DOI: 10.37863/umzh.v72i10.1075

УДК 517.5

Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка; Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ),

С. О. Скворцов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка),

Є. О. Петров (Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ)

ПРО ОДНОСТАЙНО НЕПЕРЕРВНІ СІМ'Ї ВІДОБРАЖЕНЬ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

We obtain analogs of results on equicontinuity of families of quasiregular mappings that take no values from a fixed continuum. We prove that these families are equicontinuous whenever the quasiconformity characteristics of the mappings have a finite mean oscillation at every inner point. In this context, we also prove the equicontinuity of generalized quasiisometries of Riemannian manifolds.

Отримано аналоги результатів про одностайну неперервність сімей квазірегулярних відображень, які не набувають значень з деякого континуума. Доведено, що вказані сім'ї є одностайно неперервними, якщо характеристика квазіконформності відображень має скінченне середнє коливання в кожній внутрішній точці. Окремо досліджено випадок узагальнених квазіізометрій ріманових многовидів.

1. Вступ. Добре відомі умови, при яких сім'ї відображень з обмеженим спотворенням одностайно неперервні в заданій точці (див., наприклад, теорему 3.17 [1] і наслідок III.2.7 [2]). Тут мова йде про відображення, що не набувають значень із деякої множини, однак у випадку гомеоморфізмів цілком можливо обмежитись двоточковою множиною (див. теорему 19.2 [3]). Зокрема, справедливою є така теорема (див. наслідок III.2.7 [2]).

Теорема (Мартіо – Рікман – Вяйсяля). *Сім'я $\mathcal{Q}_{K,E}(D)$, що складається з усіх відображень з обмеженим спотворенням $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ зі спільним коефіцієнтом квазіконформності K, є одностайно неперервною в області D, якщо $\operatorname{cap} E>0$.*

Як показує приклад сім'ї аналітичних функцій $f_n(z)=z^n$, $z\in B(0,2)=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<2\}\subset\mathbb{C}$, без умови $\operatorname{cap}E>0$ результат не є правильним. Зауважимо, що для деяких класів відображень з необмеженою характеристикою подібні результати встановлено в роботах [4 – 6]. У цій статті ми покажемо, що в абстрактних метричних просторах має місце аналогічна ситуація: сім'я відображень, що не набувають значень із деякого континуума, одностайно неперервна в кожній точці при відповідних умовах на ріст їхніх характеристик. Окремо будуть розглянуті ріманові многовиди з ізопериметричною нерівністю, де це твердження можна отримати при більш слабких умовах. У останньому випадку будуть вивчатись узагальнені квазіізометрії — відображення, що спотворюють p-модуль сім'ї кривих з оцінкою, подібною до нерівності Полецького, де $n-1<p<n$, а n — розмірність многовиду.

Скрізь далі (X,d,μ) і (X',d',μ') — метричні простори з метриками d і d' і борелевими мірами μ і μ' відповідно. Замість записів (X,d,μ) і (X',d',μ') будемо використовувати відповідно (X,d) і (X',d') або X і X', якщо це не викликає непорозумінь. Введемо до розгляду наступні аналоги сфери Рімана і хордальної метрики на ній (див. [3], розд. 12). Нехай X — метричний простір із метрикою d, $\overline{X}:=X\cup\{\infty\}$ і $h\colon\overline{X}\times\overline{X}\to\mathbb{R}$ — деяка метрика. Будемо говорити, що h задовольняє умову *слабкої сферикалізації*, якщо $(\overline{X},h)$ — компактний метричний простір і, крім того, $h(x,y)\le d(x,y)$ при всіх $x,y\in X$. Метричний простір X називається *простором, що допускає слабку сферикалізацію*, якщо існує хоча б одна така метрика $h\colon \overline{X}\times\overline{X}\to\mathbb{R}$.

Нехай $\zeta_0\in X$ і $0<r_1<r_2<\infty$. Покладемо

$$A(\zeta_0,r_1,r_2)=\big\{x\in X: r_1<d(x,\zeta_0)<r_2\big\},$$

$$S(\zeta_0,r_i)=\big\{x\in X: d(x,\zeta_0)=r_i\big\},\qquad B(\zeta_0,r_i)=\big\{x\in X: d(x,\zeta_0)<r_i\big\}.$$

Тут і далі $M_p(\cdot)$ — модуль сім'ї кривих у метричному просторі X або X', в залежності від контексту (див., наприклад, [7], розд. 7.3). Нехай $E,\ F\subset X$ — довільні множини. У подальшому $\Gamma(E,F,X)$ позначає сім'ю всіх кривих $\gamma\colon[a,b]\to X$, які з'єднують E і F в X, тобто $\gamma(a)\in$ $\in E,\ \gamma(b)\in F$ і $\gamma(t)\in X$ при $t\in(a,\,b)$. Нехай G — область в $X,\ Q\colon G\to[0,\infty]$ — вимірна відносно міри μ функція і $p,q\geq 1$ — фіксовані числа. Згідно з [8] (розд. 7), відображення $f\colon G\to X'$ будемо називати *кільцевим Q-відображенням у точці $\zeta_0\in G$ відносно (p,q)-модулів*, якщо для будь-яких $0<r_1<r_2<\operatorname{dist}(\zeta_0,\partial G):=\inf_{x\in\partial G}d(\zeta_0,x)$ і будь-якої вимірної за Лебегом функції $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geq 1$, виконується нерівність

$$M_p\Big(f\Big(\Gamma(S(\zeta_0,r_1),S(\zeta_0,r_2),A)\Big)\Big)\leq\int\limits_A Q(x)\eta^q\big(d(x,\zeta_0)\big)\,d\mu(x). \tag{1}$$

Якщо $p=q$, то коротко будемо називати такі відображення *кільцевими Q-відображеннями відносно p-модуля.* Зауважимо, що для багатьох відомих класів відображень були встановлені оцінки вигляду (1). Зокрема, клас кільцевих Q-відображень містить у собі аналітичні функції при $X=X'=\mathbb{C},\ Q(x)\equiv 1,\ p=q=2$, а також квазірегулярні (квазіконформні) відображення при $X=X'=\mathbb{R}^n,\ Q(x)\leq K=\mathrm{const}$ і $p=q=n$ (див., наприклад, теорему II.8.1 [2]). Існує чимало відображень з необмеженою характеристикою, для яких також виконуються оцінки (1). Зокрема, сюди можна віднести гомеоморфізми $f\in W^{1,n}_{\rm loc}$, для яких $f^{-1}\in W^{1,n}_{\rm loc}$. У цьому випадку $Q=K_I(x,f)$ і $p=q=n$, де $K_I(x,f)$ — внутрішня дилатація відображення f у точці x (див. теореми 8.1, 8.6 [8]).

Наступне означення можна знайти, наприклад, у [8] (розд. 13.4). Будемо говорити, що інтегровна в деякій кулі $B(\zeta_0,\varepsilon_0)$ функція $\varphi\colon G\to\mathbb{R}$ має *скінченне середнє коливання* в точці $\zeta_0\in G$ (пишемо $\varphi\in FMO(\zeta_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mu(B(\zeta_0,\,\varepsilon))}\int\limits_{B(\zeta_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,d\mu(x)<\infty,$$

де $\overline{\varphi}_\varepsilon=\dfrac{1}{\mu(B(\zeta_0,\,\varepsilon))}\displaystyle\int_{B(\zeta_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,d\mu(x)$. Означення регулярних за Альфорсом просторів і просторів з нерівністю Пуанкаре, що використовуються нижче, можна знайти, наприклад, у [9, 10]. Відображення $f\colon G\to X'$ будемо називати *відкритим*, якщо $f(E)$ відкрите в X' для будь-якого відкритого $E\subset G$, і *дискретним*, якщо $f^{-1}(y)$ складається тільки з ізольованих точок області G при кожному $y\in X'$.

Наслідуючи [11], будемо дотримуватися такої термінології. Нехай $2\leq\alpha<\infty$ і $1\leq q\leq\alpha$, тоді простір $X=(X,d,\mu)$ назвемо *α-допустимим джерелом*, якщо (X,d,μ) локально компактний і локально лінійно зв'язний α-регулярний за Альфорсом метричний простір. Нехай

$2 \le \alpha' < \infty$ і $\alpha' - 1 < p \le \alpha'$, тоді простір $X' = (X', d', \mu')$ будемо називати (α', p)-*допустимою ціллю*, якщо (X', d', μ') лінійно зв'язний, локально зв'язний і локально компактний α'-регулярний за Альфорсом метричний простір, в якому виконується $(1; p)$-нерівність Пуанкаре. Нагадаємо, що метричний простір (X, d) називається *геодезичним*, якщо будь-які дві точки $x_1, x_2 \in X$ можна з'єднати спрямлюваною кривою $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_1$ і $\gamma(1) = x_2$, довжина $l(\gamma)$ якої збігається з $d(x_1, x_2)$.

Нехай K — деякий континуум в X'. Позначимо через $\mathfrak{F}^{p,q}_{\zeta_0,Q}(G, X', K)$ сім'ю всіх відкритих дискретних кільцевих Q-відображень $f : G \to X' \setminus K$ в точці $\zeta_0 \in G$ відносно (p, q)-модулів. Справедливою є наступна теорема, що узагальнює теорему Монтеля про нормальність сімей аналітичних функцій на площині (див. [12], § 32, гл. II, [3], теореми 19.4 і 20.5, і [5], теорема 5.11).

Теорема 1. *Нехай $\alpha' - 1 < p \le \alpha'$, $1 \le q \le \alpha$, простір (X, d, μ) є α-допустимим джерелом, а простір $X' = (X', d', \mu')$ — (α', p)-допустима ціль. Припустимо, що простір X є геодезичним, $Q \in FMO(\zeta_0)$, крім того, X' допускає слабку сферикалізацію. Тоді сім'я $\mathfrak{F}^{p,q}_{\zeta_0,Q}(G, X', K)$ одностайно неперервна в точці ζ_0 у сенсі простору $(\overline{X'}, h)$.*

Згідно з [7] (розд. 7), метричний простір (X, d) називається *власним*, якщо кожна замкнена куля $\overline{B(x_0, R)}$ є компактом в (X, d). Нагадаємо, що метричний простір (X, d) називається *птолемеєвим*, якщо для будь-яких чотирьох точок $x, y, z, t \in X$ виконується нерівність $d(x,z)d(y,t) + d(x,t)d(y,z) - d(x,y)d(z,t) \ge 0$. Можна показати, що власні птолемеєві простори допускають слабку сферикалізацію, де в якості h необхідно розглядати метрику

$$h_{x_0}(x, y) := \frac{d(x,y)}{\sqrt{1 + d^2(x, x_0)}\sqrt{1 + d^2(y, x_0)}}, \tag{2}$$

$$h_{x_0}(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2(x_0, x)}},$$

де x_0 — деяка (довільна) фіксована точка $x_0 \in X$ (див. лему 5.4 [11]). Якщо $X = \mathbb{R}^n$, а $x_0 = 0$, то метрика h_{x_0}, визначена в (2), визначає відстань між проекціями точок на рімановій сфері (в цьому випадку вона називається *хордальною* метрикою, див. означення 12.1 [3]). Зауважимо, що простір $\mathbb{R}^n$ є птолемеєвим (див. пропозицію 10.9.2 [13]). Визначимо $\mathfrak{F}^{p,q}_{Q}(G, X', K)$ як сім'ю відображень $f : G \to X'$, що належать $\mathfrak{F}^{p,q}_{\zeta_0,Q}(G, X', K)$ при кожному $\zeta_0 \in G$. Враховуючи викладене вище, із теореми 1 і теореми Арцела – Асколі (теорема 20.4 [3]) отримуємо таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $\alpha' - 1 < p \le \alpha'$, $1 \le q \le \alpha$, простір (X, d, μ) є α-допустимим джерелом, X — геодезичним, крім того, простір (X', d', μ') — (α', p)-допустима ціль. Якщо (X, d, μ) є сепарабельним, а (X', d', μ') — птолемеєвим і власним, крім того, $Q \in FMO(\zeta_0)$ для кожного $\zeta_0 \in G$, то $\mathfrak{F}^{p,q}_{Q}(G, X', K)$ є нормальною сім'єю відображень в G у сенсі простору $(\overline{X'}, h_{x_0})$.*

2. Основна лема і доведення теореми 1. Нагадаємо, що пара $E = (A, C)$, де A — відкрита множина в X і $C \subset A$ — компактна множина, називається *конденсатором* в X. Нехай Γ_E позначає сім'ю всіх кривих вигляду $\gamma\colon [a, b) \to A$ таких, що $\gamma(a) \in C$ і $|\gamma| \operatorname{cap}(A \setminus F) \ne \varnothing$, яким би не була компактна множина $F \subset A$. (По суті Γ_E — сім'я кривих із початком в C і таких, що прямують до межі множини A). Для заданого $p \ge 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E) \tag{3}$$

будемо називати *p-ємністю E*. Наступне важливе твердження доведено в [11] (лема 3.3).

Лема 1. *Нехай $\alpha \ge 2$, $\alpha - 1 < p \le \alpha$ і X — (α, p)-допустима ціль. Припустимо, що X допускає слабку сферикалізацію і F — невироджений континуум в X. Тоді для кожного $a > 0$ знайдеться $\delta = \delta(a) > 0$ таке, що для кожного континуума $C \subset X \setminus F$, що задовольняє умову $h(C) \ge a$, виконується нерівність $\operatorname{cap}_p(X \setminus F, C) \ge \delta$.*

Наступна лема містить в собі теорему 1 у більш загальному випадку.

Лема 2. *Нехай $\alpha' - 1 < p \le \alpha'$, $1 \le q \le \alpha$, простір (X, d, μ) є α-допустимим джерелом, а простір $X' = (X', d', \mu')$ — (α', p)-допустима ціль, причому X' допускає слабку сферикалізацію. Припустимо, що $\varepsilon_0 > 0$ і $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє таку умову: для кожного $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ знайдеться таке $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1). \tag{4}$$

Припустимо також, що

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x, \zeta_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^q\big(d(x, \zeta_0)\big)\, d\mu(x) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)). \tag{5}$$

Тоді сім'я $\mathfrak{F}^{p,q}_{\zeta_0, Q}(G, X', K)$ одностайно неперервна в точці ζ_0 у сенсі простору $(\overline{X'}, h)$.

Доведення. Зафіксуємо $f \in \mathfrak{F}^{p,q}_{\zeta_0, Q}(G, X', K)$. Оскільки простір X локально компактний, не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що замкнена куля $\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_0)}$ є компактом у G. Зауважимо, що якщо $\beta\colon [a,\, b) \to X'$ — деяка крива і $x \in f^{-1}(\beta(a))$, то за лемою 2.1 [11] існує максимальне підняття $\alpha\colon [a, c) \to G$ кривої β при відображенні f з початком у точці x. У такому випадку, покладаючи $S_1 = S(\zeta_0, \varepsilon)$, $S_2 = S(\zeta_0, \varepsilon_0)$ і міркуючи аналогічно до доведення леми 3 в [10], можемо показати, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0'$ виконується співвідношення

$$M_p\Big(\Gamma\big(f\big(\overline{B(\zeta_0, \varepsilon)}\big), \partial f\big(B(\zeta_0, \varepsilon_0)\big), X'\big)\Big) := \alpha(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Оскільки простір X є геодезичним, а відображення f неперервне, $C = \overline{B(\zeta_0, \varepsilon)}$ і $f(C)$ — зв'язні множини при досить малому $\varepsilon > 0$. Розглянемо конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$, $A = B(\zeta_0, \varepsilon_0)$, $C = \overline{B(\zeta_0, \varepsilon)}$. Тоді в термінах ємності конденсатора $\mathcal{E}$ співвідношення (6) можна записати у вигляді

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} = \alpha(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{7}$$

З іншого боку, за лемою 1 для кожного $a > 0$ існує таке $\delta = \delta(a)$, що для довільного континуума $C \subset X' \setminus K$, що задовольняє умову $h(C) \ge a$, виконується оцінка

$$\operatorname{cap}_p (X' \setminus K, C) \ge \delta. \tag{8}$$

З оцінки (7) випливає, що для числа $\delta = \delta(a)$ знайдеться таке $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$, що

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} \le \delta \quad \forall\, \varepsilon \in \big(0,\, \varepsilon_*(a)\big). \tag{9}$$

Використовуючи співвідношення (9), маємо

$$\mathrm{cap}_p\left(X'\setminus K,\, f\Big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon)}\Big)\right)\le \mathrm{cap}_p\left(f\big(B(\zeta_0,\,\varepsilon_0)\big),\, f\Big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon)}\Big)\right)<\delta$$

при $\varepsilon\in\Big(0,\,\varepsilon_*(a)\Big)$. Тоді з (8) випливає, що $h\Big(f\big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon)}\big)\Big)<a$. Нарешті, для будь-якого $a>0$ існує таке $\varepsilon_*=\varepsilon_*(a)$, що $h\Big(f\big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon)}\big)\Big)<a$, як тільки $\varepsilon\in\big(0,\,\varepsilon_*(a)\big)$.

Лему доведено.

Доведення теореми 1 безпосередньо випливає з леми 2 і пропозиції 2 [10].

3. Допоміжні відомості з теорії метричних просторів і многовидів. Нагадаємо, що довжина кусково-гладкої кривої $\gamma=\gamma(t),\ t\in[a,b]$, що з'єднує точки $\gamma(a)=M_1\in\mathbb{M}^n$ і $\gamma(b)=M_2\in\mathbb{M}^n$ на рімановому многовиді $\mathbb{M}^n$, визначається співвідношенням

$$l(\gamma):=\int\limits_a^b\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt, \tag{10}$$

де $g=g_{ij}(x)$ — гладкий додатно визначений тензор типу $(0,2)$ на многовиді (ріманова метрика). Іншими словами, $g=g_{ij}(x)$ — система матриць, які в різних системах координат пов'язані співвідношенням ${}'g_{ij}(x)=\sum_{k,l=1}^n g_{kl}(y(x))\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^l}{\partial x^j}$. *Геодезичною відстанню* $d(p_1,p_2)$ між точками p_1 і $p_2\in\mathbb{M}^n$ будемо називати найменшу довжину всіх кусково-гладкких кривих в $\mathbb{M}^n$, що з'єднують точки p_1 і p_2. В цих термінах також має сенс

$$l(\gamma):=\sup\sum\limits_{i=1}^m d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})), \tag{11}$$

де супремум береться по всіх можливих розбиттях $a:=t_0\le t_1\le\ldots\le t_m:=b$. Отже, ми маємо «два означення» для $l(\gamma)$ для кусково-гладких кривих γ: (10) і (11), одне з яких, що відповідає формулі (11), підходить для довільних кривих, а не лише кусково-гладких.

***Зауваження* 1.** Для кусково-гладких кривих $\gamma:[a,b]\to\mathbb{M}^n$ зв'язного ріманового многовиду $\mathbb{M}^n$ величини для $l(\gamma)$, визначені співвідношеннями (10) і (11), збігаються (див. теорему 2.2 [14]).

Справедливою є така лема (див. також зауваження 9.11 [7]).

Лема 3. *Нехай $\mathbb{M}^n$, $n\ge 2$, — рімановий многовид із геодезичною метрикою d, який є зв'язним і власним простором. Тоді простір $\mathbb{M}^n$ є геодезичним.*

Доведення. Очевидно, що $\mathbb{M}^n$ — повний метричний простір. Справді, нехай $x_m,\ m=1,2,\ldots,$ — фундаментальна в $\mathbb{M}^n$ послідовність. Тоді для числа $\varepsilon=1$ знайдеться таке натуральне число $M>1$, що $d(x_m,x_l)<1$ при всіх $m,l\ge M$. У такому випадку $x_l\in B(x_M,1)$, $l\ge M$. Оскільки простір $\mathbb{M}^n$ є власним, замикання будь-якої кулі $B(a,r)$ — компакт в $\mathbb{M}^n$. Крім того, оскільки всі елементи послідовності $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ (за винятком скінченної кількості) належать кулі $B(x_M,1)$, знайдеться підпослідовність x_{m_k} послідовності x_m, що збігається до деякого елемента $x_0\in\mathbb{M}^n$ при $k\to\infty$.

Оскільки послідовність $x_m,\ m=1,2,\ldots,$ фундаментальна, то для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що $d(x_m,x_l)<\varepsilon/2$ при всіх $m,l>N$. Крім того, з огляду на збіжність x_{m_k} до x_0 при деякому $K=K(\varepsilon)$ і всіх $k>K$ маємо $d(x_{m_k},x_0)<\varepsilon/2$. З цих двох нерівностей, за нерівністю трикутника при всіх $l, k > \max\{K, N\}$, будемо мати $d(x_l, x_0) \leq d(x_l, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, тобто послідовність x_m збігається при $m \to \infty$ до x_0.

Отже, $\mathbb{M}^n$ — повний рімановий многовид, а тому для будь-яких двох точок $p_1, p_2 \in \mathbb{M}^n$ знайдеться кусково-гладка крива γ, що з'єднує ці точки, довжина якої в сенсі співвідношення (10) збігається з $d(p_1, p_2)$ (див. наслідок 6.15 [15]). При цьому ця довжина збігається з довжиною γ, що розуміється в сенсі метричного простору і визначається формулою (11) (див. зауваження 1).

Лему доведено.

Відносно множини $E \subset X$ покладемо $d(E) := \sup_{x,y \in E} d(x, y)$. Справджується таке твердження.

Пропозиція 1. *Нехай X — n-регулярний за Альфорсом метричний простір із мірою, в якому виконується $(1; p)$-нерівність Пуанкаре, $n - 1 < p \leq n$. Тоді для довільнх континуумів E і F, що містяться в кулі $B(x_0, R)$, і деякої сталої $C > 0$ (що залежить тільки від простору X) виконується нерівність $M_p\big(\Gamma(E, F, X)\big) \geq \dfrac{1}{C}\dfrac{\min\big\{d(E), d(F)\big\}}{R^{1+p-n}}$ (див. пропозицію* 4.7 [16]).

4. Про одностайно неперервні сім'ї узагальнених квазіізометрій у просторах з ізопериметричною нерівністю. У цьому пункті ми покажемо, що якщо $n-1 < p < n$, то на ріманових многовидах з ізопериметричною нерівністю відповідні сім'ї відображень одностайно неперервні навіть без припущення про випускання деякої множини E. Зауважимо, що ізопериметричні нерівності в евклідовому випадку є відомими (див., наприклад, [17], п. 3.2.43).

Скрізь нижче d і d_* — геодезичні відстані на зв'язних ріманових многовидах $\mathbb{M}^n$ і $\mathbb{M}^n_*$ відповідно, а dv і dv_* — елементи об'єму на цих многовидах. Поняття, пов'язані з їхнім вивченням, ми вважаємо відомими (їх можна знайти, наприклад, у [9] або [15]). Крім того, p-ємність конденсатора $E = (A, C)$ на многовиді $\mathbb{M}^n$ (або $\mathbb{M}^n_*$, в залежності від контексту) визначена через p-модуль сімей кривих шляхом співвідношення (3). Варто зауважити, що на многовидах задане означення збігається з загальновідомим означенням ємності через інтеграл від градієнта (див., наприклад, пропозицію 10.2 і зауваження 10.8, гл. II [2]).

Будемо вимагати тепер на рімановому многовиді $\mathbb{M}^n_*$ з геодезичною відстанню d_* і мірою об'єму v_* додаткову умову. Позначивши через $\mathcal{H}^{n-1}(B)$ далі $(n-1)$-вимірну міру Ґаусдорфа множини $B \subset \mathbb{M}^n_*$, будемо припускати, що для будь-якої відкритої множини $A \subset \mathbb{M}^n_*$ з компактним замиканням і гладкою межею виконується умова

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial A) \geq \frac{c}{(v_*(A))^{1/n-1}}, \tag{12}$$

де $c > 0$ — деяка стала. Умова (12) називається *ізопериметричною нерівністю* на $\mathbb{M}^n_*$. Тоді для довільного конденсатора $E = (A, C)$ на многовиді $\mathbb{M}^n_*$ згідно з нерівностями (1.7) і (4.1) [18] виконується

$$\operatorname{cap}_p(A, C) \geq C' \cdot (v_*(C))^{1-p/n}. \tag{13}$$

Нехай G — область ріманового многовиду $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, і $Q \colon G \to [0, \infty]$ — вимірна функція. Позначимо через $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*)$ сім'ю всіх кільцевих Q-гомеоморфізмів $f \colon G \to \mathbb{M}^n_*$ у точці $\zeta_0 \in G$ відносно p-модуля. Справджується таке твердження.

Лема 4. *Нехай $Q \colon G \to (0, \infty]$ — вимірна відносно міри об'єму v функція, $n - 1 < p < n$, а простір $\mathbb{M}^n_*$, як метричний простір з геодезичною метрикою d_*, є (n, p)-допустимою ціллю* *і власним простором з ізопериметричною нерівністю* (12). *Припустимо, що виконуються умови* (4), (5), *де* $q = p$. *Тоді сім'я* $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*)$ *одностайно неперервна в точці* ζ_0, *де одностайна неперервність розуміється в сенсі простору* $(\mathbb{M}^n_*, d_*)$.

Доведення. **I.** Припустимо протилежне, а саме, що сім'я $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*)$ не є одностайно неперервною в деякій точці $\zeta_0 \in G$. Тоді знайдуться $\delta_0 > 0$ і послідовності $\zeta_m \in G,\ f_m \in \mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*)$ такі, що $\zeta_m \to \zeta_0$ при $m \to \infty$ і

$$d_*\big(f_m(\zeta_m), f_m(\zeta_0)\big) \geq \delta_0. \tag{14}$$

Зафіксуємо тепер довільним чином дві точки $x_1, x_2 \in \mathbb{M}^n_*$, $x_1 \neq x_2$. Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що кулі $B_1 := B(x_1, \delta_0/3)$ і $B_2 := B(x_2, \delta_0/3)$ є компактами в $\mathbb{M}^n_*$ і $\delta_0 < d_*(x_1, x_2)$. $\big($У протилежному випадку можна покласти $\delta_0^* := d_*(x_1, x_2)/2$. Тоді отримаємо аналогічну (14) нерівність, яка містить δ_0^* замість δ_0. У цьому випадку $\delta_0^* < d_*(x_1, x_2)$.$\big)$ За нерівністю трикутника

$$d_*(\overline{B_1}, \overline{B_2}) \geq \delta_0/3. \tag{15}$$

Оскільки многовид $\mathbb{M}^n_*$ є регулярним за Альфорсом, знайдеться деяка стала $\widetilde{C} > 0$, що залежить лише від многовиду $\mathbb{M}^n_*$, така, що

$$v_*(\overline{B_i}) \geq \widetilde{C}\delta_0^n, \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

II. Розглянемо конденсатор вигляду $\mathcal{E} = (A, C)$, де $A = B(\zeta_0, \varepsilon_0)$, $C = \overline{B(\zeta_0, \varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що C лежить в нормальному околі точки ζ_0 і, зокрема, множини $B(\zeta_0, \varepsilon) = \big\{x \in \mathbb{M}^n_* \colon d(x, \zeta_0) < \varepsilon\big\}$ і $S(\zeta_0, \varepsilon) = \big\{x \in \mathbb{M}^n_* \colon d(x, \zeta_0) = \varepsilon\big\}$ є лінійно зв'язними при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. (Означення і властивості нормальних околів точки можна знайти, наприклад, у [15] розд. 5, пропозиція 5.11.)

Міркуючи, як і при доведенні леми 2, робимо висновок, що виконується співвідношення (6) при $p = q$ і $X' = \mathbb{M}^n_*$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{cap}_p f(\mathcal{E}) \leq \alpha(\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad f \in \mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*), \qquad \alpha(\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

З іншого боку, оскільки за умовою леми виконується співвідношення (12), з огляду на наведені вище зауваження виконується також (13). Отже,

$$\alpha(\varepsilon) \geq \operatorname{cap}_p f(\mathcal{E}) \geq C'\big[v_*(f(C))\big]^{\frac{n-p}{n}} \quad \forall\, f \in \mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*).$$

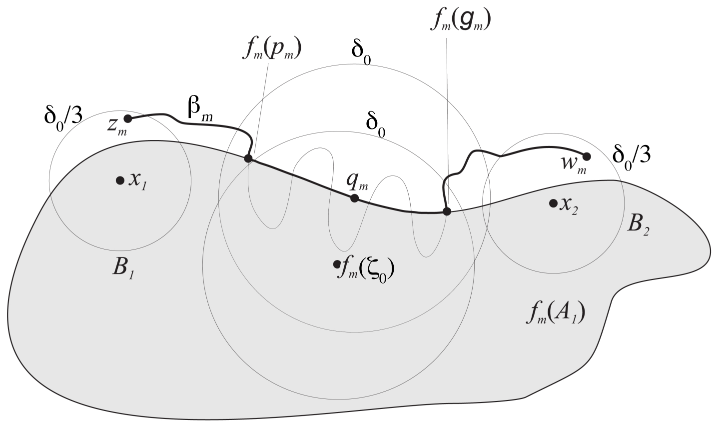
Із останнього співвідношення випливає, що

$$v_*(f(C)) \leq \alpha_1(\varepsilon) \quad \forall\, f \in \mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*),$$

де функція α_1 така, що $\alpha_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді при деякому $\varepsilon_1 > 0$

$$v_*\Big(f\big(\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_1)}\big)\Big) \leq \widetilde{C}\delta_0^n/2 \quad \forall\, f \in \mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*). \tag{17}$$

III. Позначимо $A_1 := B(\zeta_0, \varepsilon_1)$, $C_1 := \overline{B(\zeta_0, \varepsilon)}$ і розглянемо новий конденсатор $\mathcal{E}_1 = (A_1, C_1) = (B(\zeta_0, \varepsilon_1), \overline{B(\zeta_0, \varepsilon)})$, де $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Оскільки за умовами леми $Q(x) > 0$, то з умов (4), (5) із урахуванням аналога теореми Фубіні на ріманових многовидах (див. теорему 2.1 [9]) випливає, що величина інтеграла в (5) не прямує до нуля при малих значеннях ε, а



отже, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Звідси випливає, що співвідношення (4), (5) залишаються правильними, якщо в них замінити ε_0 на $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0)$. Тоді, міркуючи, як у пункті **II**, робимо висновок, що

$$\operatorname{cap}_p f(\mathcal{E}_1)=\operatorname{cap}_p\left(f(B(\zeta_0,\varepsilon_1)), f(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon)})\right)\leq$$

$$\leq\alpha_2(\varepsilon)\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)\quad\forall\,f\in\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G,\mathbb{M}^n_*),\quad \alpha_2(\varepsilon)\overset{\varepsilon\to 0}{\to}0. \tag{18}$$

IV. Зауважимо, що як в кулі $\overline{B_1}$, так і в кулі $\overline{B_2}$, знайдуться точки $z_m\in\overline{B_1}$, $w_m\in\overline{B_2}$, такі, що $z_m,w_m\not\in f_m(A_1)$. Це безпосередньо випливає із співвідношень (16) і (17) (див. рисунок). Покажемо, що точки z_m,w_m можна з'єднати кривою β_m так, що $\beta_m(t)\not\in f_m(A_1)$ при всіх $t\in[0,1]$ і, крім того, $\beta_m(t_0^m)\in\partial f_m(A_1)\operatorname{cap}B(f_m(\zeta_0),\delta_0)$ при деякому $t_0^m\in(0,1)$, де $B(f_m(\zeta_0),\delta_0)=\{x\in\mathbb{M}^n_*: d_*(x,f_m(\zeta_0))<\delta_0\}$.

Для довільної кривої $\alpha\colon[a,b]\to\mathbb{M}^n_*$ позначимо

$$|\alpha|=\left\{y\in\mathbb{M}^n_*:\ \exists\,t\in[a,b]:\alpha(t)=y\right\}$$

— носій кривої α. Зауважимо, що за регулярністю простору $\mathbb{M}^n_*$ за Альфорсом виконується умова

$$v_*\big(B(f_m(\zeta_0),\delta_0)\big)\geq\widetilde{C}\cdot\delta_0^n, \tag{19}$$

де $\widetilde{C}$ — стала з нерівності (17). З огляду на (17) і (19) в кулі $B(f_m(\zeta_0),\delta_0)$ є хоча б одна точка $P_m\in\mathbb{M}^n_*\setminus f_m(A_1)$. Оскільки многовид $\mathbb{M}^n_*$ зв'язний, точки $f_m(\zeta_0)$ і P_m можна з'єднати кривою $\Delta_m\colon[0,1]\to\mathbb{M}^n_*$ так, що $\Delta_m(0)=f_m(\zeta_0)$, $\Delta_m(1)=P_m$. При цьому, оскільки простір $\mathbb{M}^n_*$ є геодезичним (див. лему 3), криву Δ_m можна підібрати так, що її довжина буде дорівнювати $d_*(f_m(\zeta_0),P_m)$, де $d_*(f_m(\zeta_0),P_m)<\delta_0$. Тому $|\Delta_m|\subset B(f_m(\zeta_0),\delta_0)$. Оскільки крива Δ_m повністю не лежить ні в $\mathbb{M}^n_*\setminus f_m(A_1)$, ні в $f_m(A_1)$, то знайдеться точка

$$q_m\in\partial f_m(A_1)\operatorname{cap}|\Delta_m|\subset B(f_m(\zeta_0),\delta_0) \tag{20}$$

(див. теорему 1.I.5.46 [19]). З'єднаємо тепер точки z_m і w_m кривою $\gamma_m:[0,1]\to\mathbb{M}^n_*:\ \gamma_m(0)=$ $=z_m$, $\gamma_m(1)=w_m$. Криву γ_m можна вибрати так, щоб $\gamma_m(1/2)=q_m$ з огляду на зв'язність многовиду $\mathbb{M}^n_*$. Якщо при цьому вся крива γ_m лежить зовні $f_m(A_1)$, то можна покласти $\beta_m:=\gamma_m$.

Нехай знайдеться хоча б одна точка $p \in |\gamma_m| \operatorname{cap} f_m(A_1)$, тоді за теоремою 1.I.5.46 [19] знайдеться $\omega \in |\gamma_m| \operatorname{cap} \partial f_m(A_1)$. Введемо до розгляду

$$a_m = \inf_{t\in[0,1],\gamma_m(t)\in\partial f_m(A_1)} t, \qquad b_m = \sup_{t\in[0,1],\gamma_m(t)\in\partial f_m(A_1)} t.$$

Очевидно, $0 < a_m \le b_m < 1$ і $\gamma_m(a_m), \gamma_m(b_m) \in \partial f_m(A_1)$. Оскільки f_m — гомеоморфізм області G на деяку область $f_m(G)$ і $\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_0)} \subset G$, знайдуться єдині точки p_m, k_m і $g_m \in \in S(\zeta_0, \varepsilon_1)$ такі, що $f_m(p_m) = \gamma_m(a_m)$, $f_m(k_m) = q_m$ і $f_m(g_m) = \gamma_m(b_m)$. З огляду на зауваження, наведені на початку доведення леми, сфера $S(\zeta_0, \varepsilon_1)$ є лінійно зв'язною множиною. Тому точки p_m, k_m і g_m можна попарно з'єднати кривою $\alpha_m : [a_m, b_m] \to \mathbb{M}^n$ так, що $\alpha_m(t) \in \in S(\zeta_0, \varepsilon_0)$ при $t \in [a_m, b_m]$, причому $\alpha_m(t_0^m) = k_m = f_m^{-1}(q_m)$ при деякому $t_0^m \in [a_m, b_m]$. Отже, крива

$$\beta_m(t) = \begin{cases} \gamma_m(t), & t \in [0, a_m] \cup [b_m, 1], \\ f_m\big(\alpha_m(t)\big), & t \in [a_m, b_m], \end{cases}$$

є бажаною, а саме, такою, що з'єднує точки w_m і z_m в $\mathbb{M}^n_* \setminus f_m(A_1)$, яка набуває значення q_m із (20) при деякому значенні $t = t_0^m$.

V. Отже, криву β_m побудовано. Тепер на основі кривої β_m побудуємо деяку нову криву $\overline{\beta}_m$ таким чином. Якщо множина $|\beta_m|$ цілком лежить в кулі $B(q_m, \delta_0)$, покладемо $\overline{\beta}_m := \beta_m$. Зауважимо, що $d_*\big(|\beta_m|\big) \ge \delta_0/3$, що випливає із (15). Припустимо, що знайдеться така точка $t_1^m \in [0, 1]$, що $\beta_m(t_1^m) \notin B(q_m, \delta_0)$. Тоді з огляду на зв'язність кривої β_m знайдеться така точка $t_2^{*m} \in [0, 1]$, що $\beta_m(t_2^{*m}) \in S(q_m, \delta_0)$ (див. теорему 1.I.5.46 [19]). Тоді визначимо $\overline{\beta}_m$ як підкриву β_m, що з'єднує точки q_m і $\beta_m(t_2^{*m})$ всередині кулі $\overline{B(q_m, \delta_0)}$. Очевидно, що геодезичний діаметр d_* носія такої підкривої $\overline{\beta}_m$ не менший ніж δ_0.

Переходячи до перепараметризації, якщо це необхідно, можна вважати, що криву $\overline{\beta}_m$ визначено при $t \in [0, 1]$. Таким чином, встановлено існування кривої $\overline{\beta}_m : [0, 1] \to \mathbb{M}^n_*$ з такими умовами:

1) при кожному $t \in [0, 1]$ виконується умова $\overline{\beta}_m(t) \in \mathbb{M}^n_* \setminus f_m(A_1)$;

2) виконується оцінка знизу

$$d_*\big(|\overline{\beta}_m|\big) \ge \delta_0/3, \tag{21}$$

де $d_*\big(|\overline{\beta}_m|\big)$ позначає геодезичний діаметр множини $|\overline{\beta}_m| \subset \mathbb{M}^n_*$;

3) виконується включення

$$|\overline{\beta}_m| \subset \overline{B(q_m, \delta_0)}. \tag{22}$$

Зауважимо, що із включення (22) випливає ще одне більш важливе включення. А саме, нехай $x \in |\overline{\beta}_m|$, тоді за нерівністю трикутника $d_*(x, f_m(\zeta_0)) \le d_*(x, q_m) + d_*(q_m, f_m(\zeta_0)) \le 2\delta_0$ (див. (20)), так що

$$|\overline{\beta}_m| \subset \overline{B(f_m(\zeta_0), 2\delta_0)}. \tag{23}$$

VI. Подальші міркування спрямовані на застосування пропозиції (1) (оцінки знизу p-ємності конденсатора у (18)), звідки випливатиме суперечність із припущенням у (14).

Позначимо $\varepsilon_m := d(\zeta_m, \zeta_0)$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. З'єднаємо точки ζ_0 і ζ_m із (14) кривою $\kappa_m : [0, 1] \to \overline{B(\zeta_0, \varepsilon_m)}$. Це можливо, оскільки замкнені кулі $\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_m)}$ лежать у деякому нормальному околі точки ζ_0, і, отже, $\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_m)}$ лінійно звя'зні при будь-якому $m \in \mathbb{N}$. Нехай $t_m := \{\sup t : t \in [0, 1], f_m(\kappa_m(t)) \in B(\zeta_0, \delta_0)\}$ і $\eta_m = f_m(\kappa_m)|_{[0,t_m]}$ — частина кривої $f_m(\kappa_m)$, що лежить у кулі $\overline{B(f_m(\zeta_0),\delta_0)}$. Зауважимо, що $|\eta_m|$ — континуум у $\overline{B(f_m(\zeta_0),\delta_0)}\subset\mathbb{M}^n_*$ і

$$d_*\big(|\eta_m|\big)\geq\delta_0, \tag{24}$$

де, як завжди, $d_*(|\eta_m|)$ позначає геодезичний діаметр множини $|\eta_m|$ в $\mathbb{M}^n_*$, а $|\eta_m|$ — носій (образ) кривої η_m. Застосуємо тепер пропозицію 1 до $E=|\eta_m|$, $F=|\overline{\beta}_m|$, $X=\mathbb{M}^n_*$, $R=2\delta_0$. Зауважимо, що з огляду на (21), (23) і (24) виконуються умови $F,E\subset\overline{B\big(f_m(\zeta_0,2\delta_0)\big)}$, $d_*(E)\geq$ $\geq\delta_0$ і $d_*(F)\geq\delta_0/3$. Тому за пропозицією 1

$$M_p(\Gamma(E,F,\mathbb{M}^n_*))\geq\frac{1}{C}\frac{\min\{d_*(E),d_*(F)\}}{(2\delta_0)^{1+p-n}}\geq\frac{1}{C}\frac{\min\{\delta_0,\delta_0/3\}}{(2\delta_0)^{1+p-n}}:=C_0>0. \tag{25}$$

З іншого боку, з огляду на мінорування, оскільки $F=|\overline{\beta}_m|\subset\mathbb{M}^n_*\setminus f_m(A_1)$, згідно з теоремою 1.I.5.46 [19] ми маємо

$$\Gamma\Big(F,f_m(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}),\mathbb{M}^n_*\Big)>\Gamma\Big(\partial f_m(A_1),f_m(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}),f_m(A_1)\Big).$$

Крім того, оскільки за побудовою $E=|\eta_m|\subset f_m\big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}\big)$, то

$$\Gamma(E,F,\mathbb{M}^n_*)\subset\Gamma\Big(F,f_m(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}),\mathbb{M}^n_*\Big).$$

Із двох останніх співвідношень і (25) випливає, що

$$0<C_0\leq M_p\Big(\Gamma(E,F,\mathbb{M}^n_*)\Big)\leq M_p\Big(\Gamma\big(\partial f_m(A_1),f_m\Big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}\Big),f_m(A_1)\big)\Big)=$$

$$=\operatorname{cap}_p\ \Big(f\big(B(\zeta_0,\varepsilon_1)\big),f_m\big(\overline{B(\zeta_0,\varepsilon_m)}\big)\Big),$$

де стала C_0 залежить тільки від δ_0,C,n і p. Проте останнє співвідношення суперечить (18). Це свідчить про хибність припущення в (14), що і доводить лему.

На основі леми 4 можна сформулювати основні результати цього пункту. Їхній зв'язок із лемою 4 встановлюється на основі підходу, викладеного при доведенні теорем 1.1, 2.1 і 2.2 [20] тому деталі ми не наводимо.

Теорема 2. *Нехай $Q:G\to(0,\infty]$ — вимірна відносно міри об'єму v функція, $n-1<p<n$, а простір $\mathbb{M}^n_*$, як метричний простір з геодезичною метрикою d_*, є (n,p)-допустимою ціллю і власним простором з ізопериметричною нерівністю* (12). *Припустимо, що $Q\in FMO(\zeta_0)$. Тоді сім'я $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G,\mathbb{M}^n_*)$ одностайно неперервна в точці ζ_0, де одностайна неперервність розуміється в сенсі простору $(\mathbb{M}^n_*,d_*)$.*

Теорема 3. *Припустимо, що в умовах теореми 2 замість вимоги $Q\in FMO(\zeta_0)$ виконується умова $\displaystyle\int_\varepsilon^{\delta(x_0)}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}<\infty$ при деякому $\delta(x_0)>0$ і всіх досить малих $\varepsilon>0$ і, крім того,*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}=\infty, \tag{26}$$

де $q_{x_0}(r):=\dfrac{1}{r^{n-1}}\displaystyle\int_{S(x_0,r)}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$, $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-вимірна гаусдорфова міра на $S(x_0,r)$. Тоді сім'я $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G,\mathbb{M}^n_*)$ одностайно неперервна в точці ζ_0, причому одностайна неперервність розуміється в сенсі простору $(\mathbb{M}^n_*,d_*)$.

Теорема 4. *Припустимо, що в умовах теореми 2 замість вимоги $Q \in FMO$ виконується умова $Q \in L^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, де $s \geq \dfrac{n}{n-p}$ — деяке число. Тоді сім'я $\mathfrak{F}^p_{\zeta_0,Q}(G, \mathbb{M}^n_*)$ одностайно неперервна в точці ζ_0 в сенсі простору $(\mathbb{M}^n_*, d_*)$.*

5. Приклади.

***Приклад* 1.** Розглянемо сім'ю аналітичних функцій $f_n(z) = e^{nz}$, $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що вказана сім'я відображень не є одностайно неперервною в точці $z_0 = 0$. Уточнимо, які саме з умов теорем 1 і 2 при цьому порушуються.

Насамперед зауважимо, що відображення f_n є кільцевими Q_n-відображеннями при $Q_n(z) \equiv 1$ (див. теорему 2 [21] або теореми 8.1 і 8.6 [8]). Більше того, f_n є кільцевими Q_n-відображеннями відносно p-модуля, $1 < p \leq 2$, при $K_{I,p}(z, f_n) = Q_n(z) = n^{2-p}|e^{nz}|^{2-p}$ (див. теорему 1.1 [22]). В якості мір μ і μ' тут розглядаються плоскі міри Лебега, а функція $K_{I,p}(x, f)$, згадана вище, обчислюється за формулою

$$K_{I,p}(x,f) = \begin{cases} \dfrac{|J(x,f)|}{(l(f'(x)))^p}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

у якій $J(x,f) = \det f'(x)$ і $l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. Зауважимо, що при $p = 2$ функція $Q \equiv 1$ має скінченне середнє коливання в кожній точці комплексної площини. Однак теорему 1 не можна застосувати до сім'ї відображень $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, оскільки континуума K в $\mathbb{C}$, значення якого обов'язково випускає ця сім'я, не існує. Ситуація не зміниться, якщо ми розглянемо цю сім'ю відображень не в $\mathbb{C}$, а лише в деякій обмеженій підобласті комплексної площини.

Оскільки випускання континуума K не вимагається в умовах теореми 2, випадок $1 < p < 2$ ми розглянемо окремо. Можна покласти тут $\mathbb{M}^2 = \mathbb{M}^2_* = \mathbb{C}$ і $d(x,y) = d_*(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{C}$. В останньому випадку інша умова теореми 2 не виконується, а саме, функції Q_n не мають загальної мажоранти Q із відповідного класу. Можна показати, що решта умов теореми 2 виконується.

***Приклад* 2.** Для $1 < q < 2$ розглянемо сім'ю відображень $f_m(x) = \left(\dfrac{x_1}{m}, \dfrac{x_2}{m^q}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, $z = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{R}^2 \colon |z| < 1\}$. Зауважимо, що f_m — гомеоморфізми одиничного круга в себе, при цьому $J(z, f_m) = \dfrac{1}{m^q}$ і $l\big(f'_m(x)\big) = \dfrac{1}{m}$. За теоремою 1.1 [22] відображення f_m є кільцевими Q_m-гомеоморфізмами відносно p-модуля при $Q_m = K_{I,p}(z, f_m) = m^{p-q}$. З означення зрозуміло, що сім'я $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна, скажімо, в точці 0, однак цей висновок не можна отримати із теорем 1 або 2 при $p = \alpha = \alpha' = 2$. Отже, функції Q_m, очевидно, не мають загальної мажоранти класу FMO.

З іншого боку, одностайну неперервність сім'ї відображень f_m можна отримати із вказаних теорем у випадку, коли $p \leq q \leq 2$. У цьому випадку можна покласти $Q(x) \equiv 1$, оскільки $Q_m(x) \leq 1$ скрізь в $\mathbb{D}$.

***Приклад* 3.** Розглянемо сім'ю відображень із прикладу 2 з тією відмінністю, що ми визначимо f_m у всьому просторі $\mathbb{R}^2$. У цьому випадку одностайну неперервність сім'ї $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ в точці 0 не можна безпосередньо отримати з теореми 1, оскільки вказані відображення не є такими, що не набувають значень із деякого континуума K в $\mathbb{R}^2$. Однак цей результат випливає з теореми 2, оскільки відображення f_m є гомеоморфізмами.

***Приклад* 4.** Зафіксуємо число $p \geq 1$, що задовольняє умову $n/p(n-1) < 1$. Покладемо $\alpha \in \in \big(0, n/p(n-1)\big)$. Визначимо послідовність гомеоморфізмів f_m одиничної кулі $\mathbb{B}^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\big\}$ на кулю $B(0,2)$ таким чином:

$$f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x, & 1/m \leq |x| < 1, \\ \dfrac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot x, & 0 < |x| < 1/m \end{cases}.$$

Зауважимо, що f_m є кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно n-модуля при

$$Q = \left(\frac{1+|x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\right)^{n-1}$$

у кожній точці $\zeta_0 \in \overline{\mathbb{B}^n}$, більше того, $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$ (див., наприклад, доведення теореми 7.1 [23]). Зауважимо, що $\mathfrak{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не є одностайно неперервною в $\mathbb{B}^n$. Справді, $|f_m(x_m) - - f(0)| = 1 + (1/m)^\alpha \to 1$ при $m \to \infty$, де $|x_m| = 1/m$. Причина останньої обставини, а також неможливість застосування теорем 1 і 2 полягають в тому, що функція Q не належить класу FMO в точці $\zeta_0 = 0$.

***Приклад* 5.** Нехай $\mathbb{D}$ — одиничний круг на площині. *Гіперболічну відстань* в $\mathbb{D}$ визначимо згідно зі співвідношенням $h^*(z_1, z_2) = \log\dfrac{1+t}{1-t}$, $t = \dfrac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}$, а *гіперболічну площу* множини S в $\mathbb{D}$ будемо обчислювати як величину $v(S) = \displaystyle\int_S \frac{4\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2}$ (див., наприклад, [24], (2.4), (2.5)). Для борелевої функції $\rho\colon \mathbb{D} \to [0,\infty]$, вимірної за Лебегом множини $S \subset \mathbb{D}$ і локально спрямлюваної кривої $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{D}$ покладемо

$$\int\limits_S \rho(z)\,dv(z) := \int\limits_S \frac{4\rho(z)\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2}, \qquad \int\limits_\gamma \rho(z)\,ds_{h^*}(z) := \int\limits_\gamma \frac{2\rho(z)\,|dz|}{1-|z|^2}.$$

Зауважимо, що метричний простір $(\mathbb{D}, h^*, v)$ не є регулярним за Альфорсом, хоча він є регулярним за Альфорсом знизу (див. [7], приклад 8.24(c) і пропозиція 8.19). Зафіксуємо $0 < < r_0 < 1/4$ і зауважимо, що простір $(B(0,r_0), h^*, v)$ з гіперболічною площею v є 2-регулярним за Альфорсом, де $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r\}$. Справді, використовуючи позначення $B_{h^*}(z_0, r) = \big\{z \in \mathbb{D}\colon h^*(z, z_0) < r\big\}$, можна показати, що

$$B(z_0, Cr) \subset B_{h^*}(z_0, r) \subset B(z_0, r) \quad \forall\, z_0 \in B(0, r_0) \quad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{27}$$

де C — деяка додатна стала, що залежить лише від r_0. Зауважимо, що гіперболічна площа v співвідноситься з лебеговою мірою m за допомогою співвідношень

$$C_1 \cdot m(E) \leq v(E) \leq C_2 \cdot m(E), \tag{28}$$

де $E \subset B(z_0, r_0)$, а C_1 і C_2 — деякі додатні сталі, що залежать тільки від r_0. У цьому випадку регулярність за Альфорсом простору $(B(0,r_0), h^*, v)$ випливає із (27) і (28), а також із того факту, що звичайні евклідові кулі є регулярними за Альфорсом (див., наприклад, [7], приклад 8.24(a) і пропозиція 8.19).

Розглянемо сім'ю відображень

$$f_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1+|x|^{\alpha}}{|x|}\cdot x, & 1/m\le |x|<r_0,\\ \dfrac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)}\cdot x, & 0<|x|<1/m.\end{cases}$$

Ми розглядаємо тут f_m, $m=1,2,\ldots$, як відображення, що діє між $(B(0,r_0),h^*,v)$ і $(\mathbb{C},|\cdot|,m)$, де $|\cdot|$ відповідає евклідовій відстані, а m — звичайна міра Лебега. Згідно із зауваженням 5.2 [25], відображення f_m є кільцевими Q-відображеннями при $Q=\left(\dfrac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1}$ в точці 0 відносно n-модуля. Як було вказано у прикладі 4, сім'я відображень f_m не є одностайно неперервною. Разом з тим всі умови теореми 1, що відносяться до заданого випадку, виконуються, окрім умови $Q\in FMO(0)$, в термінах вказаних метрики і міри.

***Приклад* 6.** Щоб отримати у прикладі 4 аналогічну сім'ю відображень, що є одностайно неперервною в нулі, варто покласти

$$g_m(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\big|(m-1)/m\big|\log\dfrac{e}{(m-1)/m}}, & x\in\mathbb{B}^n \operatorname{cap} B\big(0,(m-1)/m\big),\\ \dfrac{x}{|x|\log\dfrac{e}{|x|}}, & x\in\mathbb{B}^n\setminus B\big(0,(m-1)/m\big),\end{cases}$$

де $\mathbb{B}^n=\big\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|<1\big\}$. Можна показати, що g_m є кільцевими Q-відображеннями відносно n-модуля, де $Q(x)=\log^{n-1}\dfrac{e}{|x|}$ (див. міркування, використані при розгляді пропозиції 6.3 [8]). Одностайну неперервність цієї сім'ї можна отримати за допомогою безпосередніх міркувань, хоча вона випливає також із леми 4. Існування відповідної функції ψ випливає тут на основі леми 7.3 [8], причому розбіжність інтеграла (26) для $Q(x)=\log^{n-1}\dfrac{e}{|x|}$ перевіряється безпосередньо.

Неважко також вказати аналогічну сім'ю відображень і з прикладу 5, визначену в одиничному крузі з гіперболічними площею і метрикою.

Література

1. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Distortion and singularities of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465**, 1 – 13 (1970).
2. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results Math. Related Areas (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin (1993).
3. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
4. M. Cristea, *Open discrete mappings having local ACL^n inverses*, Complex Variables and Elliptic Equat., **55**, № 1-3, 61 – 90 (2010).
5. V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, *Toward the theory of ring Q-homeomorphisms*, Israel J. Math., **168**, 101 – 118 (2008).
6. Е. А. Севостьянов, *О равностепенно непрерывных семействах отображений, не принимающих значения из переменного множества*, Укр. мат. журн., **66**, № 3, 361 – 370 (2014).
7. J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer Science+Business Media, New York (2001).
8. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Science + Business Media, LLC, New York (2009).
9. Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов, *Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях*, Мат. сб., **207**, № 4, 65 – 112 (2016).
10. Е. А. Севостьянов, *О локальном и граничном поведении отображений в метрических пространствах*, Алгебра и анализ, **28**, № 6, 118 – 146 (2016).

11. E. A. Sevost'yanov, A. A. Markysh, *On Sokhotski – Casorati – Weierstrass theorem on metric spaces*, Complex Variables and Elliptic Equat., **64**, № 12, 1973 – 1993 (2019).
12. П. Монтель, *Нормальные семейства аналитических функций*, ОНТИ НКТП СССР, Москва, Ленинград (1936).
13. М. Берже, *Геометрия*, т. 1, Мир, Москва (1984).
14. Y. Burtscher Annegret, *Length structures on manifolds with continuous Riemannian metrics*, New York J. Math., **21**, 273 – 296 (2015).
15. J. M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer, New York (1997).
16. T. Adamowicz, N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35**, 609 – 626 (2010).
17. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва (1987).
18. A. Grigor'yan, *Isoperimetric inequalities and capacities on Riemannian manifolds. The Maz'ya anniversary collection*, Vol. **1**, 139 – 153 (1998); Oper. Theory Adv. and Appl., **109**, Birkhäuser, Basel (1999).
19. К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, Москва (1969).
20. Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов, *О граничном поведении открытых дискретных отображений на римановых многообразиях*, Мат. сб., **209**, № 5, 3 – 53 (2018).
21. Е. А. Полецкий, *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений*, Мат. сб., **83**, № 2, 261 – 272 (1970).
22. R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion*, Complex Variables and Elliptic Equat., **59**, № 2, 217 – 231 (2014).
23. Е. А. Севостьянов, *О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой*, Мат. тр., **15**, № 1, 178 – 204 (2012).
24. V. Ryazanov, S. Volkov, *On the boundary behavior of mappings in the class $W^{1,1}_{\rm loc}$ on Riemann surfaces*, Complex Anal. and Operator Theory, **11**, 1503 – 1520 (2017).
25. E. Sevost'yanov, *On boundary extension of mappings in metric spaces in the terms of prime ends*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **44**, № 1, 65 – 90 (2019).

Одержано 19.09.19