DOI: 10.37863/umzh.v72i11.6064

УДК 517.54

Я. В. Заболотний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОБЛЕМА В. М. ДУБІНІНА ДЛЯ СИМЕТРИЧНИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

We consider a quite general problem from the geometric theory of functions on finding a maximal value of the product of the inner radii of n non-overlapping domains, which contain points of the unit circle and are symmetric with respect to the unit circle, and the γ-powered inner radius of a domain containing the origin. In this paper, we solve this problem for $n \geq 20$ and $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$.

Розглянуто достатньо загальну задачу геометричної теорії функцій про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола і симетричні відносно даного кола, і степеня γ внутрішнього радіуса області, яка містить точку нуль, та знайдено її розв'язок для $n \geq 20$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$.

Вступ. Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини займають значне місце в геометричній теорії функцій комплексної змінної (див., наприклад, [1 – 7]). Початок даної тематики покладено в роботі [1], де було поставлено і розв'язано задачу про добуток конформних радіусів двох неперетинних однозв'язних областей, які містять відповідно дві задані точки. Пізніше цю задачу було узагальнено в багатьох напрямках, зокрема в роботі [2] поставлено задачу про добуток конформних радіусів n неперетинних областей для довільного натурального $n \geq 3$ і розв'язано її для випадку $n = 3$. Аналогічні задачі розглядалися для багатозв'язних областей, для областей спеціального вигляду (наприклад, для областей, симетричних відносно одиничного кола), а також у випадку, коли точки, які повинні міститися в областях, не були фіксованими від початку, а мали деяку свободу (див., наприклад, [4]). Одній із таких задач і присвячено дану роботу.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина і $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. На розширеній комплексній площині розглянемо систему довільних неперетинних багатозв'язних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, до того ж n областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола, і нехай $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [5, с. 14; 7, с. 71]).

Зауважимо, що екстремальні конфігурації областей зручно записувати за допомогою квадратичних диференціалів. Основні факти теорії квадратичних диференціалів див., наприклад, у [8, с. 48 – 82].

Розглянемо таку екстремальну задачу.

Задача. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Для довільної системи точок a_k і областей B_k, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ для $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, і області $B_1, \ldots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, знайти точну верхню оцінку для функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k). \tag{1.1}$$

Іншими словами, суть задачі полягає в тому, щоб для кожної пари (n,γ), де $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\gamma\in\mathbb{R}^+$, знайти максимум функціонала (1.1), якщо цей максимум існує, і вказати конфігурацію областей, де він досягається.

Вперше в 1984 р. аналогічну задачу з вільними полюсами для симетричних однозв'язних областей розглянула Г. П. Бахтіна в роботі [9]. В 1994 р. дану задачу поставив В. М. Дубінін в роботі [5] як нерозв'язану проблему. В 2000 р. для $\gamma=1$ і всіх $n\geq 2$ цю задачу розв'язав Л. В. Ковальов [10, 11]. В роботі [12] задачу було розв'язано для довільного $n\geq 2$ і $0<\gamma<1$. В [13] було знайдено розв'язок даної задачі для довільного $n\geq 2$ і довільного $\gamma\in(0,\gamma_n)$, де $\gamma_2=1,49$, $\gamma_3=3,01$ і $\gamma_n=0,25n^2$ для $n\geq 4$, але з деякими обмеженнями на центральний кут між сусідніми точками a_k. В даній роботі задачу розв'язано для довільного натурального $n\geq n_0$ і $1<\gamma\leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$, але без додаткових умов на точки a_k.

2. Основний результат. Нехай для конкретності

$$0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_n<2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1:=\frac{1}{\pi}\left(\arg a_2-\arg a_1\right),\quad \alpha_2:=\frac{1}{\pi}\left(\arg a_3-\arg a_2\right),\quad \ldots,\quad \alpha_n:=\frac{1}{\pi}(2\pi-\arg a_n).$$

Нехай $\alpha_0=\max_k\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$. Введемо позначення $P_k=\{w\colon \arg a_k<\arg w<\arg a_{k+1}\}$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, де $n_0\geq 20$ — деяке фіксоване натуральне число, і $\gamma\in\mathbb{R}$, $1<\gamma\leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$, де $q(n)=\dfrac{2}{3}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{p(n_0)}\ln(n)\right)}{\ln(n)}$, $p(n_0)$ — деяка стала, причому можна взяти $n_0=20$ і $p(20)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тоді для довільного набору точок a_k таких, що $a_0=0$, $a_1=1$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, причому області B_k, $k=\overline{1,n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w|=1$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leq\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{2.1}$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2\left(n^2-\gamma\right)w^n+\gamma}{w^2\left(w^n-1\right)^2}\,dw^2. \tag{2.2}$$

Доведення ґрунтується на методах і ідеях робіт [7, 10, 11].

Проведемо доведення саме для випадку $n_0=20$ і $p(20)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Для кожного натурального n, що задовольняє умови теореми, позначимо через a_k^0 і B_k^0, $k=\overline{0,n}$, відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (2.2). Позначимо також

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right). \tag{2.3}$$

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\alpha_0 < \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Покажемо, що для цього випадку виконується нерівність (2.1). Для цього використаємо метод відокремлюючого перетворення, який детально описано, наприклад, у роботі [5].

Розглянемо систему функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n = -i\left(e^{-i\arg\alpha_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$.

Позначимо через $D_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k\big(B_k\bigcap\overline{P}_k\big)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі. З іншого боку, через $D_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, позначимо область множини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k\big(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k\big)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Також позначимо через $D_k^{(0)}$ область множини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k\big(B_0\bigcap\overline{P}_k\big)$, що містить точку $\zeta=0$, з її власним симетричним відображенням відносно уявної осі. Зауважимо, що для $\alpha_0 < \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ відповідні образи областей не перетинаються.

Далі, повторюючи міркування й оцінки з робіт [11 – 13], отримуємо рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \tag{2.4}$$

а також переконуємося, що для $\alpha_0 < \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ виконується нерівність $I_n(\gamma) \le I_n^0(\gamma)$, а отже, і нерівність (2.1).

2. Нехай тепер $\alpha_0 \ge \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Покажемо, що при цій умові значення функціонала (1.1) задовольняє співвідношення (2.1).

Доведемо такі леми.

Лема 2.1. *Для довільного $n\in\mathbb{N}$, довільного набору точок a_k таких, що $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $\alpha_0 \ge \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \le \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}. \tag{2.5}$$

Доведення. Згідно з теоремою 5.1.1 [7], справедливою є оцінка

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \le 2^n \prod_{k=1}^{n}\alpha_k. \tag{2.6}$$

Далі, враховуючи те, що $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, і використовуючи нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним, отримуємо

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leq 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} = 2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}.$$

А оскільки $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, використовуючи елементарні дослідження функції на максимум, одержуємо

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq 2^n \frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} =$$

$$= \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}.$$

Лему 2.1 доведено.

Позначимо $a_{n+1} := a_1,\ a_{n+2} := a_2,\ \alpha_{n+1} = \alpha_1,\ B_{n+1} := B_1,\ B_{n+2} := B_2.$

Лема 2.2. *Нехай точки* a_k *і області* $B_k,\ k = \overline{0,n}$, *задовольняють всі умови теореми* 2.1. *Тоді при умові* $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(r\left(B_0, 0\right) r\left(B_k, a_k\right) r\left(B_{k+1}, a_{k+1}\right) r\left(B_{k+2}, a_{k+2}\right)\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{6n-8}{3}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{6n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma}+n-2}{4\gamma}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{2.7}$$

Доведення. Згідно з нерівністю з теореми 2 [3], маємо

$$\prod_{k=1}^{4} r\left(B_k, a_k\right) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k|^{\frac{2}{3}},$$

а тому

$$r\left(B_0, 0\right) r\left(B_k, a_k\right) r\left(B_{k+1}, a_{k+1}\right) r\left(B_{k+2}, a_{k+2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \left(|a_{k+1} - a_k||a_{k+2} - a_{k+1}||a_{k+2} - a_{k+1}|\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \left(\sin\frac{\pi\alpha_k}{2} \sin\frac{\pi\alpha_{k+1}}{2} \sin\frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Далі отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n} \left(r\left(B_0, 0\right) r\left(B_k, a_k\right) r\left(B_{k+1}, a_{k+1}\right) r\left(B_{k+2}, a_{k+2}\right)\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{\pi\alpha_k}{2} \sin\frac{\pi\alpha_{k+1}}{2} \sin\frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{\pi\alpha_k}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Нехай для конкретності $\alpha_0 = \alpha_n$. Досліджуючи останній вираз при умові $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, приходимо до висновку, що його максимум досягається при $\alpha_n = \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, а всі інші $\alpha_k = \dfrac{1}{n-1}\left(2 - \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)$ при $k = \overline{1, n-1}$. Враховуючи також нерівність $\sin x < x$ при $x > 0$, одержуємо

$$\left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{\pi\alpha_k}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \left(\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{4n-4}{3}} \left(\frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{2n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{2\gamma(n-1)}\right)^{\frac{4}{3}} =$$

$$= \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{6n-8}{3}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{6n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Звідси і випливає нерівність (2.7).

Лему 2.2 доведено.

Лема 2.3. *Нехай точки* a_k *і області* B_k, $k = \overline{0, n}$, *задовольняють всі умови теореми* 2.1. *Тоді при умові* $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ *виконується нерівність*

$$J(n,\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} \leq n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} P(n,\gamma), \tag{2.8}$$

де

$$P(n,\gamma) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \left(\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{3\gamma}{n}-1} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma}\right)^{\frac{4\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Доведення. Спочатку оцінимо вираз $I_n(\gamma)$, використавши нерівності (2.5) і (2.7):

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_0, 0)\, r(B_k, a_k)\, r(B_{k+1}, a_{k+1})\, r(B_{k+2}, a_{k+2})\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{3\gamma}{n}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \times$$

$$\times \frac{4^{n-3\gamma}}{\left(\sqrt{2\gamma}\right)^{1-\frac{3\gamma}{n}}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma}+n-2}{4\gamma}\right)^{\frac{4\gamma}{3n}}.$$

Використовуючи отриману нерівність і рівність (2.4), отримуємо оцінку

$$J(n,\gamma) \leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^{\gamma} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \frac{4^{n-3\gamma}}{\left(\sqrt{2\gamma}\right)^{1-\frac{3\gamma}{n}}}\times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2\gamma}+n-2}{4\gamma}\right)^{\frac{4\gamma}{3n}} \left(\frac{n}{4}\right)^{n} \left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} =$$

$$= n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} P(n,\gamma). \tag{2.9}$$

Лему 2.3 доведено.

Для завершення доведення теореми 2.1 достатньо показати, що вираз у правій частині нерівності (2.8) при умовах теореми менший за одиницю.

Оцінимо вираз $P(n,\gamma)$, причому випадок $1<\gamma\leq 2$ розглянемо окремо. Так,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\left(1-\frac{3n\gamma-5\gamma}{3n(n-1)}\right)} < e.$$

Далі, $\left(\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{3\gamma}{n}-1} < 1,16$ $\left(\text{для } 1<\gamma\leq 2 \text{ отримаємо } \left(\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{3\gamma}{n}-1} < 0,75\right)$, а $\left(\frac{\sqrt{2\gamma}+n-2}{4\gamma}\right)^{\frac{4\gamma}{3n}} <$ $< 1{,}15$. Вираз $\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$, а вираз $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 4{,}45$ $\Bigg($для $1<\gamma\leq 2$ отримаємо $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 1,5\Bigg)$. Враховуючи це, одержуємо $P(n,\gamma) < 6e$ ($P(n,\gamma) < 1{,}29e$ для $1<\gamma\leq 2$).

Виконаємо такі перетворення:

$$n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} =$$

$$= \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}}} <$$

$$< \left(n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}\left(\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}\right)}}\right)^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma}.$$

Оцінимо при даних n і γ вираз

$$n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}\left(\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}\right)}}=\frac{n}{e^{l}},$$

де $l=\dfrac{n\left(1-n^{-1}-\dfrac{\gamma}{n}+\dfrac{\gamma}{3n^2}\right)}{\sqrt{2}\gamma^{\frac{3}{2}(1+\gamma^{-1}-5n^{-1})}}$. Зауважимо також, що для даних n і γ маємо

$$p(n,\gamma):=\frac{\left(1-n^{-1}-\dfrac{\gamma}{n}+\dfrac{\gamma}{3n^2}\right)}{\sqrt{2}\left(1+\gamma^{-1}-\dfrac{5}{3}n^{-1}\right)}>p(20)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

а отже,

$$\frac{n}{e^{l}}<\frac{n}{e^{p(n,\gamma)\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}}<\frac{n}{e^{p(20)\frac{n}{n^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-q(n)\right)}}}}=\frac{n}{e^{p(20)\,n^{\frac{\ln\left(\frac{1}{p(20)}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}}}=1.$$

Таким чином, при $1<\gamma\leq 2$ нерівність (2.9) набирає вигляду

$$J(n,\gamma)\leq 1{,}29e\,\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}<0{,}77<1,$$

а при $2<\gamma$

$$J(n,\gamma)\leq 6e\left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^2<0{,}8<1.$$

Оскільки $J(n,\gamma)=\dfrac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}$, то при $n\geq 20$, $1<\gamma\leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$ і $\alpha_0\geq\dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ виконується нерівність $I_n(\gamma)<I_n^0(\gamma)$, а тому, враховуючи (2.4), для даного випадку нерівність (2.1) встановлено.

Таким чином, нерівність (2.1) встановлено і для $\alpha_0\geq\dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, і для $\alpha_0<\dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Теорему 2.1 доведено.

Зауважимо, що, поклавши в теоремі $2.1 n_0>20$, ми можемо уточнити вираз $p(n_0)$, а отже, й записати екстремальні конфігурації для більших γ при тому ж натуральному n.

Автор виражає подяку професору Бахтіну О. К. за постановку задачі, цінні поради і коментарі.

Література

1. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений*, Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5**, 159 – 245 (1934).
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
3. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, 131 – 145 (1980).
4. П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов*, Изв. АН СССР, сер. мат., **32**, № 5, 1033 – 1043 (1968).
5. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук, **49**, № 1(295), 3 – 76 (1994).
6. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **168**, 48 – 66 (1988).

7. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці Ін-ту математики НАН України, **73** (2008).
8. Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
9. Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей*, Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, **149**, 21 – 27 (1984).
10. Л. В. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей*, Изв. вузов. Математика, **6**, 80 – 81 (2000).
11. Л. В. Ковалев, *О трех непересекающихся областях*, Дальневост. мат. журн., **1**, № 1, 3 – 7 (2000).
12. Я. В. Заболотный, Л. В. Выговская, *О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей*, Укр. мат. вісн., **14**, № 3, 440 – 451 (2017).
13. А. К. Бахтин, Л. В. Выговская, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **70**, № 9, 1282 – 1288 (2018).

Одержано 12.04.20