x_0\right).$$

Отсюда следует

$$h\left(x_0+m+1\right)\leq\prod_{l=0}^{m}k\left(x_0+l\right)h\left(x_0\right)+\sum_{j=1}^{m}g\left(x_0+j-1\right)\prod_{l=j}^{m}k\left(x_0+l\right)+g\left(x_0+m\right)\leq$$

$$\leq\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(x_0+l\right)\left\{h\left(x_0\right)+g\left(x_0\right)+g\left(x_0+1\right)+\ldots+g\left(x_0+m\right)\right\}=$$

$$=\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(x_0+l\right)h\left(x_0\right)+\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(x_0+l\right)\sum_{j=0}^{m}g\left(x_0+j\right)$$

или, полагая $x_0=n$ и $n+m\leq x<n+m+1$,

$$|z_1(x)|\leq\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(l\right)h\left(n\right)+\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(l\right)\sum_{j=0}^{m}g\left(n+j\right)\leq\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(l\right)h\left(n\right)+\prod_{l=0}^{+\infty}k\left(l\right)\sum_{l=0}^{n+m}g\left(l\right).$$

Теорема 5 доказана.

Приведем пример частного решения, полученного в работе [30], который позволит сделать вывод о принципиальной связи между гладкостью решения и его асимптотическим поведением.

Назовем фундаментальным решением единственное непрерывное решение начальной задачи

$$x'(t)=ax(t)+bx(qt)+cx'(qt),\quad t\geq t_0>0, \tag{13}$$

$$x(t)=\begin{cases}0, & qt_0\leq t<t_0,\\ 1, & t=t_0,\end{cases} \tag{14}$$

где $\{a,b,c\}\subset\mathrm{C},\ 0<q<1$. В дальнейшем фундаментальное решение будем обозначать символом $G(t,t_0)$.

Основываясь на представлении решений уравнения (13) рядами Дирихле в работе [31], будем искать решение задачи (13), (14) в следующей форме:

$$G(t,t_0)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}D_{k,l}e^{q^{-l}a(q^kt-t_0)},\quad t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right],\quad n=0,1,\ldots. \tag{15}$$

Поскольку $G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}$ для $t\in\left[t_0,q^{-1}t_0\right]$, то $D_{0,0}=1$. Применяя метод шагов к начальной задаче (13), (14), для коэффициентов в формуле (15) получаем рекуррентные равенства

$$aD_{k,k}-D_{k,k}a=0,$$

$$aD_{k,l}-q^{k-l}aD_{k,l}=-bD_{k-1,l}-q^{k-l-1}acD_{k-1,l},\quad l=0,1,\ldots,k-1,$$

и условие непрерывности функции $G(t,t_0)$ в точках $t=q^{-k}t_0$:

$$D_{k,k}=-\sum_{l=0}^{k-1}D_{k,l},\quad k=1,2,\ldots.$$

Теорема 6 [30]. *Если $a \neq 0$, то фундаментальное решение имеет представление*

$$G(t,t_0)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}b+q^{k-l-j}c}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{c+q^{l-j}a^{-1}b}{1-q^j}\right)e^{q^{-l}a(q^kt-t_0)}, \tag{16}$$

$$t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right],\quad n=0,1,\ldots.$$

Изучим некоторые частные случаи фундаментального решения (16).

***Пример* 1.** Пусть $a^{-1}b=-1,\ c=q^{-1},\ a<0$. Тогда для $t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right]$, $n=0,1,\ldots$, получаем следующую формулу фундаментального решения:

$$G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}-\sum_{k=1}^{n}q^{-k}\left\{e^{aqq^{-k}(q^kt-t_0)}-e^{aq^{-k}(q^kt-t_0)}\right\}\le$$

$$\le 1-q^{-n}\left\{e^{aqq^{-n}(q^nt-t_0)}-e^{aq^{-n}(q^nt-t_0)}\right\}.$$

Аргумент в степени экспоненты в правой части последнего неравенства изменяется в пределах

$$0\le q^{-n}(q^nt-t_0)\le q^{-n}(q^{-1}t_0-t_0)\to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

поэтому найдется число $t_n\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right]$ такое, что $q^{-n}\left(q^nt_n-t_0\right)=1$. Отсюда получаем неравенство

$$G\left(t_n,t_0\right)\le 1-q^{-n}\left\{e^{aq}-e^{a}\right\}\le 1-q\frac{t_n}{t_0}\left\{e^{aq}-e^{a}\right\}.$$

Последнее неравенство означает, что асимптотическое поведение непрерывного, кусочно непрерывно дифференцируемого решения $G(t,t_0)$ отличается от поведения достаточно гладких решений в теореме 4.

***Пример* 2.** Пусть $a^{-1}b=-1,\ c=q,\ a<0$. Тогда для $t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right]$, $n=0,1,\ldots$, получаем следующую формулу фундаментального решения:

$$G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{a(q^kt-t_0)}-e^{q^{-1}a(q^kt-t_0)}\right)\ge e^{a(q^nt-t_0)}-e^{q^{-1}a(q^nt-t_0)}.$$

Отсюда

$$G(q^{-n-1}t_0,t_0)\ge e^{a(q^{-1}t_0-t_0)}-e^{aq^{-1}(q^{-1}t_0-t_0)}>0.$$

Последнее неравенство означает, что уменьшение коэффициента c по сравнению с предыдущим примером не позволит получить асимптотическую оценку для решения $G(t,t_0)$ меньшую, чем для достаточно гладких решений в теореме 4.

***Пример* 3.** Пусть $a^{-1}b=-1,\ c=1$. Тогда для $t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right]$, $n=0,1,\ldots$, получаем следующую формулу фундаментального решения:

$$G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}$$

уравнения

$$x'(t)=ax(t)-ax(qt)+x'(qt).$$

Это уравнение имеет частное решение $x_1(t)\equiv 1$. Третий пример указывает на сложности, которые могут возникнуть при попытке вывести аналог формулы вариации произвольных постоянных на основе непрерывного фундаментального решения $G(t,t_0)$.

Литература

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$, I, II // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math. – 1953. – **15**. – P. 449 – 464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. – 1971. – **243**. – P. 249 – 254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 192 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1483 – 1491.
6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 9. – С. 1627 – 1645.
7. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1971. – **33**. – P. 355 – 358.
8. *Гребенщиков Б. Г.* Об асимптотических свойствах некоторых систем с двумя запаздываниями // Изв. вузов. Математика. – 2006. – **528**, № 5. – С. 27 – 37.
9. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 144 – 160.
10. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 2. – С. 147 – 150.
11. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 5. – С. 751 – 758.
12. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывания // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 12. – С. 1587 – 1595.
13. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. – 1980. – **809**.
14. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 466 – 493.
15. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 3. – С. 291 – 302.
16. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений одного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 291 – 313.
17. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 197 – 230.
18. *Carr J., Dyson J.* The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1976. – **74**. – P. 165 – 174.
19. *Liu Y.* Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays // Eur. J. Appl. Math. – 1996. – **7**, № 1. – P. 11 – 30.
20. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений некоторых функциональных уравнений // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 1. – С. 32 – 52.
21. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 311 – 348.
22. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc. – 1940. – **15**. – P. 115 – 123.
23. *de Bruijn N. G.* The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, № 2. – P. 313 – 330.
24. *de Bruijn N. G.* On some linear functional equations // Publ. Math. Debrecen. – 1950. – **1**. – P. 129 – 134.
25. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Асимптотические границы решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 4. – С. 458 – 464.
26. *Lim Eng-Bin.* Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation // SIAM J. Math. Anal. – 1978. – **9**, № 5. – P. 915 – 920.

27. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737 – 747.
28. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 149 – 163.
29. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
30. *Lehninger H., Liu Y.* The functional-differential equation $y'(t) = Ay(t) + By(qt) + Cy'(qt) + f(t)$ // Eur. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 81 – 91.
31. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional-differential equation // Eur. J. Appl. Math. – 1993. – **4**. – P. 1 – 38.
32. *Романенко Е. Ю.* Асимптотика решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1526 – 1532.
33. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Об асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в окрестности критической точки // Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 107 – 121.
34. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Оценка роста в окрестности критической точки решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Динамические системы и дифференц. уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 69 – 74.
35. *Романенко Е. Ю.* Представление локального общего решения одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 206 – 210.
36. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Асимптотика решений линейных дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 5 – 39.
37. *Spiridonov V.* Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials // Phys. Rev. A. – 1995. – **52**. – P. 1909 – 1935.

Получено 07.07.18