DOI: 10.37863/umzh.v72i10.1074

УДК 517.5

О. Козиненко, Д. Скороходов (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ НОРМ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА ДОДАТНІЙ ПІВОСІ

We obtain new Kolmogorov type sharp inequalities that estimate the norm of the Marchaud fractional derivative $\|D^k_- f\|_\infty$ of a function f defined on the positive half-line in terms of $\|f\|_p$, $1 < p < \infty$, and $\|f''\|_1$. In addition, we solve the following related problems: the Stechkin problem on the best approximation of the operator D^k_- by linear bounded operators and the problem on the best recovery of the operator D^k_- by using a class of elements given with an error.

Отримано деякі нові нерівності типу Колмогорова, що оцінюють норму дробової похідної в сенсі Маршо $\|D^k_- f\|_\infty$ функції f, визначеної на додатній півосі, через $\|f\|_p$, $1 < p < \infty$, і $\|f''\|_1$. Також розв'язано споріднені задачі: задачу Стєчкіна про найкраще наближення оператора D^k_- лінійними обмеженими операторами і задачу про найкраще відновлення оператора D^k_- на класі, елементи якого відомі з похибкою.

1. Вступ та постановка задач. Нехай G — дійсна вісь $\mathbb{R}$ або піввісь $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $1 \le$ $\le p, q, s \le \infty$, $k \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in \mathbb{N}$, $r > k$. Нехай також $L_p(G)$ — простір вимірних функцій $f: G \to \mathbb{R}$ зі стандартною нормою

$$\|f\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G \left|f(t)\right|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\left\{\left|f(t)\right| \colon t \in G\right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Позначимо через $L^r_{p,s}(G)$ простір функцій $f \in L_p(G)$, для яких $f^{(r-1)}$ локально абсолютно неперервна на G і $f^{(r)} \in L_s(G)$.

Нехай $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Нерівність вигляду

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \le K \|f\|^\mu_{L_p(G)} \left\|f^{(r)}\right\|^\lambda_{L_s(G)}, \qquad (1)$$

яка виконується для будь-якої функції $f \in L^r_{p,s}(G)$ з деякою сталою $K > 0$, що не залежить від f, називається мультиплікативною нерівністю типу Колмогорова (нерівністю Колмогорова – Надя у випадку $k = 0$). Відомо [1] (див. також [2], § 4), що стала K в нерівності (1) скінченна тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються такі умови:

1) $\mu = 1 - \lambda$ і $\lambda = \dfrac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p} \in [0, 1]$;

2) $\dfrac{r}{q} \le \dfrac{r-k}{p} + \dfrac{k}{s}$.

Уперше нерівності вигляду (1) з'явилися на початку XX століття в роботах [3 – 5]. Для функцій, визначених на $\mathbb{R}$, точна стала K відома для всіх значень k, r у таких випадках:

1) $p = q = s = \infty$ [3] $(r = 2)$, [6] $(r = 3, 4;\ r = 5$ і $k = 2)$ і [7] $(r \ge 5)$;

2) $p = q = s = 2$ [8];

3) $p = q = s = 1$ [9];

4) $q = \infty$ і $p = s = 2$ [10];

а для функцій, визначених на $\mathbb{R}_+$, — у випадках:

5) $p = q = s = +\infty$ [3] $(r = 2)$, [11] $(r = 3)$ і [12] $(r \ge 4)$;

6) $p = q = s = 2$ [5] $(r = 2)$, [13, 14] $(r \geq 3)$;

7) $q = \infty$ і $p = s = 2$ [15–17].

Детальний огляд інших відомих результатів щодо нерівностей вигляду (1) та подальші посилання можна знайти в оглядовій статті [18] та книзі [2].

Останнім часом все більше застосувань потребують дослідження похідних дробових порядків (див. [19–22]). Тому важливим є дослідження нерівностей типу Колмогорова і для норм дробових похідних:

$$\left\|\mathbf{D}^k f\right\|_{L_q(G)} \leq K \|f\|_{L_p(G)}^{1-\lambda} \left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p}, \tag{2}$$

де $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{D}^k$ — оператор дробового диференціювання порядку k, $f \in L^r_{p,s}(G)$ і стала $K > 0$ не залежить від f. У даній роботі ми розглянемо один з операторів дробового диференціювання — дробову похідну в сенсі Маршо [23] (див. також [20]). Нагадаємо (див. [20], розділ 5.6), що правосторонньою дробовою похідною $D^k_- f$ у сенсі Маршо порядку k функції $f : G \to \mathbb{R}$ в точці $x \in G$ називається функція

$$D^k_- f\,(x) = \frac{1}{\kappa(k,n)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\Delta^n_u f)\,(x)}{u^{1+k}}\, du,$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ (означення не залежить від вибору n) і

$$(\Delta^n_u f)\,(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x + mu), \qquad \kappa(k,n) := \Gamma(-k) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} m^k.$$

Перелічимо випадки, в яких точна стала K в нерівності (2) є відомою:

1) $G = \mathbb{R}$, $p = q = s = \infty$, $r = 2$, $k \in (0,1)$, $\mathbf{D}^k = D^k_-$ [24];

2) $G = \mathbb{R}_+$, $p = q = s = \infty$, $k \in (0,1]$, $r \in (k,2]$, $\mathbf{D}^k$ — оператор дробового диференціювання в сенсі Рімана–Ліувілля [25];

3) $G = \mathbb{R}_+$, $p = q = s = \infty$, $k \in (0,2) \setminus \{1\}$, $r = 2$, $\mathbf{D}^k$ — оператор дробового диференціювання в сенсі Рімана–Ліувілля [25];

4) $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+$, $p = s = 2$, $q = \infty$, $r \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} < k < r - \frac{1}{2}$, $\mathbf{D}^k$ — оператор дробового диференціювання в сенсі Вейля [26, 27];

5) $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+$, $p = q = \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, $r = 1$, $k \in \left(0, 1 - \frac{1}{s}\right)$, $\mathbf{D}^k = D^k_-$ [28, 29];

6) $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+$, $p = q = s = \infty$, $r = 1$, $k \in (0,1)$, $\mathbf{D}^k$ — оператор дробового диференціювання в сенсі Ріса [29, 30];

7) $G = \mathbb{R}$, $p = q = \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, $r = 1, 2$ і $k \in \left(0, r - \frac{1}{s}\right)$, $\mathbf{D}^k = D^k_-$ [31, 32];

8) $G = \mathbb{R}$, $p = q = s = 1$, $r = 1$, $k \in (0,1)$, $\mathbf{D}^k = D^k_-$ [33];

9) $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+$, $p = q = \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, $r = 2$, $k \in \left(0, 2 - \frac{1}{s}\right)$, $\mathbf{D}^k = D^k_-$ [33].

Огляд інших відомих нерівностей для норм дробових похідних можна знайти в монографії [34]. В даній роботі отримано нову точну нерівність вигляду (2) у випадку $G = \mathbb{R}_+$, $1 < p < \infty$, $q = \infty$, $s = 1$, $r = 2$ та $k \in (0,1)$ (див. теорему 1 та наслідок 1). Як застосування цієї нерівності розглянемо споріднені задачі про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими операторами та задачу про найкраще відновлення операторів на класі, елементи якого задані неточно.

Задача Стєчкіна. Наведемо постановку С. Б. Стєчкіна [35] задачі про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими. Нехай X, Y — банахові простори; $A\colon X \to Y$ — оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A)$; $Q \subset \mathcal{D}(A)$ — деяка множина. Функція

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta, A, Q) := \sup\big\{\|Af\|_Y : f \in Q, \|f\|_X \le \delta\big\}, \quad \delta \ge 0,$$

називається модулем неперервності оператора A на множині Q.

Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ позначимо простір лінійних обмежених операторів $S\colon X \to Y$. Позначимо відхилення оператора A від оператора $S \in \mathcal{L}$ на множині Q:

$$U(A, S; Q) := \sup_{x\in Q} \|Ax - Sx\|_Y$$

та для $N \ge 0$ означимо похибку найкращого наближення оператора A лінійними обмеженими операторами на множині Q:

$$E_N(A; Q) := \inf_{S\in\mathcal{L}\,:\, \|S\|\le N} U(A, S; Q). \tag{3}$$

Задача Стєчкіна про найкраще наближення оператора A лінійними обмеженими операторами на множині Q полягає в обчисленні величини (3) та знаходженні екстремальних операторів $S^* \in \mathcal{L}$, на яких досягається інфімум у правій частині (3), якщо такі оператори існують.

Теорема A [35]. *Нехай A — однорідний (зокрема, лінійний) оператор, $Q \subset \mathcal{D}(A)$ — центрально-симетрична опукла множина. Тоді для будь-яких $N \ge 0$ і $\delta \ge 0$*

$$E_N(A; Q) \ge \sup_{\delta\ge 0}\big\{\Omega(\delta, A, Q) - N\delta\big\} = \sup_{x\in Q}\big\{\|Ax\|_Y - N\|x\|_X\big\},$$

$$\Omega(\delta, A, Q) \le \inf_{N\ge 0}\big(E_N(A; Q) + N\delta\big).$$

Крім того, якщо існують елемент $x_0 \in Q$ і оператор $S_0 \in \mathcal{L}$ такі, що

$$\|Ax_0\|_Y = U(A, S_0; Q) + \|S_0\|\|x_0\|_X, \tag{4}$$

то $\Omega\big(\|x_0\|_X, A, Q\big) = \|Ax_0\|_Y$ і $E_{\|S_0\|}(A; Q) = U(A, S_0; Q) = \|Ax_0\|_Y - \|S_0\|\|x_0\|_X$. Отже, S_0 — екстремальний оператор у задачі (3) для $N = \|S_0\|$, а елемент x_0 реалізує супремум у правій частині означення величини $\Omega(\delta, A, Q)$ для $\delta = \|x_0\|_X$.

Задача про найкраще відновлення оператора на класі (див. [2], § 7.1). Нехай $A\colon X \to Y$ — оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A)$, значення якого на елементах класу $Q \subset \mathcal{D}(A)$ необхідно відновити за умови, що елементи класу Q відомі з деякою похибкою. Для відновлення оператора A будемо використовувати множину $\mathcal{R}$ операторів (однозначних відображень) $S\colon X \to Y$. В якості $\mathcal{R}$, як правило, розглядають одну із множин: множину $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, Y)$ усіх відображень, множину $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ усіх лінійних операторів, множину $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, Y)$ усіх лінійних обмежених операторів.

Для числа $\delta \geq 0$ та оператора $S \in \mathcal{R}$ означимо

$$U_\delta(A, S; Q) := \sup\left\{\|Ax - S\eta\|_Y : x \in Q,\ \ \eta \in X,\ \ \|x - \eta\|_X \leq \delta\right\}.$$

Тоді величина

$$\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{R}; A; Q\right) := \inf_{S \in \mathcal{R}} U_\delta(A, S; Q) \tag{5}$$

називається найкращим відновленням оператора A за допомогою множини відображень (методів відновлення) $\mathcal{R}$ на елементах класу Q, які задано з похибкою δ.

Наступне твердження встановлює взаємозв'язок задачі (5) із задачами про обчислення модуля неперервності оператора та найкращого наближення оператора лінійними обмеженими операторами.

Теорема Б ([2], теорема 7.1.2). *Нехай A — однорідний оператор, Q — центрально-симетрична опукла множина. Тоді для кожного $\delta \geq 0$*

$$\Omega(\delta, A, Q) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A; Q) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{B}; A; Q) = \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{L}; A; Q\right) \leq \inf_{N \geq 0}\left(E_N(A; Q) + N\delta\right).$$

Більше того, якщо існують елемент $x_0 \in Q$ та оператор $S_0 \in \mathcal{B}$, для яких виконується рівність (4), *то*

$$\|Ax_0\|_Y = \Omega(\delta, A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A; Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{B}; A; Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A; Q), \quad \delta = \|x_0\|_X.$$

Дана робота має таку структуру. Основні результати наведено у другому пункті, а їхньому доведенню присвячено четвертий пункт. У третьому пункті доведено допоміжне твердження про існування розв'язку спеціальної нелінійної системи рівнянь.

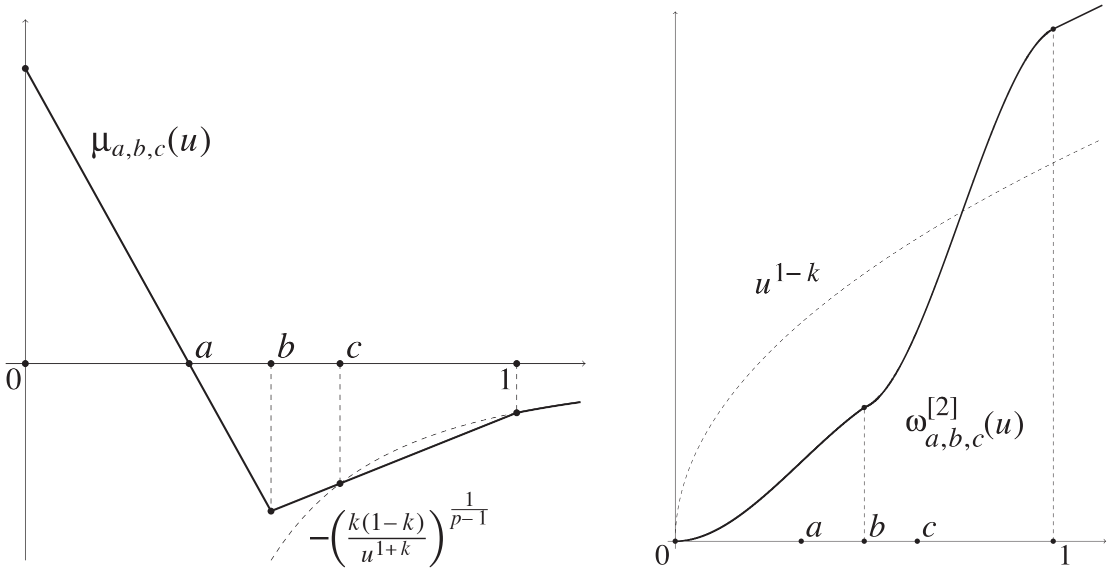
2. Основні результати. Для зручності далі будемо використовувати скорочення: $L_p = L_p(\mathbb{R}_+)$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}$, $L^r_{p,s} = L^r_{p,s}(\mathbb{R}_+)$. Нехай $1 < p < \infty$. Розглянемо множину $T = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < b \leq c < 1\right\}$ і для довільної трійки чисел $(a, b, c) \in T$ означимо функції

$$\mu_{a,b,c}(u) := \begin{cases} \dfrac{u - a}{b - a}\dfrac{1}{1 - c}\left(\dfrac{k(1-k)}{c^{1+k}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(b\left(1 - c^{\frac{1+k}{p-1}}\right) - \left(1 - c^{1+\frac{1+k}{p-1}}\right)\right), & u \in [0, b], \\ \dfrac{1}{1 - c}\left(\dfrac{k(1-k)}{c^{1+k}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(u\left(1 - c^{\frac{1+k}{p-1}}\right) - \left(1 - c^{1+\frac{1+k}{p-1}}\right)\right), & u \in [b, 1], \\ (-1)\left(\dfrac{k(1-k)}{u^{1+k}}\right)^{\frac{1}{p-1}}, & u \in (1, +\infty), \end{cases}$$

і $\omega_{a,b,c} := |\mu_{a,b,c}|^{p-1}\operatorname{sgn}\mu_{a,b,c}$. Для $r \in \mathbb{N}$ через $g^{[r]}$ позначимо первісну функції $g \in L_1$ порядку r, для якої $g^{[r]}(0) = 0$, тобто

$$g^{[r]}(\cdot) = \int\limits_0^{(\cdot)} g^{[r-1]}(u)\,du, \qquad \text{де} \quad g^{[0]} = g.$$

Графіки функцій $\mu_{a,b,c}$ і $\omega^{[2]}_{a,b,c}$ при $p = 2$ зображено на рисунку.



Має місце допоміжне твердження, доведенню якого присвячено третій пункт.

Лема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $k \in (0,1)$. *Тоді система рівнянь*

$$\begin{aligned}
&\omega^{[1]}_{a,b,c}(b) = (1-k)b^{-k},\\
&\omega^{[1]}_{a,b,c}(1) = 1-k,\\
&\omega^{[2]}_{a,b,c}(b) + \omega^{[2]}_{a,b,c}(1) = 1 + b^{1-k}
\end{aligned} \tag{6}$$

має хоча б один розв'язок в T.

Нехай $(a^*, b^*, c^*) \in T$ — деякий розв'язок системи (6). Через ω і μ позначимо функції ω_{a^*,b^*,c^*} і μ_{a^*,b^*,c^*} відповідно. Нескладно бачити, що $\mu \notin L^2_{p,1}$ і для будь-якого $h > 0$ виконується рівність

$$\left\|D^k_- \mu\right\|_\infty = \frac{\|\omega\|_{p'}}{\Gamma(2-k)h^{k+1/p}}\|\mu\|_p + \frac{h^{1-k}\left\|\omega^{[2]}(u) - u^{1-k}\right\|_\infty}{\Gamma(2-k)}\|\mu'\|_V, \tag{7}$$

де $\|g\|_V$ позначає варіацію функції $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай* $k \in (0,1)$, $h > 0$, $1 < p < \infty$ *і* $p' = p/(p-1)$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^2_{p,1}$ *виконується адитивна нерівність*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \le \frac{\|\omega\|_{p'}}{\Gamma(2-k)h^{k+1/p}}\|f\|_p + \frac{h^{1-k}\left\|\omega^{[2]}(u) - u^{1-k}\right\|_\infty}{\Gamma(2-k)}\|f''\|_1. \tag{8}$$

Більше того, існує така множина функцій $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2_{p,1}$, *що для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\left\|D^k_- f_\varepsilon\right\|_\infty > \frac{\|\omega\|_{p'}}{\Gamma(2-k)h^{k+1/p}}\|f_\varepsilon\|_p + \left(\frac{h^{1-k}\left\|\omega^{[2]}(u) - u^{1-k}\right\|_\infty}{\Gamma(2-k)} - \varepsilon\right)\left\|f''_\varepsilon\right\|_1.$$

Мінімізуючи нерівність (8) за параметром $h > 0$, отримуємо точну мультиплікативну нерівність вигляду (2).

***Наслідок* 1.** *Нехай $k \in (0,1)$ і $1 < p < \infty$. Тоді для довільної функції $f \in L^2_{p,1}$ виконується точна нерівність*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \le \frac{\|D^k_-\mu\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\,\|f\|_p^{1-\lambda}\|f''\|_1^\lambda, \qquad \lambda = \frac{k+1/p}{1+1/p}. \tag{9}$$

Позначимо $W^2_{p,1} := \left\{f \in L^2_{p,1} : \|f''\|_1 \le 1\right\}$ і розглянемо лінійний оператор $F_N : L_p \to L_\infty$, $N > 0$, визначений співвідношенням

$$F_N f(\cdot) = \frac{h^{k+1}}{\Gamma(2-k)} \int\limits_0^{+\infty} \omega(ht) f(\cdot + t)\,dt, \quad f \in L_p, \tag{10}$$

де

$$h = \left(N\Gamma(2-k)\|\omega\|_{p'}^{-1}\right)^{\frac{1}{k+1/p}}. \tag{11}$$

Нескладно бачити, що оператор F_N є обмеженим і $\|F_N\| = N$. Наступні твердження дають розв'язок задачі Стєчкіна про найкраще наближення оператора D^k_- на класі $W^2_{p,1}$ та задачі про найкраще відновлення оператора D^k_- на класі $W^2_{p,1}$, елементи якого задано з похибкою.

Теорема 2. *Нехай $k \in (0,1)$, $N > 0$ і $1 < p < \infty$. Тоді*

$$E_N\left(D^k_-; W^2_{p,1}\right) = U\left(D^k_-, F_N; W^2_{p,1}\right) =$$

$$= \lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \left(\frac{\left\|D^k_-\mu\right\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} N^{\frac{1}{\lambda}-1}, \quad \lambda = \frac{k+1/p}{1+1/p}.$$

Теорема 3. *Нехай $k \in (0,1)$, $1 < p < \infty$ і $\delta \ge 0$. Тоді*

$$\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{O}; D^k_-; W^2_{p,1}\right) = \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{B}; D^k_-; W^2_{p,1}\right) = \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{L}; D^k_-; W^2_{p,1}\right) = \frac{\|D^k_-\mu\|_\infty\,\delta^{1-\lambda}}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}, \quad \lambda = \frac{k+1/p}{1+1/p}.$$

Більше того, екстремальним є оператор F_N, де

$$N = (1-\lambda)\frac{\left\|D^k_-\mu\right\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\delta^{-\lambda}.$$

***Зауваження* 1.** Нехай V — простір функцій $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації та $L^r_{p,V}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, — простір функцій $f \in L_p$, які мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(r)} \in V$. Відомо, що $L^2_{p,1} \subset L^1_{p,V}$ і $\|f''\|_1 = \|f'\|_V$ для всіх $f \in L^2_{p,1}$. Теорема 1 і наслідок 1 залишаються правильними, якщо простір $L^2_{p,1}$ замінити більш широким простором $L^1_{p,V}$, а норму $\|f''\|_1$ — нормою $\|f'\|_V$. Також теореми 2 і 3 залишаються правильними, якщо клас $W^2_{p,1}$ замінити класом $W^1_{p,V} := \left\{f \in L^1_{p,V} : \|f'\|_V \le 1\right\}$.

3. Доведення леми 1. Цей пункт присвячено доведенню допоміжної леми 1. Запишемо (6) у вигляді

$$G_1\,(a,b,c) := \int\limits_0^b \omega_{a,b,c}(u)\,du - (1-k)b^{-k} = 0,$$

$$G_2\,(a,b,c) := \int\limits_b^1 \omega_{a,b,c}(u)\,du + (1-k)(b^{-k}-1) = 0, \tag{12}$$

$$G_3\,(a,b,c) := \int\limits_0^b u\omega_{a,b,c}(u)\,du + \int\limits_0^1 u\omega_{a,b,c}(u)\,du + k\left(b^{1-k}+1\right) = 0.$$

Розглянемо множину $T' = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < a < b \le c \le 1\right\}$, яка містить T, а функції G_1, G_2, G_3 довизначимо на T' за неперервністю. Покажемо, що система (12) має хоча б один розв'язок у T'.

Неважко бачити, що функція G_1 та її частинні похідні неперервні на T'. Для довільних $b_0 \in (0,1]$ і $c_0 \in [b_0, 1]$ функція $G_1(a, b_0, c_0)$ зростає за змінною a. Оскільки $G_1(0, b_0, c_0) < 0$ та $\lim_{a \to b_0^+} G_1(a, b_0, c_0) = +\infty$, то існує таке $a_0 \in (0, b_0)$, що $G_1(a_0, b_0, c_0) = 0$. За теоремою про неявну функцію (див. теорему $1'$ в [36], § 7.15) в деякому околі точки (a_0, b_0, c_0) існує і неперервна функція $\xi(b,c)$, для якої $G_1\bigl(\xi(b,c), b, c\bigr) = 0$. Отже, функція ξ визначена і неперервна на множині $\Xi = \left\{(b,c) \colon b \in (0,1],\ c \in [b,1]\right\}$, причому $G_1(\xi(b,c),b,c) = 0$ і $0 < \xi(b,c) < b$ для всіх $(b,c) \in \Xi$.

Враховуючи, що G_2 не залежить від змінної a, означуємо функції $F_1, F_2 \colon \Xi \to \mathbb{R}$:

$$F_1(b,c) := G_2(\xi(b,c),b,c), \qquad F_2(b,c) := G_3\left(\xi(b,c),b,c\right), \quad (b,c) \in \Xi.$$

Доведемо існування розв'язку на Ξ системи рівнянь

$$\begin{aligned} F_1(b,c) &= 0, \\ F_2(b,c) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

звідки випливатиме, що система (12) має розв'язок у T'.

Зауважимо, що функції F_1, F_2 є композиціями неперервних функцій $G_2, G_3 \colon T' \to \mathbb{R}$ відповідно, з функцією $\Upsilon \colon \Xi \to T'$, яка визначена правилом $\Upsilon(b,c) = (\xi(b,c),b,c)$. Тому F_1 і F_2 неперервні на Ξ. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,1)$, означимо $\Xi_\varepsilon := \left\{(b,c) \colon b \in [\varepsilon,1],\ c \in [b,1]\right\}$, яка є підмножиною Ξ, і розглянемо неперервне векторне поле $F = (F_1, F_2) \colon \Xi_\varepsilon \to \mathbb{R}^2$. Припустимо супротивне, тобто що рівняння (13) не має розв'язку. Отже, векторне поле F не обертається в нуль на Ξ_ε.

Далі нам буде потрібно поняття обертання векторного поля. Нагадаємо (див. [37]), що обертанням векторного поля $\Phi \colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$, яке не обертається в нуль, на кривій Γ, яка задана параметрично з параметром $t \in [\alpha, \beta]$, називається величина

$$\gamma(\Phi, \Gamma) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta(\beta) - \theta(\alpha)\right) = \frac{1}{2\pi}\theta(\beta),$$

де $\theta(t)$ — кутова функція поля Φ на кривій Γ, тобто функція, яка вимірює кут (у радіанах) між векторами $\Phi(t)$ та $\Phi(\alpha)$, відрахований від вектора $\Phi(\alpha)$ проти годинникової стрілки. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — замкнена множина з непорожньою однозв'язною внутрішністю $\operatorname{int}\Omega$, межею якої є крива Γ. Особливими точками поля $\Phi\colon \Omega\subset\mathbb{R}^2$ називаються такі точки множини Ω, в яких Φ або не визначене, або розривне, або обертається в нуль. За теоремою 3.2 [37] число особливих точок векторного поля $\Phi\colon\Omega\to\mathbb{R}^2$, яке не обертається в нуль на Γ, на області Ω дорівнює обертанню векторного поля Φ на межі Ω — кривій Γ.

Оскільки поле $F\colon\Xi_\varepsilon\to\mathbb{R}^2$ неперервне і за припущенням не обертається в нуль, то за теоремою 3.2 [37] $\gamma(F,\partial\Xi_\varepsilon)=0$.

З іншого боку, обчислимо обертання векторного поля F на $\partial\Xi_\varepsilon$ безпосередньо. Зрозуміло, що множина $\partial\Xi_\varepsilon$ — трикутник із вершинами $A_\varepsilon=(\varepsilon,\varepsilon)$, $B=(1,1)$ і $C_\varepsilon=(\varepsilon,1)$.

1. Розглянемо першу компоненту F_1 поля F. На стороні $\overline{A_\varepsilon B}=\{(b,b)\colon b\in[\varepsilon,1]\}$ для кожного $b\in[\varepsilon,1)$ маємо

$$\omega_{\xi(b,b),b,b}(u)>k(1-k)u^{-1-k},\quad u\in(b,1),$$

звідки

$$F_1(b,b)=\int\limits_b^1\omega_{\xi(b,b),b,b}(u)\,du+(1-k)(b^{-k}-1)<0.$$

Також $F_1(1,1)=0$. Отже, на стороні $\overline{A_\varepsilon B}$ функція F_1 набуває недодатних значень і обертається в нуль лише в точці B.

На стороні $\overline{BC_\varepsilon}=\big\{(b,1)\colon b\in[\varepsilon,1]\big\}$ для кожного $b\in[\varepsilon,1)$ маємо

$$\omega_{\xi(b,1),b,1}(u)<k(1-k)u^{-1-k},\quad u\in(b,1),$$

звідки випливає, що $F_1\left(b,1\right)>0$. Отже, на стороні $\overline{BC_\varepsilon}$ функція F_1 набуває невід’ємних значень і обертається в нуль лише в точці B.

Нарешті, на стороні $\overline{C_\varepsilon A_\varepsilon}=\{(\varepsilon,c)\colon c\in[\varepsilon,1]\}$ функція $F_1(\varepsilon,c)$ зростає за змінною $c\in[\varepsilon,1]$ і за вищенаведеними міркуваннями $F_1(\varepsilon,\varepsilon)<0$ і $F_1(\varepsilon,1)>0$. Отже, за теоремою Больцано – Коші існує єдине $c_\varepsilon\in(\varepsilon,1)$ таке, що $F_1\big(\varepsilon,c_\varepsilon\big)=0$.

Таким чином, F_1 обертається в нуль на межі $\partial\Xi_\varepsilon$ лише в точках B та $D_\varepsilon=(\varepsilon,c_\varepsilon)$. Тому для обчислення величини $\gamma(F,\partial\Xi_\varepsilon)$ достатньо знайти $\operatorname{sgn}F_2$ в точках B та D_ε. При цьому якщо $\operatorname{sgn}F_2(1,1)=\operatorname{sgn}F_2\big(\varepsilon,c_\varepsilon\big)$, то $\gamma(F,\partial\Xi_\varepsilon)=0$; в іншому випадку $\gamma(F,\partial\Xi_\varepsilon)=-1$, якщо $\operatorname{sgn}F_2(1,1)=1$, і $\gamma(F,\partial\Xi_\varepsilon)=1$, якщо $\operatorname{sgn}F_2(1,1)=-1$.

2. Визначимо знак числа $F_2(1,1)$. Нехай $\alpha=\xi(1,1)$. Тоді

$$G_1(\alpha,1,1)=\int\limits_0^\alpha\frac{k(1-k)(\alpha-u)^{p-1}}{(1-\alpha)^{p-1}}\,du-\int\limits_\alpha^1\frac{k(1-k)(u-\alpha)^{p-1}}{(1-\alpha)^{p-1}}\,du-(1-k)=$$

$$=\frac{\alpha^pk(1-k)}{p(1-\alpha)^{p-1}}-\frac{(1-\alpha)^pk(1-k)}{p(1-\alpha)^{p-1}}-(1-k)=$$

$$=\frac{\alpha^pk(1-k)}{p(1-\alpha)^{p-1}}\left(1-\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^p-\frac{p}{k}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{p-1}\right).$$

За означенням функції ξ параметр $\alpha\in(0,1)$ і $G_1(\alpha,1,1)=0$. Підставляючи $q=\dfrac{1}{\alpha}-1\in$ $\in(0,+\infty)$ і враховуючи попередній вираз для $G_1(\alpha,1,1)$, отримуємо рівність

$$q^{p-1}\left(q+\frac{p}{k}(1+q)\right)=1. \tag{14}$$

Покажемо, що $F_2(1,1)>0$. Дійсно,

$$F_2(1,1)=2\left(k+\int\limits_0^\alpha u\frac{k(1-k)(\alpha-u)^{p-1}}{(1-\alpha)^{p-1}}\,du-\int\limits_\alpha^1 u\frac{k(1-k)(u-\alpha)^{p-1}}{(1-\alpha)^{p-1}}\,du\right)=$$

$$=2\left(k+\frac{k(1-k)}{(1-\alpha)^{p-1}}\left(\frac{\alpha^{p+1}}{p(p+1)}-\frac{(1-\alpha)^{p+1}}{p+1}-\frac{\alpha(1-\alpha)^p}{p}\right)\right)=$$

$$=C\left(\frac{p(p+1)}{1-k}(1+q)^2q^{p-1}+1-pq^{p+1}-(p+1)q^p\right),$$

де $C=\dfrac{2k(1-k)\alpha^{p+1}}{p(p+1)(1-\alpha)^{p-1}}>0$. Підставивши q^{p-1} з рівності (14), отримаємо

$$F_2(1,1)=\frac{C}{q+\frac{p}{k}(1+q)}\left(\frac{p(p+1)}{1-k}(1+q)^2+q+\frac{p}{k}(1+q)-pq^2-(p+1)q\right)=:$$

$$=:\frac{CM(q)}{q+\frac{p}{k}(1+q)}.$$

Множник $\dfrac{C}{q+\frac{p}{k}(1+q)}$ додатний, тому знак $F_2(1,1)$ визначається знаком множника $M(q)$, який можна записати у вигляді

$$M(q)=q^2\left(\frac{p(p+1)}{1-k}-p\right)+q\left(\frac{2p(p+1)}{1-k}+\frac{p}{k}-p\right)+\left(\frac{p(p+1)}{1-k}+\frac{p}{k}\right).$$

Вочевидь, кожний доданок у виразі для $M(q)$ додатний, а тому $M(q)>0$. Отже, $\operatorname{sgn}F_2(1,1)=1$.

3. Визначимо знак числа $F_2\big(\varepsilon,c_\varepsilon\big)$ для достатньо малих $\varepsilon>0$. Для цього дослідимо асимптотичну поведінку $F_2\big(\varepsilon,c_\varepsilon\big)$ при $\varepsilon\to0^+$. Нехай $\alpha_\varepsilon=\xi\big(\varepsilon,c_\varepsilon\big)\in(0,\varepsilon)$ та для зручності позначимо $\mu_\varepsilon:=\mu_{\xi(\varepsilon,c_\varepsilon),\varepsilon,c_\varepsilon}$ і $A_\varepsilon:=-\mu_\varepsilon(\varepsilon)$. Тоді

$$\mu_\varepsilon(u)=-A_\varepsilon+\frac{u-\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(-\big(k(1-k)\big)^{\frac{1}{p-1}}+A_\varepsilon\right),\quad u\in[\varepsilon,1].$$

Підставляючи цей вираз у рівняння $F_1(\varepsilon,c_\varepsilon)=0$, отримуємо

$$\frac{1-\varepsilon}{-\big(k(1-k)\big)^{\frac{1}{p-1}}+A_\varepsilon}\,\frac{\big(k(1-k)\big)^{\frac{p}{p-1}}-A_\varepsilon^p}{p}+(1-k)\big(\varepsilon^{-k}-1\big)=0.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $\varepsilon\to0^+$, переконуємося, що $A_\varepsilon\to+\infty$ і, більше того,

$$A_\varepsilon^{p-1}=(1-k)p\varepsilon^{-k}+o(\varepsilon^{-k}),\quad \varepsilon\to0^+. \tag{15}$$

Далі, для $u \in [0, \varepsilon]$ маємо

$$\mu_\varepsilon(u) = -A_\varepsilon \frac{u - \alpha_\varepsilon}{\varepsilon - \alpha_\varepsilon}.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння $G_1(\alpha_\varepsilon, \varepsilon, c_\varepsilon) = 0$, одержуємо

$$\frac{A_\varepsilon^{p-1}}{p} \frac{\alpha_\varepsilon^p - (\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^p}{(\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^{p-1}} - (1-k)\varepsilon^{-k} = 0.$$

Підставивши $\alpha_\varepsilon = \varepsilon \beta_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon \in (0,1)$, в останнє рівняння, матимемо

$$\beta_\varepsilon^p - (1 - \beta_\varepsilon)^p = (1-k)p \frac{\varepsilon^{-k-1}}{A_\varepsilon^{p-1}} (1 - \beta_\varepsilon)^{p-1}.$$

Поділимо обидві частини отриманого співвідношення на β_ε^p і виконаємо підстановку $\dfrac{1}{\beta_\varepsilon} - 1 =$ $= q_\varepsilon \in (0, +\infty)$:

$$1 - q_\varepsilon^p = (1-k)p \frac{\varepsilon^{-k-1}}{A_\varepsilon^{p-1}} q_\varepsilon^{p-1} \big(q_\varepsilon + 1\big).$$

Переходячи в останній рівності до границі при $\varepsilon \to 0^+$, нескладно бачити, що $q_\varepsilon \to 0$, більше того, $q_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} + o\Big(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big)$, $\beta_\varepsilon = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} + o\Big(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big)$ і

$$\alpha_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} + o\Big(\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}\Big), \quad \varepsilon \to 0^+. \tag{16}$$

Дослідимо асимптотичну поведінку $F_2(\varepsilon, c_\varepsilon)$. За означенням

$$F_2\big(\varepsilon, c_\varepsilon\big) = I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 + I_\varepsilon^3 + k\big(1 + \varepsilon^{1-k}\big),$$

де

$$I_\varepsilon^1 := 2 \int\limits_0^{\alpha_\varepsilon} u \, |\mu_\varepsilon(u)|^{p-1} \, du = \frac{2\alpha_\varepsilon^{p+1} A_\varepsilon^{p-1}}{p(p+1)(\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^{p-1}},$$

$$I_\varepsilon^2 := -2 \int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\varepsilon} u \, |\mu_\varepsilon(u)|^{p-1} \, du = -\frac{2A_\varepsilon^{p-1}}{(\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^{p-1}} \left(\frac{(\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^{p+1}}{p+1} + \frac{\alpha_\varepsilon \, (\varepsilon - \alpha_\varepsilon)^p}{p} \right),$$

$$I_\varepsilon^3 := -\int\limits_\varepsilon^1 u \, |\mu_\varepsilon(u)|^{p-1} \, du =$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)\Big(\big(k(1-k)\big)^{\frac{p}{p-1}} - A_\varepsilon^p\Big)}{p\Big(A_\varepsilon - \big(k(1-k)\big)^{\frac{1}{p-1}}\Big)} + \frac{(1-\varepsilon)^2 \Big(A_\varepsilon^{p+1} - \big(k(1-k)\big)^{\frac{p+1}{p-1}}\Big)}{p(p+1)\Big(A_\varepsilon - \big(k(1-k)\big)^{\frac{1}{p-1}}\Big)^2}.$$

Використовуючи асимптотичні рівності (16) і (15), переконуємося, що при $\varepsilon \to 0^+$

$$I_\varepsilon^1 = \frac{2(1-k)}{p+1}\varepsilon^{1-k} + o\big(\varepsilon^{1-k}\big), \qquad I_\varepsilon^2 = o\big(\varepsilon^{1-k}\big), \qquad I_\varepsilon^3 = -\frac{(1-k)p}{p+1}\varepsilon^{-k} + o\big(\varepsilon^{-k}\big).$$

Тому $F_2\big(\varepsilon, c_\varepsilon\big) = -\dfrac{(1-k)p}{p+1}\varepsilon^{-k} + o\big(\varepsilon^{-k}\big)$, $\varepsilon \to 0^+$, і, отже, існує достатньо мале $\varepsilon_0 \in (0,1)$, для якого $\operatorname{sgn} F_2(\varepsilon, c_\varepsilon) = -1$. Це означає, що $\gamma\big(F, \partial\Xi_{\varepsilon_0}\big) = -1$, що суперечить припущенню про відсутність розв'язків системи рівнянь (13). Тобто існує трійка чисел $(a^*, b^*, c^*) \in T'$, яка буде розв'язком системи (6). Також з попереднього аналізу нескладно бачити, що поле F не обертається в нуль на півінтервалі $\big\{(b,1) : b \in (0,1]\big\}$, звідки випливає, що $c^* \neq 1$ і $(a^*, b^*, c^*) \in T$.

4. Доведення нерівності типу Колмогорова. ***Доведення теореми* 1.** Спочатку доведемо нерівність (8) у випадку $h = 1$. За властивостями (6) для будь-якої функції $f \in L^2_{p,1}$ можна записати таку рівність:

$$D^k_- f\,(0) - \frac{1}{\Gamma(2-k)} \int\limits_0^{+\infty} \omega(u) f(u)\,du = \frac{1}{\Gamma(2-k)} \int\limits_0^{+\infty} \big(u^{1-k} - \omega^{[2]}(u)\big) f''(u)\,du. \tag{17}$$

Оскільки $\lim_{\rho\to 0^+} \big\|(\cdot)^{1-k}\chi_{(0,\rho)}(\cdot)\big\|_\infty = 0$, де $\chi_{(0,\rho)}(x)$ — характеристична функція, тобто

$$\chi_{(0,\rho)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0,\rho), \\ 0, & x \notin (0,\rho), \end{cases}$$

$\omega^{[1]}$ локально абсолютно неперервна на $\mathbb{R}_+$ і $(\cdot)^{1-k} - \omega^{[2]}(\cdot) \in L_\infty$, то за теоремою 4 [33] отримаємо

$$\big\|D^k_- f\big\|_\infty \le \frac{1}{\Gamma(2-k)} \Big(\|\omega\|_{p'} \|f\|_p + \big\|(\cdot)^{1-k} - \omega^{[2]}(\cdot)\big\|_\infty \|f''\|_1 \Big). \tag{18}$$

Обґрунтуємо точність нерівності (8) у випадку $h = 1$. Для інших значень h точність (8) можна довести за аналогією. За побудовою виконуються рівність (7) і рівності

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \omega(u)\mu(u)\,du \right| = \|\mu\|_p \|\omega\|_{p'}, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \big(u^{1-k} - \omega^{[2]}(u)\big) d\mu'(u) = \big\|(\cdot)^{1-k} - \omega^{[2]}(\cdot)\big\|_\infty \|\mu'\|_V.$$

Для $\lambda > 0$ розглянемо усереднення μ_λ за Стєкловим функції μ, тобто

$$\mu_\lambda(\cdot) := \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \mu(\cdot + u)\,du.$$

Нескладно бачити, що $\mu_\lambda \in L^2_{p,1}$ і на підставі рівності (17) виконуються граничні рівності

$$\lim_{\lambda\to 0^+} D^k_- \mu_\lambda(0) = D^k_- \mu(0), \qquad \lim_{\lambda\to 0^+} \big\|\mu''_\lambda\big\|_1 = \|\mu'\|_V, \qquad \lim_{\lambda\to 0^+} \|\mu_\lambda\|_p = \|\mu\|_p.$$

З урахуванням вищенаведених граничних рівностей, рівності (17) і неперервності дробової похідної $D^k_- f$ функції $f \in L^2_{p,1}$ (див. [33], твердження 4) маємо

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\left\|D^k_-\mu_\lambda\right\|_\infty-\|\omega\|_{p'}\,\|\mu_\lambda\|_p}{\left\|\mu''_\lambda\right\|_1}\geq \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{D^k_-\mu_\lambda(0)-\|\omega\|_{p'}\,\|\mu_\lambda\|_p}{\left\|\mu''_\lambda\right\|_1}=$$

$$=\frac{D^k_-\mu(0)-\|\omega\|_{p'}\|\mu\|_p}{\|\mu'\|_V}=\frac{\left\|(\cdot)^{1-k}-\omega^{[2]}(\cdot)\right\|_\infty}{\Gamma(2-k)},$$

що завершує доведення у випадку $h=1$. У випадку довільного $h>0$ нерівність (8) можна отримати з нерівності (18), підставивши замість функції f функцію $h^{-k}f\left(h(\cdot)\right)$. Точність нерівності (8) для довільного $h>0$ доводиться за аналогією до випадку $h=1$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** За лемою 4 [38], використовуючи міркування, аналогічні тим, що були застосовані при доведенні теореми 2 [38], отримуємо

$$E_N\big(D^k_-;W^2_{p,1}\big)=\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\left(\frac{\left\|D^k_-\mu\right\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}N^{\frac{1}{\lambda}-1}. \tag{19}$$

Залишилося переконатися в екстремальності оператора F_N. Нехай h визначено рівністю (11) і $x\in\mathbb{R}_+$. Підставляючи в рівність (17) замість функції $f(\cdot)$ функцію $h^kg\left(x+\dfrac{(\cdot)}{h}\right)$ і виконуючи заміну змінної, неважко бачити, що

$$D^k_-g(x)-F_Ng(x)=\frac{1}{\Gamma(2-k)}\int\limits_0^{+\infty}\Big((hu)^{1-k}-\omega^{[2]}(hu)\Big)\,g''(u)\,du.$$

Отже,

$$U\big(D^k_-,F_N;W^2_{p,1}\big)\leq\frac{\left\|(\cdot)^{1-k}-\omega^{[2]}(\cdot)\right\|_\infty}{\Gamma(2-k)}=\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\left(\frac{\left\|D^k_-\mu\right\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}N^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Співставляючи останню нерівність з рівністю (19), переконуємося в екстремальності оператора F_N.

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** З леми 4 [38] випливає, що

$$E_N\big(D^k_-;W^2_{p,1}\big)=\sup_{\delta\geq 0}\left\{\Omega\left(\delta,D^k_-,W^2_{p,1}\right)-N\delta\right\}.$$

Звідси, а також з теореми 3.2 [18] випливає, що

$$\mathcal{E}_\delta\big(\mathcal{O};D^k_-;W^2_{p,1}\big)=\mathcal{E}_\delta\big(\mathcal{L};D^k_-;W^2_{p,1}\big)=\mathcal{E}_\delta\big(\mathcal{B};D^k_-;W^2_{p,1}\big)=\Omega\big(\delta,D^k_-,W^2_{p,1}\big).$$

При цьому для $\delta>0$ екстремальним оператором є оператор F_N, де

$$N=(1-\lambda)\frac{\left\|D^k_-\mu\right\|_\infty}{\|\mu\|_p^{1-\lambda}\|\mu'\|_V^\lambda}\delta^{-\lambda}.$$

Теорему 3 доведено.

Література

1. В. Н. Габушин, *Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p*, Мат. заметки, **1**, № 3, 291 – 298 (1967); *English translation*: Math. Notes, **1**, № 3, 194 – 198 (1967).
2. В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
3. E. Landau, *Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion*, Proc. London Math. Soc., **13**, 43 – 49 (1913).
4. J. Hadamard, *Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees*, C. R. Soc. Math. France, **41**, 68 – 72 (1914).
5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Contribution to the arithmetic theory of series*, Proc. London Math. Soc. (2), **11**, 411 – 478 (1912).
6. Г. Е. Шилов, *О неравенствах между производными*, Сб. науч. студ. работ МГУ, 17 – 27 (1937).
7. A. N. Kolmogorov, *On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on the infinite interval*, Uch. Zap. MGU, Math., **30**, № 1 (1939).
8. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequlities*, Cambridge (1934).
9. E. M. Stein, *Functions of exponential type*, Ann. Math., **65**, № 3, 582 – 592 (1957).
10. Л. В. Тайков, *Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования*, Мат. заметки, **4**, № 2, 233 – 238 (1968).
11. А. П. Маторин, *О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой*, Укр. мат. журн., **7**, № 2, 262 – 266 (1955).
12. I. J. Shoenberg, A. Cavaretta, *Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on half-line*, MRC Technical Summary Report 1050, Madison, Wisconsin (1970).
13. Ю. И. Любич, *О неравенствах между степенями линейных операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **24**, 825 – 864 (1960).
14. Н. П. Купцов, *Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **138**, 94 – 117 (1975).
15. В. Н. Габушин, *О наилучшем приближении дифференциальных операторов на полуоси*, Мат. заметки, **6**, № 3, 573–582 (1969).
16. Н. П. Купцов, *О точных константах в неравенствах между нормами функций и их производных*, Мат. заметки, **41**, № 3, 313 – 319 (1987).
17. Г. А. Калябин, *Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)*, Функцион. анализ и его прил., **38**, № 3, 29 – 38 (2004).
18. В. В. Арестов, В. Н. Габушин, *Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными*, Изв. вузов, Математика, 42 – 68 (1995); *English translation*: Russian Math. (Iz. VUZ), 38 – 63 (1995).
19. K. B. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus; theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Math. Sci. and Eng., Vol. 5, Acad. Press (1974).
20. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Taylor& Francis Books Ltd, London (2002).
21. F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*, Imperial College Press (2010).
22. V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, Berlin (2010).
23. A. Marchaud, *Sur les derivees et sur les differences des fonctions de variables reelles*, J. Math. Pures et Appl. (9), **6**, 337 – 426 (1927).
24. S. P. Geisberg, *Generalization of Hadamard's inequality*, Sb. Nauch. Tr. Leningr. Mekh. Inst., **50**, 42 – 54 (1965).
25. V. V. Arestov, *Inequalities for fractional derivatives on the half-line*, Approxim. Theory, Vol. 4, Banach Center Publ., Warsaw (1979), p. 19 – 34.
26. А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, *О неравенствах для производных в многомерном случае*, Мат. заметки, **25**, № 1, 59 – 73 (1979).
27. G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tihomirov, *On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line*, Anal. Math., **7**, № 1, 37 – 47 (1981).
28. В. Ф. Бабенко, М. С. Чурілова, *Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку*, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат., **6**, 16 – 20 (2001).

29. М. С. Чурілова, *Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації*, Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Дніпропетровськ (2006).
30. В. Ф. Бабенко, М. С. Чурілова, *Про нерівності типу Колмогорова для дробових похідних функцій, визначених на дійсній осі*, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат., **13**, 28 – 34 (2008).
31. В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, *Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения*, Тр. ИММ УрО РАН, **17**, № 3, 60 – 70 (2011).
32. В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов, *Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи*, Мат. заметки, **95**, № 1, 3 – 17 (2014).
33. V. F. Babenko, M. S. Churilova, N. V. Parfinovych, D. S. Skorokhodov, *Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line*, J. Inequal. and Appl., Article № 504 (2014).
34. В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова, *Теория приближений и гармонический анализ*, Наук. думка, Киев (2014).
35. S. B. Stechkin, *Best approximation of linear operators*, Math. Notes, **1**, № 2, 91 – 99 (1967).
36. С. М. Никольский, *Курс матетматического анализа*, Физматлит, Москва (2001).
37. М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко, *Векторные поля на плоскости*, Наука, Москва (1963).
38. В. Н. Габушин, *Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах*, Мат. заметки, **8**, № 5, 551 – 562 (1970).

Одержано 18.09.19,
після доопрацювання — 13.07.20