DOI: 10.37863/umzh.v72i11.2322

УДК 517.983

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. П. Журавльов (Поліс. нац. ун-т, Житомир)

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Using the theory of generalized inversion of operators and integral operators, we obtain a criterion for solvability and a general form of solutions of linear boundary-value problem for integro-differential equation with a degenerate kernel in Banach space.

Із використанням теорії узагальненого обернення операторів і узагальненого обернення інтегральних операторів отримано критерій розв'язності і загальний вигляд розв'язків лінійної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння з виродженим ядром у банаховому просторі.

Побудова математичних моделей процесів, які відбуваються в реальному світі, приводить до крайових задач для різноманітних операторних рівнянь.

З точки зору фізичних застосувань інтегро-диференціальні рівняння та крайові задачі для них становлять великий інтерес, тому їхньому дослідженню присвячено велику кількість праць.

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь з багатоточковими та нелокальними граничними умовами розглянуто в [1]. У [2] встановлено умови існування і єдиність розв'язку для класу імпульсних дробових інтегро-диференціальних рівнянь з нелокальними граничними умовами. У [3] для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з багатоточковими або нелокальними інтегральними граничними умовами отримано критерій існування й єдиності точного розв'язку та його аналітичне зображення. Дослідженню існування єдиного розв'язку двоточкової крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння присвячено роботу [4].

Побудова точних розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь є достатньо важкою проблемою, тому у більшості випадків розв'язки отримуються чисельними методами. Розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма високого порядку чисельними методами розглянуто у [5], а у [6] запропоновано чисельний метод розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь, який ґрунтується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами.

Достатні умови існування та єдиності кусково-неперервних м'яких розв'язків дробових інтегро-диференціальних рівнянь у банаховому просторі з не миттєвими імпульсами отримано в [7]. У [8] методами теорії фундаментальних оператор-функцій досліджено задачу Коші для інтегро-диференціального рівняння у банахових просторах з фредгольмовим оператором у головній частині. Побудовано фундаментальну оператор-функцію, за допомогою якої отримано конструктивну формулу для узагальненого розв'язку в класі розподілів з обмеженим зліва носієм. Описано умови збігу класичного і узагальненого розв'язків.

Крайові задачі, в яких вихідне операторне рівняння не є скрізь розв'язним, а оператор діє у нескінченновимірних банахових або гільбертових просторах, вивчались мало, оскільки їхнє розв'язання залежить від можливості розв'язання вихідного операторного рівняння і від крайових умов, які накладаються на розв'язок. Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь належать саме до такого типу задач, оскільки інтегро-диференціальний оператор не має оберненого [9].

Тому актуальною є потреба встановлення коефіцієнтних умов існування та методів побудови загальних розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах в аналітичному вигляді.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ — банахові простори, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок.

Розглянемо крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння

$$\dot{z}(t) - \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n P_i(t) W_i(s) z(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(t) V_i(s) \dot{z}(s) \right] ds = f(t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Позначивши операторні матриці так:

$$P(t) = \left[P_1(t), \ldots, P_n(t)\right], \qquad Q(s) = \left[Q_1(t), \ldots, Q_n(t)\right],$$
$$W(t) = \operatorname{col}\left[W_1(t), \ldots, W_n(t)\right], \qquad V(s) = \operatorname{col}\left[V_1(t), \ldots, V_n(t)\right],$$

запишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді

$$\dot{z}(t) - \int_a^b \Big[P(t) W(s) z(s) + Q(t) V(s) \dot{z}(s) \Big] ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

де оператор-функції $P(t)$ та $Q(t)$ діють з $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервні з нормами $|||P||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|P(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} = P_0 < \infty$ та $|||Q||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|Q(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} = Q_0 < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ та $V(t)$ діють з $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||W||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} = W_0 < \infty$ та $|||V||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} = V_0 < \infty$, вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $\mathcal{I}$ у $\mathbf{B}_2 \colon f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) := \big\{ f(\cdot) \colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2,\ |||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\| \big\}$, $\ell \colon \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to \mathbf{B}$ — лінійний векторний функціонал, $\alpha \in \mathbf{B}$. Тут $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій зі значеннями у $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервно диференційовних вектор-функцій з нормою $|||z||| = \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z^{(k)}(t)\|$, де $z^{(k)}(t)$ — k-та похідна від $z(t)$. Похідна $\dot{z}(t)$ розуміється в сенсі [10, с. 140].

Розв'язком $z(t)$ крайової задачі (3), (4) будемо називати таку вектор-функцію $z(t)$, яка задовольняє рівняння (3) і крайову умову (4). При цьому $z(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$.

У цій роботі отримано критерій розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійної крайової задачі (3), (4) для інтегро-диференціального рівняння з виродженим ядром у банахових просторах. При цьому використано теорію узагальненого обернення операторів у банахових просторах [11 – 13] із урахуванням специфіки, яка притаманна інтегро-диференціальним операторам.

Розв'язок лінійного інтегро-диференціального рівняння. Для розв'язання поставленої задачі необхідно отримати умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків рівняння (3).

Заміною $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_0, \quad c_0 \in \mathbf{B}_2, \tag{5}$$

рівняння (3) зводимо до інтегрального рівняння

$$y(t) - \int\limits_a^b P(t)W(s)\left[\int\limits_a^s y(\tau)d\tau + c_0\right]ds - \int\limits_a^b Q(t)V(s)y(s)ds = f(t). \tag{6}$$

Змінивши порядок інтегрування в першому інтегралі в (6), отримаємо

$$y(t) - \int\limits_a^b P(t)\widetilde{W}(s)y(s)ds - \int\limits_a^b Q(t)V(s)y(s)ds = f(t) + P(t)Wc_0, \tag{7}$$

де

$$\widetilde{W}(s) = \int\limits_s^b W(\tau)d\tau, \qquad W = \widetilde{W}(a).$$

Позначимо операторні матриці

$$M(t) = \Big[P(t), Q(t)\Big], \qquad N(s) = \operatorname{col}\Big[\widetilde{W}(s), V(s)\Big]. \tag{8}$$

Тоді рівняння (7) можна записати у вигляді

$$y(t) - M(t)\int\limits_s^b N(s)y(s)ds = g(t), \tag{9}$$

де

$$g(t) = f(t) + P(t)Wc_0. \tag{10}$$

Нехай $D = I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1} - A,\ A = \displaystyle\int_a^b N(s)M(s)\,ds,\ D\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді існують обмежені проектори [14] $\mathcal{P}_{N(D)}\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to$ $\to N(D)$ — на нуль-простір $N(D)$ та $\mathcal{P}_{Y_D}\colon \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to Y_D$ — на підпростір $Y_D = \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ оператора D, а також D^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [13].

Оскільки оператор D — це (2×2)-вимірна операторна матриця, то проектори $\mathcal{P}_{N(D)}$ $\mathcal{P}_{Y_D}$ — це теж (2×2)-вимірні операторні матриці, які мають таку структуру:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{P}_{Y_D} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Відомо [15], що при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)g(s)ds = 0, \tag{12}$$

і лише при ній, інтегральне рівняння (6) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + g(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)g(s)ds, \tag{13}$$

де c_1 — довільний елемент із банахового простору $\mathbf{B}_1$.

З урахуванням структури операторної матриці $M(t)$ (8) та проектора $\mathcal{P}_{N(D)}$ (11) у рівнянні (13) запис $M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ означає, що

$$M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \big[P(t), Q(t)\big] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \Big[P(t)p_{11} + Q(t)p_{21}, P(t)p_{12} + Q(t)p_{22}\Big] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \Big[P(t)(p_{11} + p_{12}) + Q(t)(p_{21} + p_{22})\Big]c_1.$$

Тому далі загальний розв'язок (13) інтегрального рівняння (9) будемо записувати так:

$$y(t) = \overline{X}_1(t)c_1 + g(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)g(s)ds,$$

де $\overline{X}(t) = P(t)(p_{11} + p_{12}) + Q(t)(p_{21} + p_{22})$, c_1 — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Для знаходження значення $c_0 \in \mathbf{B}_2$, при якому умова розв'язності (12) буде виконуватись, підставимо $g(t)$ з (10) у (12). В результаті отримаємо операторне рівняння

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)\big[f(s) + P(s)Wc_0\big]ds = 0,$$

з якого знайдемо значення $c_0 \in \mathbf{B}_2$.

Позначивши

$$S = \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)P(s)W ds = \mathcal{P}_{Y_D}\overline{A}W, \quad S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1,$$

$$\overline{A} = \int\limits_a^b N(s)P(s)ds, \quad \overline{A}\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1,$$

$$b_0 = -\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \quad b_0 \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1,$$

отримаємо операторне рівняння

$$Sc_0 = b_0. \tag{14}$$

Нехай оператор S є узагальнено оборотним, а отже нормально розв'язним. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(S)} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2,\ \mathcal{P}_{Y_S} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1$ і обмежений узагальнено обернений оператор $S^- : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ до оператора S.

Операторне рівняння (14) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [13]

$$\mathcal{P}_{Y_S} b_0 = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) f(s) ds = 0,$$

при виконанні якої рівняння (14) має сім'ю розв'язків

$$c_0 = \mathcal{P}_{N(S)} c_2 + S^- b_0, \tag{15}$$

де c_2 — довільний елемент із банахового простору $\mathbf{B}_2$.

Врахувавши (15), підставимо $g(s) = f(s) + P(s)W\big[\mathcal{P}_{N(S)} c_2 + S^- b_0\big]$ у розв'язок (13) інтегрального рівняння (9):

$$y(t) = \overline{X}_1(t)c_1 + f(t) + P(t)W\mathcal{P}_{N(S)}c_2 + P(t)WS^- b_0 +$$
$$+ M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)\Big[f(s) + P(s)W\big(\mathcal{P}_{N(S)}c_2 + S^- b_0\big)\Big]ds.$$

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок інтегрального рівняння (9):

$$y(t) = \Big[\overline{X}_1(t), L(t)\mathcal{P}_{N(S)}\Big] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + f(t) +$$
$$+ M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds - L(t)S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

де $L(t) = \Big[P(t) + M(t)D^- \overline{A}\Big]W,\ c_1 \in \mathbf{B}_1,\ c_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі.

Тоді, врахувавши заміну (5), отримаємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (3):

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_0 = \Big[X_1(t), X_2(t)\Big] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} +$$
$$+ \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds -$$
$$- \widetilde{L}(t)S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds - S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \tag{16}$$

де

$$\tilde{f}(t) = \int\limits_a^t f(s)ds, \qquad \widetilde{M}(t) = \int\limits_a^t M(s)ds, \qquad \widetilde{L}(t) = \int\limits_a^t L(s)ds,$$
$$X_1(t) = \int\limits_a^t \overline{X}_1(s)ds, \qquad X_2(t) = \widetilde{L}(s)\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}. \tag{17}$$

Позначивши

$$F(t) = \Big[\widetilde{M}(t)D^- - \widetilde{L}(t)S^-\mathcal{P}_{Y_D} - S^-\mathcal{P}_{Y_D}\Big]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

остаточно отримаємо

$$z(t) = \Big[X_1(t), X_2(t)\Big]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \tilde{f}(t) + F(t). \tag{18}$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (3) справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай оператори* $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *та* $S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ *узагальнено оборотні. Тоді інтегро-диференціальне рівняння* (3) *розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0, \tag{19}$$

і при цьому має сім'ю розв'язків (18).

***Зауваження* 1.** Інтегро-диференціальне рівняння

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) + H(t)z(t) - \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^n P_i(t)W_i(s)z(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(t)V_i(s)\dot{z}(s)\right]ds = f(t),$$

де оператор-функція $H(t)$ діє з банахового простору $\mathbf{B}_2$ в банаховий простір $\mathbf{B}_2$ і сильно неперервна з нормою $|||H||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|H(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_2} = H_0 < \infty$, за допомогою заміни $z(t) = Y(t)y(t)$, де $Y(t)$ — фундаментальний оператор [10, с. 148] рівняння $\dot{z}(t) = -H(t)z(t)$, зводиться до вигляду (3).

***Зауваження* 2.** Якщо у рівнянні (1) $P_i(t) = Q_i(t),\ i = \overline{1,n}$, то у позначеннях (8) $M(t) = P(t),\ N(s) = \widetilde{W}(s) + V(s)$ і інтегро-диференціальне рівняння (3) набирає вигляду

$$\dot{z}(t) - M(t)\int\limits_a^b \Big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\Big]ds = f(t). \tag{20}$$

У цьому випадку інтегро-диференціальне рівняння (20) буде розв'язним для тих і лише тих $f(t)$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків [12]

$$z(t) = \Big[\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \big(\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\big)\Big]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \tilde{f}(t) + F(t),$$

де

$$\widetilde{M}(t) = \int\limits_a^t M(s)ds, \qquad \tilde{f}(t) = \int\limits_a^t f(s)ds,$$

$$F(t) = \Big[\widetilde{M}(t)\overline{D} - S^-\mathcal{P}_{Y_D}\Big]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \tag{21}$$

$$\overline{D} = D^- - \widetilde{D}S^-\mathcal{P}_{Y_D}, \qquad \widetilde{D} = (I_{\mathbf{B}_2} + D^-A)W.$$

***Зауваження* 3.** Якщо $\mathcal{P}_{Y_D} = 0$, то оператор D буде n-нормальним [17] ($\dim\ker Y_D = 0$). У цьому випадку умова розв'язності (12) буде завжди виконуватись і інтегральне рівняння (9) з урахуванням (15) буде мати розв'язок

$$y(t) = \overline{X}_1(t)c_1 + f(t) + P(t)Wc_0 + M(t)D_r^{-1}\int\limits_a^b N(s)\Big[f(s) + P(s)Wc_0\Big]ds =$$

$$= \Big[\overline{X}_1(t), L(t)\Big]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + f(t) + M(t)D_r^{-1}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

де $L(t) = \Big[P(t) + M(t)D_r^{-1}\overline{A}\Big]W$, D_r^{-1} — правий обернений оператор [18] до оператора D, $c_1 \in \mathbf{B}_1$, $c_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі.

Умова розв'язності (19) інтегро-диференціального рівняння (3) теж буде завжди виконуватись, і воно буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), X_2(t)\Big]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)D_r^{-1}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

де $\widetilde{M}(t)$, $\widetilde{L}(t)$ і $\tilde{f}(t)$ визначено у (17), $X_1(t) = \int_a^t \overline{X}_1(s)ds$, $X_2(t) = \widetilde{L}(t) + I_{\mathbf{B}_2}$, оскільки оператор $S = \mathcal{P}_{Y_D}\overline{A}W = 0$, а $\mathcal{P}_{N(S)} = I_{\mathbf{B}_2}$.

***Зауваження* 4.** Якщо $\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, то оператор D буде n-нормальним [17] ($\dim\ker D = 0$). У цьому випадку при виконанні умови (12) інтегральне рівняння (9) буде мати сім'ю розв'язків, яка буде залежати лише від параметра $c_2 \in \mathbf{B}_2$,

$$y(t) = L(t)\mathcal{P}_{N(S)}c_2 + f(t) +$$

$$+M(t)D_l^{-1}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds - L(t)S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

де $L(t) = \Big[P(t) + M(t)D_l^{-1}\overline{A}\Big]W,\ D_l^{-1}$ — лівий обернений оператор [18] до оператора D, $c_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільна стала.

У цьому випадку при виконанні умови (19), і лише при ній, інтегро-диференціальне рівняння (3) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = X_2(t)c_2 + \tilde{f}(t) + F(t).$$

Крайові задачі у банахових просторах. Далі розглянемо крайову задачу (3), (4).

Підставивши розв'язок (18) у крайову умову (4), отримаємо операторне рівняння відносно довільних сталих $c_1 \in \mathbf{B}_1,\ c_2 \in \mathbf{B}_2$:

$$[Q_1, Q_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot), \tag{22}$$

де $Q_1 = \ell X_1(\cdot),\ Q_2 = \ell X_2(\cdot)$ — лінійні обмежені оператори.

Відомо [16], що операторна матриця $Q = [Q_1, Q_2]$ має обмежену узагальнено обернену тоді і лише тоді, коли оператори Q_1 та $\widehat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}Q_2$ узагальнено оборотні. Нехай оператори Q_1 та $\widehat{Q}_2$ узагальнено оборотні. Наслідком узагальненої оборотності оператора Q є нормальна розв'язність операторного рівняння (22).

Використовуючи теорему 3 з [16, с. 478] про розв'язність рівняння з операторною матрицею, приходимо до висновку, що рівняння (22) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [11, 13]

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\big[\alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\big] = 0. \tag{23}$$

При виконанні цієї умови рівняння (22) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + Q^{-}\big[\alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\big], \tag{24}$$

де [16]

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \qquad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^{-}Q_2\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$Q^{-} = \begin{bmatrix} Q_1^{-} - Q_1^{-}Q_2\widehat{Q}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \\ \widehat{Q}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}.$$

Для скорочення записів позначимо

$$\widetilde{\mathcal{P}}_2 = -Q_1^{-}Q_2\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}, \qquad \widetilde{Q}_1^{-} = Q_1^{-} - Q_1^{-}Q_2\widehat{Q}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \qquad \widetilde{Q}_2^{-} = \widehat{Q}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}.$$

Тоді (24) набере вигляду

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \widetilde{\mathcal{P}}_2 \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \big[\alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\big], \tag{26}$$

де $\hat{c}_1 \in \mathbf{B}_1,\ \hat{c}_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі.

Підставивши знайдені c_1 та c_2 з (26) у (18), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (3), (4):

$$z(t) = \Big[X_1(t), X_2(t)\Big] \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \widetilde{\mathcal{P}}_2 \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \big[\alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\big] \right\} + \tilde{f}(t) + F(t).$$

Після перетворень будемо мати

$$z(t) = \Big[X_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, X_1(t)\widetilde{\mathcal{P}}_2 + X_2(t)\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+\tilde{f}(t) - \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\ell\tilde{f}(\cdot) +$$
$$+F(t) - \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\ell F(\cdot) + \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\alpha,$$

або

$$z(t) = \Big[X_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, X_1(t)\widetilde{\mathcal{P}}_2 + X_2(t)\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+G[\tilde{f}, F](t) + \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\alpha.$$

Оператор $G[\tilde{f}, F](t)$ — узагальнений оператор Гріна напіводнорідної крайової задачі ($\alpha = 0$), дія якого на функції $\tilde{f}, F$ відбувається таким чином:

$$G[\tilde{f}, F](t) = \tilde{f}(t) - \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\ell\tilde{f}(\cdot) +$$
$$+F(t) - \Big[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\Big]\ell F(\cdot). \tag{27}$$

Теорема 2. *Нехай оператори* $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1,\ S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1,\ Q_1\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ *та* $\widehat{Q}_2\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}$ *узагальнено оборотні.*

Тоді відповідна до (3), (4) *однорідна* $(f(t) = 0,\ \alpha = 0)$ *крайова задача має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \Big[X_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, X_1(t)\widetilde{\mathcal{P}} + X_2(t)\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix},$$

де $\hat{c}_1 \in \mathbf{B}_1$ *і* $\hat{c}_2 \in \mathbf{B}_2$ *— довільні елементи з банахових просторів* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_2$.

Неоднорідна крайова задача (3), (4) *має розв'язки для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{C}\big([a,b], \mathbf{B}_2\big)$ *та* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють систему умов*

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\alpha - \ell\int\limits_a^{(\cdot)} f(s)ds - \ell\left[\int\limits_a^{(\cdot)}\widetilde{M}(s)\overline{D}ds - S^-\mathcal{P}_{Y_D}\right]\int\limits_a^b N(\tau)f(\tau)d\tau\right\} = 0.$$

При виконанні цих умов вона має сім'ю розв'язків

$$z(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\hat{c} + G[\tilde{f},F](t) + X(t)Q^-\alpha,$$

де $X(t) = \Big[X_1(t), X_2(t)\Big]$, $\hat{c} = \mathrm{col}[\hat{c}_1,\hat{c}_2]$, $Q^- = \begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}$, $G[\tilde{f},F](t)$ — *узагальнений оператор Гріна* (27).

Крайові задачі в евклідових просторах. У випадку, коли крайова задача для інтегро-диференціального рівняння розглядається в евклідових просторах, теорему 2 можна конкретизувати та спростити.

Розглянемо крайову задачу (3), (4) за умови, що $P(t) = Q(t)$. Тоді вона буде мати вигляд

$$\dot{z}(t) - M(t)\int\limits_a^b \Big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\Big]ds = f(t), \tag{28}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{29}$$

оскільки, як зазначено у зауваженні 2, $M(t) = P(t)$ і $N(s) = \widetilde{W}(s) + V(s)$.

Нехай $M(t)$ — $(n\times m)$-вимірна матриця, $W(t)$ і $V(t)$ — $(m\times n)$-вимірні матриці, $f(t)$ — $(n\times 1)$-вимірна матриця, елементи яких належать до простору $\mathbf{L}_2[a,b]$, $\ell\colon \mathbf{D}_2^n[a,b]\to\mathbf{R}^k$ — k-вимірний лінійний векторний функціонал, $\alpha\in\mathbf{R}^k$.

Розв'язок крайової задачі будемо шукати у класі функцій $z(t)$ таких, що $z(t)\in\mathbf{D}_2^n[a,b]$, $\dot{z}(t)\in\mathbf{L}_2^n[a,b]$. У цьому випадку можна застосувати методи побудови псевдообернених матриць та ортопроекторів [13].

Оператор $D = I_m - A$, $A = \displaystyle\int_a^b N(s)M(s)\,ds$ та ортопроектори $P_{N(D)}$ і $P_{N(D^*)}$ будуть $(m\times m)$-вимірними матрицями.

Нехай $\operatorname{rank} D = n_1$. Позначимо через $P_{N_r(D)}$ $(m\times r)$-вимірну матрицю, яку складено з $r = m - n_1$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D)}$, через $P_{N_r(D^*)}$ $(r\times m)$-вимірну матрицю, яку складено з r лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$ на нуль-простір $N(D^*)$ матриці D^*, спряженої до матриці D, а через D^+ матрицю, псевдообернену до матриці D.

Тоді $S = P_{N_r(D^*)}W$ — $(r\times n)$-вимірна матриця, $b_0 = -P_{N_r(D^*)}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)ds$.

Нехай $\operatorname{rank} S = n_2$. Позначимо через $P_{N_p(S)}$ $(n\times p)$-вимірну матрицю, яку складено з $p = n - n_2$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(S)}$, через $P_{N_d(S^*)}$ $(d\times r)$-вимірну матрицю, яку складено з $d = r - n_2$ лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(S^*)}$, а через S^+ матрицю, псевдообернену до матриці S.

Тоді інтегро-диференціальне рівняння (28) має розв'язок для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{R}^n$, які задовольняють $d = r - n_2$ лінійно незалежних умов [12]

$$P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b N(s) f(s) ds = 0,$$

і при цьому має $(r + p)$-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = \Big[\widetilde{M}(t) P_{N_r(D)}, \big(\widetilde{M}(t) \widetilde{D} P_{N_p(S)} + P_{N_p(S)}\big)\Big] \begin{bmatrix} c_r \\ c_p \end{bmatrix} + \tilde{f}(t) + F(t) =$$

$$= X_{r+p}(t) c_{r+p} + \tilde{f}(t) + F(t). \tag{30}$$

Тут $X_{r+p}(t) = \Big[\widetilde{M}(t) \mathcal{P}_{N_r(D)}, \widetilde{M}(t) \widetilde{D} \mathcal{P}_{N_p(S)} + \mathcal{P}_{N_p(S)}\Big]$ — $(n \times (r+p))$-вимірна фундаментальна матриця відповідного до (28) однорідного рівняння, $c_{r+p} = \mathrm{col}[c_r, c_p]$ $\widetilde{D} = (I_m + D^+ A) W$, $c_r \in \mathbf{R}^r$, $c_p \in \mathbf{R}^p$ — довільні сталі, $\widetilde{M}(t)$ і $\tilde{f}(t)$ мають вигляд (21),

$$F(t) = \Big\{\widetilde{M}(t) \Big[D^+ - \widetilde{D} S^+ P_{N_r(D^*)}\Big] - S^+ P_{N_r(D^*)}\Big\} \int\limits_a^b N(s) f(s) ds.$$

Підставивши розв'язок (30) у крайову умову (29), отримаємо алгебраїчне рівняння відносно довільних сталих $c_r \in \mathbf{R}^r$ та $c_p \in \mathbf{R}^p$:

$$Q c_{r+p} = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} c_r \\ c_p \end{bmatrix} = \alpha - \ell \tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot), \tag{31}$$

де $Q = [Q_1, Q_2]$ — $\big(k \times (r+p)\big)$-вимірна стала матриця, $Q_1 = \ell X_r(\cdot)$, $Q_2 = \ell X_p(\cdot)$.

Нехай $\operatorname{rank} Q = n_3$. Позначимо через $P_{N_\rho(Q)}$ $\big((r+p) \times \rho\big)$-вимірну матрицю, яку складено з $\rho = r+p-n_3$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(Q)}$, через $P_{N_\nu(Q^*)}$ $(\nu \times k)$-вимірну матрицю, яку складено з $\nu = k - n_3$ лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$, а через Q^+ $\big((r+p) \times k\big)$-вимірну матрицю, псевдообернену до матриці Q.

Тоді алгебраїчне рівняння (31) має розв'язки для тих і лише тих α й $f(t)$, які задовольняють ν лінійно незалежних умов [13]

$$P_{N_\nu(Q^*)} \Big[\alpha - \ell \tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\Big] = 0.$$

При виконанні цих умов воно має ρ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$c_{r+p} = P_{N_\rho(Q)} \hat{c}_\rho + Q^+ \Big[\alpha - \ell \tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\Big], \tag{32}$$

де $\hat{c}_\rho$ — довільний вектор з евклідового простору R^ρ.

Підставивши (32) у (30), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (28), (29):

$$z(t) = X_{r+p}(t) \Big\{P_{N_\rho(Q)} \hat{c}_\rho + Q^+ \Big[\alpha - \ell \tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\Big]\Big\} + \tilde{f}(t) + F(t) =$$

$$= X_\rho(t) \hat{c}_\rho + G[\tilde{f}, F](t) + X_{r+p}(t) Q^+ \alpha,$$

де $X_\rho(t) = X_{r+p}(t)P_{N_\rho(Q)}$ — $(n \times \rho)$-вимірна фундаментальна матриця відповідної до (28), (29) крайової задачі, яка складена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці $X_{r+p}(t)$, $G[\tilde{f}, F](t)$ — узагальнений оператор Гріна напіводнорідної $(\alpha = 0)$ крайової задачі (28), (29), дія якого на функції $\tilde{f}(t)$ та $F(t)$ відбувається за правилом

$$G[\tilde{f}, F](t) = \Big[\tilde{f}(t) - X_{r+p}(t)Q^+\ell\tilde{f}(\cdot)\Big] + \Big[F(t) - X_{r+p}(t)Q^+\ell F(\cdot)\Big]. \tag{33}$$

Таким чином, для крайової задачі (28), (29), яка розглядається в евклідовому просторі, справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$, $\operatorname{rank} S = n_2$, $\operatorname{rank} Q = n_3$.

Тоді відповідна до (28), (29) *однорідна* $(f(t) = 0,\ \alpha = 0)$ *крайова задача має* ρ*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)\hat{c}_\rho,$$

де $\hat{c}_\rho \in \mathbf{R}^\rho$ — *довільний вектор-стовпець констант.*

Неоднорідна крайова задача (28), (29) *має розв'язки для тих і лише тих* $\alpha \in \mathbf{R}^k$ *та* $f(t) \in \mathbf{L}_2[a, b]$, *які задовольняють систему* $d + \nu$ *лінійно незалежних умов*

$$P_{N_d(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

$$P_{N_\nu(Q^*)}\Big[\alpha - \ell\tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot)\Big] = 0.$$

При виконанні цих умов вона має сім'ю ρ *лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)\hat{c}_\rho + G[\tilde{f}, F](t) + X_{r+p}(t)Q^+\alpha,$$

де $G[\tilde{f}, F](t)$ — *узагальнений оператор Гріна* (33) *напіводнорідної* $(\alpha = 0)$ *крайової задачі* (28), (29).

***Зауваження* 5.** Дослідження умов розв'язності та побудову загальних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь і крайових задач для них в евклідових просторах із використанням псевдообернених матриць та проекторів уперше було проведено у [19], де було застосовано інший підхід, ніж у даній статті.

Приклад. Розглянемо крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння

$$\dot{z}(t) - M(t)\int\limits_0^2 \Big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\Big]ds = f(t), \tag{34}$$

$$\ell z(\cdot) = \int\limits_0^2 R(s)z(s)ds = \alpha. \tag{35}$$

Для цієї задачі

$$M(t) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & 3t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & 3t \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$W(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & s-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & s-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$V(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ s-1 & \dfrac{s-1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ s-1 & \dfrac{s-1}{2} \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$R(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 2s-3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 2s-3 \end{bmatrix}, \ldots\right\}.$$

Нехай $\mathbf{c}$ — банаховий простір збіжних числових послідовностей, оператор-функції $M(t)$, $W(t)$, $V(t)$ і $H(t)$ діють з банахового простору неперервно диференційовних на проміжку $[0,2]$ функцій $\mathbf{C}\big([0,2],\mathbf{c}\big)$ у себе з нормами $|||M|||_{\mathbf{C}\left([0,2],\mathbf{c}\right)} = \sup_{t\in[0,2]} \|M(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||W|||_{\mathbf{C}\left([0,2],\mathbf{c}\right)} = \sup_{t\in[0,2]} \|W(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||V|||_{\mathbf{C}\left([0,2],\mathbf{c}\right)} = \sup_{t\in[0,2]} \|V(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||R|||_{\mathbf{C}\left([0,2],\mathbf{c}\right)} = \sup_{t\in[0,2]} \|R(t)\|_{\mathbf{c}}$, вектор-функція $f(t) \in \mathbf{C}\big([0,2],\mathbf{c}\big)$ діє з відрізка $[0,2]$ у простір $\mathbf{c}$.

Очевидно, що L є лінійним обмеженим оператором, який діє з банахового простору неперервно диференційовних на проміжку $[0,2]$ функцій $\mathbf{C}^1\big([0,2],\mathbf{c}\big)$ у банаховий простір $\mathbf{C}\big([0,2],\mathbf{c}\big)$, а вектор-функціонал ℓ діє з банахового простору $\mathbf{C}\big([0,2],\mathbf{c}\big)$ у простір $\mathbf{c}$, $\alpha \in \mathbf{c}$.

Інтегро-диференціальне рівняння (34) має розв'язок для тих і лише тих $f(t)$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds = 0,$$

де

$$N(s) = \widetilde{W}(s) + V(s) =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{3s}{2}-1 \\ \dfrac{3s}{2}-4 & 0 \\ 1 & \dfrac{s-1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{3s}{2}-1 \\ \dfrac{3s}{2}-4 & 0 \\ 1 & \dfrac{s-1}{2} \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\widetilde{W}(s)=\int\limits_s^2 W(\tau)d\tau,\qquad W=\widetilde{W}(0)=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\ -3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ -3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$D=I-\int\limits_0^2 N(s)M(s)ds=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(D)}=\mathcal{P}_{Y_D}=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$D^{-}=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$S=\mathcal{P}_{Y_D}W=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ -3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ -3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(S)}=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ldots\right\},\qquad \mathcal{P}_{Y_S}=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\}.$$

Після перетворень переконуємось, що інтегро-диференціальне рівняння (34) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли компоненти вектор-функції $f(t)=\operatorname{col}\big(f_1(t),\ f_2(t),\ldots\big)$ задовольняють умови [12]

$$\int\limits_0^2\Big[2(3s-5)f_{2k-1}(s)+3(s-1)f_{2k}(s)\Big]ds=0,\quad k=1,2,3,\ldots.$$

З'ясуємо, які ще умови потрібно накласти на праві частини крайової задачі (34), (35), щоб вона мала розв'язок.

Для цієї крайової задачі маємо

$$\widetilde{M}(t)=\int\limits_0^t M(s)ds=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & \frac{t^2}{2}-t & 0\\ t & 0 & \frac{3t^2}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & \frac{t^2}{2}-t & 0\\ t & 0 & \frac{3t^2}{2}\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$X_1(t)=\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & \frac{t^2}{2}-t & 0\\ 0 & 0 & \frac{3t^2}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & \frac{t^2}{2}-t & 0\\ 0 & 0 & \frac{3t^2}{2}\end{bmatrix},\ldots\right\},$$

$$X_2(t) = \widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{3t}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{3t}{4} \end{bmatrix}, \ldots\right\}.$$

Тоді

$$Q_1 = \ell X_1(\cdot) = \int\limits_0^2 R(s)X_1(s)ds = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$Q_2 = \ell X_2(\cdot) = \int\limits_0^2 R(s)X_2(s)ds = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q_1)} = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\widehat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2 = Q_2, \qquad \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$Q_1^- = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\widehat{Q}_2^- = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}, \ldots\right\}.$$

Далі складемо умову розв'язності (23).

За формулою (25) маємо

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\right\}.$$

Обчислимо

$$\ell\tilde{f}(\cdot) = \int\limits_0^2 R(s)\int\limits_0^s f(\tau)d\tau ds =$$

$$= \int\limits_0^2 \int\limits_0^s \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} (s-1)f_1(\tau) \\ sf_1(\tau) \\ (2s-3)f_2(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (s-1)f_3(\tau) \\ sf_4(\tau) \\ (2s-3)f_4(\tau) \end{bmatrix}, \ldots \right\} d\tau ds$$

і

$$\ell F(\cdot) = \int\limits_0^2 R(s) \left\{ \widetilde{M}(s)\overline{D} - S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_0^2 N(\tau) f(\tau) d\tau \right\} ds =$$

$$= \int\limits_0^2 \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2f_1(\tau) + \dfrac{\tau-1}{2} f_2(\tau) \\ \dfrac{3\tau-6}{2} f_1(\tau) + \dfrac{\tau^2+3\tau-1}{4} f_2(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2f_3(\tau) + \dfrac{\tau-1}{2} f_4(\tau) \\ \dfrac{3\tau-6}{2} f_3(\tau) + \dfrac{\tau^2+3\tau-1}{4} f_4(\tau) \end{bmatrix}, \ldots \right\} d\tau,$$

де

$$\widetilde{D} = \Big[I - D^- A \Big] W = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{3}{4} \\ -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{3}{4} \\ -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\overline{D} = D^- - \widetilde{D} S^- \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ldots \right\}.$$

Тоді, підставивши отримані величини у формулу (23), отримаємо умову розв’язності операторного рівняння (22):

$$\mathcal{P}_{Y_Q} \big[\alpha - \ell \tilde{f}(\cdot) - \ell F(\cdot) \big] =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\} \left[\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \right.$$

$$- \int\limits_0^2 \int\limits_0^s \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} (s-1)f_1(\tau) \\ sf_1(\tau) \\ (2s-3)f_2(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (s-1)f_4(\tau) \\ sf_4(\tau) \\ (2s-3)f_5(\tau) \end{bmatrix}, \ldots \right\} d\tau ds -$$

$$-\int_0^2 \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -2f_1(\tau)+\frac{\tau-1}{2}f_2(\tau) \\ \frac{3\tau-6}{2}f_1(\tau)+\frac{\tau^2+3\tau-1}{4}f_2(\tau)\end{bmatrix}, \right.$$
$$\left.\left.\begin{bmatrix} 0 \\ -2f_3(\tau)+\frac{\tau-1}{2}f_4(\tau) \\ \frac{3\tau-6}{2}f_3(\tau)+\frac{\tau^2+3\tau-1}{4}f_4(\tau)\end{bmatrix}, \ldots \right\} d\tau \right] = 0.$$

Після перетворень отримаємо умови на компоненти вектора α та компоненти вектор-функції $f(t)$:

$$\alpha_{3k-2} - \int_0^2 \int_0^s (s-1) f_{2k-1}(\tau) d\tau ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким чином, крайова задача (34), (35) розв'язна для тих і лише тих $\alpha \in \mathbf{c}$ і $f(t) \in$ $\in \mathbf{C}\big([0,2], \mathbf{c}\big)$, які задовольняють систему умов

$$\int_0^2 \Big[2(3s-5) f_{2k-1}(s) + 3(s-1) f_{2k}(s)\Big] ds = 0,$$
$$\alpha_{3k-2} - \int_0^2 \int_0^s (s-1) f_{2k-1}(\tau) d\tau ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{36}$$

Наприклад, при $\alpha_{3k-2} = \frac{2}{3}$, $\alpha_{3k-1} = \frac{2}{3}$, $\alpha_{3k} = \frac{2}{3}$, $f_{2k-1}(t) = 2t - 1$, $f_{2k}(t) = \mathrm{const}$, $k =$ $= 1, 2, \ldots$, система умов (36) буде виконуватись і крайова задача (34), (35) буде мати розв'язок.

Література

1. N. N. Vassiliev, I. N. Parasidis, E. Providas, *Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions, Part 1. Extension method*, Информационно-управляющие системы, № 6, 14 – 23 (2018).
2. Gupta Vidushi, Dabas Jaydev, *Existence results for a fractional integro-differential equation with nonlocal boundary conditions and fractional impulsive conditions*, Nonlinear Dynamics and Syst. Theory, **15**, № 4, 370 – 382 (2015).
3. K. D. Tsilika, *An exact solution method for Fredholm integro-differential equations*, Информационно-управляющие системы, № 4, 2 – 8 (2019).
4. D. S. Dzhumabaev, E. A. Bakirova, *Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary-value problem for systems of integro-differential equations*, Different. Equat., **49**, № 9, 914 – 937 (2013).
5. M. Turkyilmazoglu, *An effective approach for numerical solutions of high-order Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. and Comput., **227**, 384 – 398 (2014).
6. И. М. Черевко, И. В. Якимов, *Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Укр. мат. журн., **41**, № 6, 854 – 860 (1989).
7. Kumar Pradeep, Haloi Rajib, D. Bahuguna, D. N. Pandey, *Existence of solutions to a new class of abstract non-instantaneous impulsive fractional integro-differential equations*, Nonlinear Dynamics and Syst. Theory, **16**, № 1, 73 – 85 (2016).

8. М. В. Фалалеев, *Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения*, Изв. Иркут. гос. ун-та. Математика, вып. 2, 90 – 102 (2012).
9. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1112 – 1126 (1968).
10. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
11. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a banach space*, Different. Equat., **50**, № 3, 1 – 11 (2014).
12. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dynamics and Syst. Theory, **18**, № 4, 331 – 341 (2019).
13. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
14. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
15. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
16. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019).
17. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
18. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n-(d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).
19. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).

Одержано 22.01.20