DOI: 10.37863/umzh.v72i12.917

УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПЕРІОДИЧНА КУЛОНІВСЬКА ДИНАМІКА ДВОХ РІВНИХ ВІД'ЄМНИХ ЗАРЯДІВ У ПОЛІ ФІКСОВАНИХ ШІСТЬОХ РІВНИХ ДОДАТНИХ ЗАРЯДІВ

Periodic solutions of the Coulomb d-dimensional $(d = 1, 2, 3)$ equation of motion for two equal negative point charges in the field of six equal positive point charges fixed at vertices of a convex symmetric hexagon and octahedron are found. These systems possess an equilibrium configuration. Their periodic solutions are obtained with the help of the Lyapunov central limit theorem.

Знайдено періодичні розв'язки d-вимірних $(d = 1, 2, 3)$ рівнянь руху Кулона двох від'ємних точкових однакових зарядів у полі шістьох однакових додатних точкових зарядів, зафіксованих у вершинах опуклого симетричного шестикутника та октаедра. Ці системи мають рівноважний стан. Періодичні розв'язки отримано за допомогою центральної теореми Ляпунова.

1. Вступ. У цій статті знайдено рівновагу у системі Кулона двох від'ємних однакових зарядів у полі шістьох однакових додатних зарядів, зафіксованих у вершинах опуклого шестикутника (гексагона) та октаедра. Це дає нам змогу знайти у ній періодичні розв'язки лінійного, площинного та просторового рівняння руху Кулона. В лінійній системі рівновага є стійкою. Раніше автором було знайдено періодичні та квазіперіодичні розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох від'ємних однакових зарядів у полі двох однакових додатних зарядів [1 – 4]. Вказані результати, як і наведені у цій статті, було отримано завдяки тому, що для симетричної матриці U^0 частинних других похідних потенціальної енергії у рівновазі було знайдено в явному вигляді власні значення, серед яких були додатні, що породжують періодичні або квазіперіодичні розв'язки. Існування періодичних розв'язків випливає з центральної теореми Ляпунова [5 – 9], якщо немає нульових власних значень U^0. При цьому потенціальна енергія повинна бути дійсно аналітичною функцією в околі рівноваги. Саме такою є кулонівська потенціальна енергія.

Існування квазіперіодичних розв'язків було доведено автором у випадку наявності нульового власного значення U^0 за допомогою методу небесної механіки виключення вузла [8] та центральної теореми Ляпунова [3, 4]. При цьому враховувалось, що нульове власне значення є наслідком обертальної інваріантності системи. Площинна та просторова системи у цієї статті не мають нульового власного значення U^0.

Виникає питання: чи можливо довести існування періодичних розв'язків у кулонівських системах, коли немає рівноваги? У статті [10] дано ствердну відповідь на це питання, а саме, доведено існування таких розв'язків у нейтральній системі n однакових від'ємних зарядів у полі n однакових додатних зарядів. Метод доведення цього результату ґрунтується на узагальненні методу мажорант Зігеля [11], що застосовувався ним для знаходження розв'язків задачі трьох тіл небесної механіки.

Центральна теорема Ляпунова стосується існування періодичних розв'язків в околі початку координат систем Гамільтона, рівновага яких збігається з початком координат і формулюється так [10].

Теорема 1.1. *Нехай n-вимірна гамільтонова система визначається дійсно аналітичним гамільтоніаном, розклад Тейлора якого збігається абсолютно та рівномірно в околі початку координат і починається з квадратичних доданків. Нехай також $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — ненульові власні значення матриці, що визначає лінійну частину гамільтонового векторного поля, такі що $\lambda_s, s = 1, \ldots, k$, є уявними і нерезонансними: $\lambda_j \neq n'\lambda_s,\ s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, 2n,$ $j \neq s$, де n' — довільне ціле число. Тоді рівняння Гамільтона допускає існування k періодичних розв'язків в околі початку координат, таких що кожен з них залежить від відмінного дійсного параметра c_j для деякого $j = 1, \ldots, k$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \ldots, \tau_k(c_k)$ є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля і $\tau_j(0) = \dfrac{2\pi}{|\lambda_j|}$.*

Періодичні розв'язки з цієї теореми належать околу початку координат завдяки тому, що їхні розклади за параметрами c_j не містять сталих доданків.

Рівняння руху d-вимірної систем N точкових зарядів з масами $m_j, j = 1, \ldots, N$, є рівнянням руху електромеханічної системи частинок із потенціальною енергією U, заданою парним кулонівським потенціалом, і має вигляд

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U\big(x_{(N)}\big)}{\partial x_j},$$
$$j = 1, \ldots, N, \quad x_{(N)} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = \big(x_j^1, \ldots, x_j^d\big). \tag{1.1}$$

Якщо потенціальна енергія має рівновагу $x_j^0,\ j = 1, \ldots, dN$, то потенціальна енергія з новими змінними $x_j - x_j^0,\ j = 1, \ldots, dN$, матиме рівновагу у початку координат, що дає можливість застосувати центральну теорему Ляпунова до (1.1).

Відомо [12], що для (1.1) з $m_j = m$ власні значення з теореми 1.1 збігаються з $\lambda_j = \pm\sqrt{-m^{-1}\sigma_j},\ j = 1, \ldots, dN$, де σ_j — власні значення U^0. Таким чином, існування періодичних розв'язків рівняння (1.1) можна отримати з теореми 1.1, що і буде зроблено в цій статті.

Результати цієї статті, як і попередніх, можуть бути використані в теорії плазми та квантових моделей іонізованих молекул у наближенні Борна – Оппенгеймера, в якому нерухомі додатні та рівні від'ємні заряди асоціюються відповідно з важкими ядрами та легкими електронами [13].

Опишемо коротко структуру статті. У другому, третьому та четвертому пунктах знайдено періодичні розв'язки кулонівських рівнянь руху відповідно в лінійних, площинних та просторових системах у випадку, коли додатні заряди зафіксовано у вершинах шестикутника. Це ж зроблено і у п'ятому пункті, коли додатні заряди зафіксовано у вершинах октаедра. Отримані результати сформульовано як теореми наприкінці цих пунктів.

2. Лінійна динаміка Кулона. Будемо розглядати лінійну динаміку двох однакових від'ємних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах шестикутника з першими координатами $-a, 0, a$ і другими $\pm b,\ \pm\sqrt{3a^2 + b^2},\ \pm b\ (a, b > 0)$ (див. наступний пункт). Два негативних заряди рухаються вздовж першої координатної прямої (інваріантного многовиду площинної та просторової динаміки).

Потенціальна енергія цієї системи має вигляд ($x_j \in \mathbb{R}$)

$$U\big(x_{(2)}\big) =$$

$$= e_0^2|x_1 - x_2|^{-1} - 2e_0e'\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\right)^{-1} + \left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2}\right)^{-1}\right]. \tag{2.1}$$

Рівноважні рівняння мають вигляд $\dfrac{\partial}{\partial x_j}U\big(x_{(2)}\big) = 0,\ j = 1, 2$. Підставляючи в них наступні рівності при $k = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}|x_1 - x_2|^{-k} = -k\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^{k+2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{(x_1-a)^2+b^2}\right)^{-k} = -k\frac{x_1 - a}{\left(\sqrt{(x_1-a)^2+b^2}\right)^{k+2}},$$

отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x_j}U\big(x_{(2)}\big) = -e_0^2\frac{x_j - x_k}{|x_1 - x_2|^3} +$$

$$+2e_0e'\left[\frac{x_j - a}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\right)^3} + \frac{x_j + a}{\left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\right)^3} + \frac{x_j}{\left(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2}\right)^3}\right], \quad k \neq j = 1, 2.$$

В результаті одержуємо рівноважне співвідношення для рівноваги, покладаючи $x_1 = x_1^0 = a$, $x_2 = x_2^0 = -a$:

$$\frac{e_0}{(2a)^3} = \frac{3e'}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^3}.$$

Два недіагональних елементи матриці других частинних похідних потенціальної енергії легко обчислюються:

$$\frac{\partial U\big(x_{(2)}\big)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial U\big(x_{(2)}\big)}{\partial x_2\partial x_1} = -2e_0^2|x_1 - x_2|^{-3}.$$

Нехай $U_{1,2}^0$ збігається з цією функцією у рівновазі. Тоді $U_{1,2}^0 = -\dfrac{e_0^2}{4a^3} = -u'$. Далі

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U\big(x_{(2)}\big) = \frac{2e_0^2}{|x_1 - x_2|^3} + 2e_0e'\left[\frac{1}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\right)^3} - \frac{3(x_j-a)^2}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\right)^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\right)^3} - \frac{3(x_j+a)^2}{\left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\right)^5} + \frac{1}{\left(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2}\right)^3} - \frac{3x_j^2}{\left(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2}\right)^5}\right].$$

Нехай $U_{j,j}^0$ збігається з цією функцією у рівновазі. Тоді

$$U_{1,1}^0 = U_{2,2}^0 = \frac{e_0^2}{4a^3} + 2e_0e'\left[b^{-3} + \frac{2}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^3} - \frac{3a^25}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^5}\right].$$

Із рівноважного співвідношення випливає, що

$$\left(\frac{e_0}{3e'}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2a}=\frac{1}{\sqrt{(2a)^2+b^2}},\qquad 2a=(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\eta}b,\quad \eta=\left(\frac{e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}}<1. \tag{2.2}$$

В результаті

$$\begin{gathered}2e_0e'b^{-3}=3^{-1}\cdot 2(2a)^{-3}e_0^2(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}},\\ \frac{2e_0e'}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^3}=2e_0e'\frac{e_0}{3e'}\left(\frac{1}{2a}\right)^3=\frac{u'}{3},\\ \frac{6e_0e'(2a)^2}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^5}=6e_0e'\left(\frac{e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}(2a)^{-3}=u'\eta,\\ U^0_{1,1}=U^0_{2,2}=\frac{5u'}{3}+\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{5u'}{4}\eta=v.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Нехай U^0 — матриця з елементами $U^0_{1,1}$, $U^0_{2,2}$, $U^0_{1,2}=U^0_{2,1}$. Її власні значення ζ_1, ζ_2 легко знаходяться як корені $\lambda=\zeta_1,\zeta_2$ рівняння

$$\operatorname{Det}(U^0-\lambda I)=(v-\lambda)^2-u'^2=0,$$

$$\zeta_1=v-u'=u'\zeta_1',\qquad \zeta_2=v+u'=u'\zeta_2',$$

де

$$\zeta_1'=\frac{1}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\eta,\qquad \zeta_2'=\frac{1}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{8}{3}-\frac{5}{4}\eta.$$

Очевидно, що $\zeta_2'>0$, оскільки $\eta<1$. Розглянемо ζ_1'. Ми бачимо, що $\zeta_1'>0$, якщо $\eta<\frac{4}{5}$. Для $\eta<1$ сума двох останніх доданків більша за -1. Для першого доданка при $1>\eta\geq\frac{2}{3}$ справджується оцінка

$$(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}\geq 3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}>5,\qquad \zeta_1'>\frac{7}{3}-\frac{5}{4}.$$

Отже, $\zeta_1'>0$.

Наступний результат випливає з теореми Лагранжа – Діріхле про стійкість, оскільки потенціальна енергія має мінімум у рівновазі.

Теорема 2.1. *Якщо* $\frac{e_0}{e'}<2$, *то лінійна система двох рівних від'ємних зарядів із потенціальною енергією* (2.1) *має стійку рівновагу* $x^0=(a,-a)$ *з додатним числом* a, *визначеним формулою* (2.2). *Умова нейтральності* $2e'=e_0$ *у цій рівновазі не виконується.*

Для застосування центральної теореми Ляпунова необхідно виключити квадратичні резонанси в коренях ζ_j. Один резонанс відсутній: $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\neq k^2$, $k\in\mathbb{Z}$, бо $\zeta_2>\zeta_1$. Ми також маємо

$$\zeta_2=\zeta_1+2u',\qquad \frac{\zeta_2}{\zeta_1}=1+\frac{2}{\zeta_1'}.$$

Отже, для виключення квадратичного резонансу для ζ_1 необхідно довести, що $\zeta_1' - \frac{2}{3} = z' \geq 0$. Ми доведемо цю нерівність на кількох інтервалах, які покривають інтервал $\eta \in [0,1)$:

$$\eta \geq \frac{2}{3}, \qquad \zeta_1' > \frac{3}{2}; \quad \eta = 0, \quad \zeta' = 1,$$

$$\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{2}{3}, \qquad z' \geq \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{6} > \frac{28}{30} - \frac{5}{6} > 0,$$

$$\eta = \frac{1}{2}, \qquad z' = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{8} > \frac{3}{30},$$

$$\frac{3}{7} \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \qquad z' \geq 3^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8} > 3^{-1}\frac{\sqrt{343}}{8} - \frac{5}{8} > 3^{-1}\frac{18}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3} \leq \eta \leq \frac{3}{7}, \qquad z' \geq 3^{-1}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{28} > \frac{5}{9} - \frac{15}{28} > 0,$$

$$\eta = \frac{1}{3}, \qquad z' = 3^{-1}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{12} = 3^{-1}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{12} > \frac{5}{9} - \frac{5}{12} = \frac{5}{36},$$

$$\eta = \frac{1}{4}, \qquad z' > 3^{-1}\frac{8}{\sqrt{27}} - \frac{1}{3} > 3^{-1}\frac{8}{5{,}4} - \frac{1}{3} = \frac{40}{81} - \frac{1}{3} > 0,$$

$$\frac{1}{4} \leq \eta \leq \frac{1}{3}, \qquad z' \geq 3^{-1}\frac{8}{\sqrt{27}} - \frac{5}{12} \geq 3^{-1}\frac{8}{5{,}4} - \frac{5}{12} > \frac{40}{81} - \frac{5}{12} > 0,$$

$$\frac{1}{5} \leq \eta \leq \frac{1}{4}, \qquad z' \geq 3^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{16} = 3^{-1}\frac{\sqrt{125}}{8} - \frac{5}{16} > \frac{11}{24} - \frac{5}{16} = \frac{7}{48},$$

$$0 < \eta \leq \frac{1}{5}, \qquad z' \geq 4^{-1}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} > 0.$$

Отже, $\zeta_1' > \frac{2}{3}$.

Порядок зарядів на прямій зберігається завдяки необмеженому відштовхуванню між ними, і тому ми можемо замінити потенціал $|x_j - x_k|^{-1}$ на дійсно аналітичну функцію $(x_j - x_k)^{-1}$ в околі рівноваги.

З центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай* $\frac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 1,\ N = 2, m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (2.1) *має рівновагу* $x^0 = (a, -a)$ *і два періодичних розв'язки в її околі, кожен з яких залежить від дійсного відмінного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1)$, $\tau_2(c_2)$ *є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля і* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

3. Площинна динаміка Кулона. У цьому пункті ми розглянемо динаміку на площині двох однакових від'ємних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах симетричного опуклого шестикутника $b_j, 1 \leq j \leq 6,\ b_j = \left(b_j^1, b_j^2\right) \in \mathbb{R}^2$:

$$b_1 = (a, b), \qquad b_2 = (a, -b), \qquad b_5 = (0, \sqrt{3a^2 + b^2}),$$

$$b_3 = (-a, b), \qquad b_4 = (-a, -b), \qquad b_6 = (0, -\sqrt{3a^2 + b^2}), \quad a, b > 0,$$

з потенціальною енергією

$$U\big(x_{(2)}\big)=e_0^2|x_1-x_2|^{-1}-e_0e'\sum_{j=1,2}\sum_{k=1}^{6}|x_j-b_k|^{-1},\quad x_j=\big(x_j^1,x_j^2\big)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

де

$$|x|^2=\big(x_j^1\big)^2+\big(x_j^2\big)^2.$$

Частинні похідні потенціальної енергії визначено таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}U\big(x_{(2)}\big)=-e_0^2\frac{x_1^\alpha-x_2^\alpha}{|x_1-x_2|^3}+e_0e'\sum_{k=1}^{6}\frac{x_1^\alpha-b_k^\alpha}{|x_1-b_k|^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2^\beta}U\big(x_{(2)}\big)=-e_0^2\frac{x_2^\beta-x_1^\beta}{|x_1-x_2|^3}+e_0e'\sum_{k=1}^{6}\frac{x_2^\beta-b_k^\beta}{|x_2-b_k|^3}.$$

Рівновагу x_1^0, x_2^0 знаходимо, прирівнюючи до нуля праві частини цих рівностей при умові $x_1^{01}=a$, $x_2^{01}=-a$, $x_1^{02}=x_2^{02}=0$. Обидві рівності приводять до однакового результату. Для другого виразу у правій частині першої рівності отримуємо

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{x_1^{01}-b_k^1}{|x_1^0-b_k|^3}=\frac{6a}{\Big(\sqrt{(2a)^2+b^2}\Big)^3},$$

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{x_1^{02}-b_k^2}{|x_1^0-b_k|^3}=-\sum_{k=1}^{6}\frac{b_k^2}{|x_1^0-b_k|^3}=0.$$

Це дає рівноважне співвідношення між e_0, e', a, b таке ж, як і в попередньому пункті, оскільки $x_1^{01}-x_2^{01}=2a$ і

$$|x_1^0-b_1|^2=|x_1^0-b_2|^2=b^2,\qquad |x_1^0-b_3|^2=|x_1^0-b_4|^2=|x_1^0-b_5|^2=|x_1^0-b_6|^2=(2a)^2+b^2,$$

$$|x_2^0-b_1|^2=|x_2^0-b_2|^2=|x_2^0-b_5|^2=|x_2^0-b_6|^2=(2a)^2+b^2,\qquad |x_2^0-b_3|^2=|x_2^0-b_4|^2=b^2.$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії (3.1) мають вигляд

$$\frac{\partial U\big(x_{(2)}\big)}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta}=\frac{\partial U\big(x_{(2)}\big)}{\partial x_2^\beta\partial x_1^\alpha}=e_0^2\left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_1-x_2|^3}-3\frac{\big(x_1^\alpha-x_2^\alpha\big)\big(x_1^\beta-x_2^\beta\big)}{|x_1-x_2|^5}\right],\quad \alpha,\beta=1,2,$$

і

$$\frac{\partial^2U\big(x_{(2)}\big)}{\partial x_j^\beta\partial x_j^\alpha}=$$

$$=-\frac{e_0^2\delta_{\alpha,\beta}}{|x_1-x_2|^3}+e_0e'\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j-b_k|^3}-3\frac{\big(x_j^\alpha-b_k^\alpha\big)\big(x_j^\beta-b_k^\beta\big)}{|x_j-b_k|^5}\right]+3e_0^2\frac{\big(x_1^\alpha-x_2^\alpha\big)\big(x_1^\beta-x_2^\beta\big)}{|x_1-x_2|^5}.$$

Далі ми знайдемо рівноважні значення всіх доданків у цих рівностях. Нехай η, u' такі ж, як і у попередньому пункті. Очевидно, що

$$e_0^2\frac{(x_1^{0\alpha}-x_2^{0\alpha})\big(x_1^{0\beta}-x_2^{0\beta}\big)}{|x_1^0-x_2^0|^5}=\frac{e_0^2}{(2a)^3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1},\qquad \frac{e_0^2}{|x_1^0-x_2^o|^3}=\frac{e_0^2}{(2a)^3}=2^{-1}u'.$$

Використовуючи рівності (2.3), отримуємо

$$e_0e'\sum_{k=1}^{6}\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j^0-b_k|^3}=\delta_{\alpha,\beta}2e_0e'\left(b^{-3}+2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{3}{2}}\right)=\delta_{\alpha,\beta}\left[\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{2u'}{3}\right], \quad (3.2)$$

де $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера.

Нехай

$$T_j(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{6}\frac{(x_j^{\alpha}-b_k^{\alpha})\big(x_j^{\beta}-b_k^{\beta}\big)}{|x_j-b_k|^5}.$$

Також нехай $T_j^0(\alpha,\beta)$ є рівноважним значенням $T_j(\alpha,\beta)$. Доведемо рівність

$$T_j^0(\alpha,\beta)=\delta_{\alpha,\beta}\left\{10a^2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,1}+2\left[b^{-3}+(2b^2+a^2)\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\right]\delta_{\alpha,2}\right\}. \quad (3.3)$$

Оскільки

$$T_1^0(1,2)=-\Big\{b^{-5}\big((a-b_1^1)b_1^2+(a-b_2^1)b_2^2\big)+\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big[(a-b_3^1)b_3^2+(a-b_4^1)b_4^2+$$
$$+(a-b_5^1)b_5^2+(a-b_6^1)b_6^2)\Big]\Big\}=0,$$

$$T_2^0(1,2)=-\Big\{(2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\Big[\big(-a-b_1^1\big)b_1^2+\big(-a-b_2^1\big)b_2^2+\big(-a-b_5^1\big)b_5^2+(-a-b_6^1)b_6^2\Big]+$$
$$+b^{-5}\big(\big(-a-b_3^1\big)b_3^2+\big(-a-b_4^1\big)b_4^2\big)\Big\}=0,$$

$$T_1^0(1,1)=b^{-5}\Big[(a-b_1^1)^2+(a-b_2^1)^2\Big]+\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big[(a-b_3^1)^2+(a-b_4^1)^2+$$
$$+(a-b_5^1)^2+(a-b_6^1)^2\Big]=10a^2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_2^0(1,1)=\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big[\big(-a-b_1^1\big)^2+\big(-a-b_2^1\big)^2+(-a-b_5^1)^2+(-a-b_6^1)^2\Big]+$$
$$+b^{-3}\Big[\big(-a-b_3^1\big)^2+\big(-a-b_4^1\big)^2\Big]=10a^2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_j^0(2,2)=\sum_{k=1}^{6}\frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0-b_k|^5},$$

$$T_j^0(2,2)=2b^2\Big[b^{-5}+\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big]+2\frac{3a^2+b^2}{\big((2a)^2+b^2\big)^{\frac{5}{2}}},$$

рівність (3.3) доведено. В результаті

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta}=U^0_{2,\alpha;2,\beta}=\delta_{\alpha,\beta}\Big\{v'-6e_0e'\cdot 5a^2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,1}+$$
$$+\Big[b^{-3}+(2b^2+3a^2)\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big]\delta_{\alpha,2}+\frac{e_0^2}{(2a)^3}\delta_{\alpha,1}\Big\}=\delta_{\alpha,\beta}(v'-\delta_{\alpha,1}u'_*-\delta_{\alpha,2}u''_*),$$

$$v'=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{u'}{6}.$$

Тут ми використали (3.2). Крім того,

$$U^0_{1,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}).$$

З рівноважного співвідношення і (2.2) отримуємо

$$u'_* + \frac{3e_0^2}{(2a)^3} = 6e_0e' \cdot 5a^2(2a^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{5}{4}6e_0e'(2a)^2\left(\frac{e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 = \frac{5u'}{4}\eta,$$

$$6e_0e'b^{-3} = u'(1-\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$6e_0e'b^2\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0e'(2a)^2(1-\eta)\eta^{-1}\left(\frac{e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 = u'(1-\eta).$$

Ці рівності показують, що

$$u'_* = \frac{5u'}{4}\eta - \frac{3u'}{2}, \qquad u''_* = u'\left[2(1-\eta) + (1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3\eta}{4}\right].$$

Визначимо дві матриці $U^0_\alpha,\ \alpha = 1, 2$, за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}U^0_{\alpha;j,k} \tag{3.4}$$

і перенумеруємо індекси координат за правилом

$$(1,1) = 1, \qquad (2,1) = 2, \qquad (1,2) = 3, \qquad (2,2) = 4, \tag{3.5}$$

де перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми і верхніми індексами координат. В результаті отримаємо

$$U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2.$$

Елементи симетричних матриць $U^0_1,\ U^0_2$ визначено так:

$$U^0_{1;1,1} = U^0_{1,1;1,1} = U^0_{1;2,2} = U^0_{2,1;2,1} = v' - u'_*,$$

$$U^0_{2;1,1} = U^0_{1,2;1,2} = U^0_{2;2,2} = U^0_{2,2;2,2} = v' - u''_*,$$

$$U^0_{1;1,2} = U^0_{1,1;2,1} = -u', \qquad U^0_{2;1,2} = U^0_{1,2;2,2} = \frac{u'}{2},$$

$$U^0 = \begin{pmatrix} v' - u'_* & -u' \\ -u' & v' - u'_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' - u''_* & \dfrac{u'}{2} \\ \dfrac{u'}{2} & v' - u''_* \end{pmatrix}.$$

Характеристичний поліном U^0 визначається таким чином:

$$p(\lambda) = \mathrm{Det}(U^0 - \lambda I) = \big((v' - u'_* - \lambda)^2 - u'^2\big)\left((v' - u''_* - \lambda)^2 - \frac{u'^2}{4}\right) =$$

$$= (v' - u'_* - \lambda - u')(v' - u'_* - \lambda + u')\left(v' - u''_* - \lambda - \frac{u'}{2}\right)\left(v' - u''_* - \lambda + \frac{u'}{2}\right).$$

Його корені ζ_j мають вигляд

$$\zeta_1 = v' - u'_* - u' = \frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{5u'}{4}\eta + \frac{u'}{6} + \frac{3u'}{2} - u',$$

$$\zeta_1 = \frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{5u'}{4}\eta + \frac{2u'}{3},$$

$$\zeta_2 = v' - u'_* + u' = \zeta_1 + 2u' = \frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{5u'}{4}\eta + \frac{8u'}{3},$$

$$\zeta_3 = v' - u''_* - \frac{u'}{2} = \frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{u'}{3} - u'\left[2(1-\eta) + (1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3\eta}{4}\right] =$$

$$= -u'\left[\frac{2}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\eta) + \frac{3\eta}{4} + \frac{1}{3}\right] = u'\zeta'_3,$$

$$\zeta_4 = v' - u''_* + \frac{u'}{2} = \zeta_3 + u' = \zeta'_4 u',$$

де $\zeta_1,\ \zeta_2$ є такими ж, як і у попередньому пункті. Очевидно, що $\zeta_3 < 0,\ \zeta_4 < 0.$

Отже, наступна теорема випливає з центральної теореми Ляпунова.

Теорема 3.1. *Нехай* $\dfrac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 2,\ N = 2,$ $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (3.1) *має рівновагу* $(a,0),\ (-a,0)$ *і два періодичних розв'язки в її околі, кожен з яких залежить від дійсного відмінного параметра* c_j *при* $j = 1,2.$ *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1),\ \tau_2(c_2)$ *є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля і* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}.$

4. Просторова динаміка Кулона. 1. Будемо розглядати просторову динаміку двох однакових від'ємних зарядів у полі шістьох однакових додатних зарядів, таких, як у попередньому пункті, зафіксованих у вершинах симетричного опуклого шестикутника з координатами $b_j,$ $1 \le j \le 6,\ b_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3 = 0) \in \mathbb{R}^3$:

$$b_1 = (a,b,0), \qquad b_2 = (a,-b,0), \qquad b_5 = (0, \sqrt{3a^2+b^2}, 0),$$

$$b_3 = (-a,b,0), \qquad b_4 = (-a,-b,0), \qquad b_6 = (0, -\sqrt{3a^2+b^2}, 0), \quad a,b > 0,$$

з потенціальною енергією

$$U\big(x_{(2)}\big) = e_0^2|x_1 - x_2|^{-1} - e_0 e' \sum_{j=1,2}\sum_{k=1}^{6}|x_j - b_k|^{-1}, \quad x_j = \big(x_j^1, x_j^2, x_j^3\big) \in \mathbb{R}^3, \tag{4.1}$$

де

$$|x|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2 + (x_j^3)^2.$$

Неважко бачити, що для матричних елементів U^0 справджуються рівності

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{2,\alpha;2,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}(v' - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_*), \quad \alpha,\beta = 1,2,3,$$

$$U^0_{1,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}), \quad \alpha,\beta = 1,2,3,$$

в яких всі параметри є такими ж, як і у попередньому пункті. При цьому потрібно врахувати, що $b^3_k = 0,\ x^{03}_j = 0.$

Визначимо тепер три матриці $U^0_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3,$ за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} U^0_{\alpha;j,k} \tag{4.2}$$

і перенумеруємо індекси координат за правилом

$$(1,1) = 1, \qquad (2,1) = 2, \qquad (1,2) = 3, \qquad (2,2) = 4, \qquad (1,3) = 5, \qquad (2,3) = 6, \tag{4.3}$$

де перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми і верхніми індексами координат. В результаті отримаємо

$$U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2 \oplus U^0_3.$$

Елементи симетричних матриць U^0_1, U^0_2 визначено в попередньому пункті і

$$U^0_{3;1,1} = U^0_{1,3;1,3} = U^0_{3;2,2} = U^0_{2,3;2,3} = v',$$

$$U^0_{3;1,2} = U^0_{1,3;2,3} = U^0_{3;2,1} = U^0_{2,3;1,3} = \frac{u'}{2},$$

$$U^0_3 = \begin{pmatrix} v' & \dfrac{u'}{2} \\ \dfrac{u'}{2} & v' \end{pmatrix}, \qquad v' = \frac{u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}.$$

В результаті

$$U^0 = \begin{pmatrix} v' - u'_* & -u' \\ -u' & v' - u'_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' - u''_* & \dfrac{u'}{2} \\ \dfrac{u'}{2} & v' - u''_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' & \dfrac{u'}{2} \\ \dfrac{u'}{2} & v' \end{pmatrix}.$$

Власні значення цієї матриці збігаються з $\zeta_j,\ 1 \le j \le 4,\ \zeta_5 = \zeta'_5 u' = v' - \dfrac{u'}{2} > 0,\ \zeta_6 = \zeta'_6 u' =$ $= v' + \dfrac{u'}{2} > 0,$ де перші чотири з них визначено у попередньому пункті:

$$\zeta'_5 = \frac{1}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}, \qquad \zeta'_6 = \frac{1}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}.$$

Резонансу немає для ζ_2, бо $\zeta_2 > \zeta_l,\ l \ne 2,\ 0 < \eta < 1.$ Немає квадратичного резонансу для ζ_1, оскільки $\zeta_1 \ne \zeta_5$, якщо $\eta \ne \dfrac{4}{5}$, і

$$\zeta'_6 = \zeta'_1 + \frac{5\eta}{4}, \qquad \frac{\zeta_6}{\zeta_1} = 1 + \frac{5}{4\zeta'_1}\eta < 1 + \frac{15}{8} < 4\zeta'_1 > \frac{2}{3}, \qquad \frac{\zeta_5}{\zeta_1} < \frac{\zeta_6}{\zeta_1} < 4.$$

Немає квадратичного резонансу для ζ_6, бо

$$\zeta_6' > 1, \qquad \zeta_6' > \zeta_1', \qquad \zeta_2' = \zeta_6' + 2 - \frac{5\eta}{4}, \qquad \frac{\zeta_2}{\zeta_6} < 1 + 2 < 3.$$

Ми маємо також $\zeta_1 \neq \zeta_5$, якщо $\eta \neq \dfrac{4}{5}$, і

$$\zeta_1' = \zeta_5' + 1 - \frac{5\eta}{4}, \qquad \frac{\zeta_1}{\zeta_5} < 1 + \frac{1}{\zeta_5'},$$

$$\zeta_2' = \zeta_5' + 3 - \frac{5\eta}{4}, \qquad \frac{\zeta_2}{\zeta_5} < 1 + \frac{3}{\zeta_5'}.$$

З двох останніх нерівностей і $\eta \geq \dfrac{2}{3}$ отримуємо

$$\zeta_5' > \frac{4}{3}, \qquad \frac{\zeta_2}{\zeta_5} < 1 + \frac{3}{\zeta_5'} < 1 + \frac{9}{4} < 4, \qquad \frac{\zeta_1}{\zeta_5} < 1 + \frac{3}{4} < 2, \qquad \frac{\zeta_6}{\zeta_5} = 1 + \frac{1}{\zeta_5'} < 2.$$

Отже, ми довели таке твердження.

Твердження 4.1. *Якщо $0 < \eta < 1$, то квадратичний резонанс відсутній для $\zeta_j,\ j = 2, 6$. Квадратичний резонанс відсутній для ζ_1 та ζ_5, якщо відповідно $\eta \neq \dfrac{4}{5}$ і $\eta \geq \dfrac{2}{3}$.*

З цього твердження та центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 4.1. *Нехай $\dfrac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1,\ \eta = \dfrac{4}{5}$ або $\eta < \dfrac{2}{3}$. Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *при $d = 3, N = 2, m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією* (4.1) *має рівновагу $(a, 0, 0),\ (-a, 0, 0)$ і три періодичних розв'язки в її околі. Якщо жодна з цих умов не виконується, то це рівняння має чотири періодичних розв'язки в околі цієї рівноваги. В обох випадках вони залежать від дійсного параметра c_j для відповідного $j,\ j = 1, 2, 3$ або $j = 1, 2, 3, 4$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_j(c_j)$ є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля, такими що $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\xi_j})^{-1}$, де $\xi_1 = \zeta_2,\ \xi_2 = \zeta_6,\ \xi_3 = \zeta_1,\ \xi_4 = \zeta_5$ або $\xi_3 = \zeta_5,\ \xi_4 = \zeta_1$.*

Твердження 4.2. *Шестикутник, що розглядається в усіх пунктах, має рівні сторони $2b$, якщо $b = \dfrac{2}{\sqrt{7}}a$. У цьому випадку $\eta = \dfrac{7}{8}$.*

Доведення. Шестикутник має рівні сторони $2b$, якщо $(\sqrt{3a^2 + b^2} - b)^2 + a^2 = 4b^2$. Таким чином,

$$4a^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{3a^2 + b^2} = 4b^2 \to 2a^2 - b^2 = b\sqrt{3a^2 + b^2} \to$$

$$\to (2a^2 - b^2)^2 = b^2(3a^2 + b^2) \to 4a^4 + b^4 - 4a^2b^2 = b^4 + 3a^2b^2 \to 4a^2 - 4b^2 = 3b^2 \to b = \frac{2}{\sqrt{7}}a,$$

$$\eta = \frac{4a^2}{4a^2 + b^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 7^{-1}4a^2} = \frac{7}{8}.$$

5. Просторова динаміка Кулона. 2. Будемо розглядати просторову динаміку Кулона (1.1) двох однакових від'ємних зарядів $e_0 < 0$ у полі шістьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра з координатами $b_j,\ 1 \leq j \leq 6,\ b_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3) \in \mathbb{R}^3$:

$$b_1 = (a, b, 0), \qquad b_2 = (a, -b, 0), \qquad b_5 = (0, 0, \sqrt{3a^2 + b^2}), \tag{5.1}$$

$$b_3 = (-a, b, 0), \qquad b_4 = (-a, -b, 0), \qquad b_6 = (0, 0, -\sqrt{3a^2 + b^2}), \quad a, b > 0. \tag{5.2}$$

Потенціальну енергію визначено формулою (4.1). Рівновага x_j^0 є такою ж, як і в попередньому пункті. Всі евклідівські норми $x_j^0 - b_k$ є ті ж самі, що і в попередньому пункті, бо $x_j^{0\alpha} = 0$, $\alpha = 2, 3$. Всі доданки у виразі $U^0_{j,\alpha;\beta,k}$ є тими ж самими, що і раніше, за винятком $T_j^0(\alpha, \beta)$. Рівновага визначається рівностями

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^{01} - b_k^1}{|x_1^0 - b_k|^3} = \frac{6a}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3},$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^{02} - b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^{6} \frac{b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^{03} - b_k^3}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^{6} \frac{b_k^3}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0.$$

Вони визначають рівноважне співвідношення, як і раніше. Для функцій T_j^0, визначених у третьому пункті (див. (3.3)), має місце рівність

$$T_j^0(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha,\beta} \Big\{ 10a^2\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \delta_{\alpha,1} + 2\Big[b^{-3} + b^2\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big]\delta_{\alpha,2} + \\ + 2(3a^2 + b^2)\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \delta_{\alpha,3} \Big\}, \tag{5.3}$$

яка випливає з рівностей

$$T_1^0(1,2) = -\Big\{ b^{-5}\big((a - b_1^1)b_1^2 + (a - b_2^1)b_2^2\big) + \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \Big[(a - b_3^1)b_3^2 + (a - b_4^1)b_4^2 + \\ + (a - b_5^1)b_5^2 + (a - b_6^1)b_6^2\Big]\Big\} = 0,$$

$$T_1^0(1,3) = -\Big\{ b^{-5}\big((a - b_1^1)b_1^3 + (a - b_2^1)b_2^3\big) + \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \Big[(a - b_3^1)b_3^3 + (a - b_4^1)b_4^3 + \\ + (a - b_5^1)b_5^3 + (a - b_6^1)b_6^3\Big]\Big\} = 0,$$

$$T_1^0(2,3) = -\Big\{ b^{-5}\big((a - b_1^2)b_1^3 + (a - b_2^2)b_2^3\big) + \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \Big[(a - b_3^2)b_3^3 + (a - b_4^2)b_4^3 + \\ + (a - b_5^2)b_5^3 + (a - b_6^2)b_6^3\Big]\Big\} = 0,$$

$$T_1^0(1,1) = b^{-5}\Big[(a - b_1^1)^2 + (a - b_2^1)^2\Big] + \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \Big[(a - b_3^1)^2 + (a - b_4^1)^2 + \\ + (a - b_5^1)^2 + (a - b_6^1)^2\Big] = 10a^2\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}}, \tag{5.4}$$

$$T_2^0(1,1) = \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}} \Big[(-a - b_1^1)^2 + (-a - b_2^1)^2 + (-a - b_5^1)^2 + (-a - b_6^1)^2\Big] + \\ + b^{-3}\Big[(-a - b_3^1)^2 + (-a - b_4^1)^2\Big] = 10a^2\big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_j^0(2,2) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0 - b_k|^5} = \sum_{k=1}^{4} \frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0 - b_k|^5} = 2b^2\Big[b^{-5} + \big((2a)^2 + b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big],$$

$$T_j^0(3,3) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(b_k^3)^2}{|x_j^0 - b_k|^5} = \sum_{k=5}^{6} \frac{(b_k^3)^2}{|x_j^0 - b_k|^5} = 2\frac{3a^2 + b^2}{\big((2a)^2 + b^2\big)^{\frac{5}{2}}}.$$

Рівність $T_2^0(\alpha,\beta)=0$, $\alpha\neq\beta$, доводимо за допомогою чотирьох рівностей з (5.4), використовуючи те, що $x_1^{01}=-x_2^{01}=-a$. Таким чином, рівність (5.3) є правильною. Очевидно, що вираз $T_j(1,1)$ є тим самим, що і в третьому пункті, і матричні елементи U^0 визначаються так:

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta}=U^0_{2,\alpha;2,\beta}=\delta_{\alpha,\beta}(v'-\delta_{\alpha,1}u'_*-\delta_{\alpha,2}v_1-\delta_{\alpha,3}v_2),\quad \alpha,\beta=1,2,3,$$
$$U^0_{1,\alpha;2,\beta}=U^0_{2,\alpha;1,\beta}=\frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1-3\delta_{\alpha,1}),\quad \alpha,\beta=1,2,3,$$

де вираз u'_* визначено у третьому пункті і

$$u'_*=\frac{5u'}{4}\eta-\frac{3u'}{2},\qquad v'=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{u'}{6},$$
$$v_1=6e_0e'\left[b^{-3}+b^2\big((2a)^2+b^2\big)^{-\frac{5}{2}}\right]=u'(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+u'(1-\eta),$$
$$v_2=6e_0e'\frac{3a^2+b^2}{\big((2a)^2+b^2\big)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3u'}{4}\eta+(1-\eta)u'=u'-\frac{u'}{4}\eta.$$

Ці рівності доведено у третьому пункті. Застосовуючи перенумерацію змінних із попереднього пункту, отримуємо

$$U^0=\begin{pmatrix}v'-u'_* & -u'\\ -u' & v'-u'_*\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}v'-v_1 & \dfrac{u'}{2}\\ \dfrac{u'}{2} & v'-v_1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}v'-v_2 & \dfrac{u'}{2}\\ \dfrac{u'}{2} & v'-v_2\end{pmatrix}.$$

Характеристичний поліном U^0 є добутком трьох квадратичних поліномів. Перший із них має корені $\zeta_j, j=1,2$, визначені у другому пункті. Решта з них задаються так $(0<\eta<1)$:

$$\zeta_3=u'\zeta'_3=v'-v_1-\frac{u'}{2}=-\frac{2u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\right)u'+\eta u'=$$
$$=-\frac{2u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}u'+\eta u'<0,$$
$$\zeta_4=u'\zeta'_4=v'-v_1+\frac{u'}{2}=-\frac{2u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{u'}{3}+\eta u'<0,$$
$$\zeta_5=u'\zeta'_5=v'-v_2-\frac{u'}{2}=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}+\frac{u'}{6}+\frac{u'}{4}\eta-\frac{3u'}{2}=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{4u'}{3}+\frac{u'}{4}\eta,$$
$$\zeta_6=u'\zeta'_6=v'-v_2+\frac{u'}{2}=\frac{u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{u'}{3}+\frac{\eta}{4}u'>0.$$

Проаналізуємо тепер можливість виключення резонансів серед цих коренів. Важливу роль при цьому відіграють лінійні співвідношення між ними. При $0<\eta<1$ маємо

$$\zeta_5' = \zeta_1' - 2 + \frac{3\eta}{2} = \zeta_2' - 4 + \frac{3\eta}{2}, \qquad \zeta_5' < \zeta_1',\ \zeta_2',$$

$$\zeta_6' = \zeta_1' - 1 + \frac{3\eta}{2} = \zeta_2' - 3 + \frac{3\eta}{2} < \zeta_1' + \frac{1}{2}, \quad \zeta_6' < \zeta_2'.$$

Це означає, що резонансу немає для ζ_2. Оскільки $\zeta_1' > \dfrac{2}{3}$ (доведено у другому пункті), то

$$\frac{\zeta_6'}{\zeta_1'} < 1 + \frac{3}{4}.$$

Це означає, що квадратичного резонансу немає для ζ_1, якщо $\eta \neq \dfrac{2}{3}$, тобто $\zeta_6 \neq \zeta_1$. Ми також маємо

$$\eta > \frac{2}{3} \rightarrow \zeta_6' > \zeta_1', \qquad \zeta_2' < \zeta_6' + \frac{3}{2}, \qquad \zeta_6' > \frac{4}{3}, \qquad \frac{\zeta_2'}{\zeta_6'} < 1 + \frac{9}{8} < 3.$$

Ці нерівності свідчать про те, що квадратичного резонансу немає для ζ_6, якщо $\eta > \dfrac{2}{3}$. Ми також маємо

$$\eta \geq \frac{3}{4} \rightarrow \zeta_5' > \frac{4}{3}, \qquad \frac{\zeta_6'}{\zeta_5'} = \frac{1}{\zeta_5'} + 1 < 2, \qquad \zeta_1' < \zeta_5' + 1,$$

$$\frac{\zeta_1'}{\zeta_5'} < 2, \qquad \zeta_2' < \zeta_5' + 3, \qquad \frac{\zeta_2'}{\zeta_5'} < 1 + \frac{9}{4} < 4.$$

Ці нерівності свідчать про те, що квадратичного резонансу немає для ζ_5, якщо $\eta \geq \dfrac{3}{4}$.

Отже, ми довели таке твердження.

Твердження 5.1. *Нехай виконується одна з чотирьох умов* $\eta = \dfrac{2}{3}$, $\eta < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3} < \eta < \dfrac{3}{4}$, $\eta \geq \dfrac{3}{4}$. *Тоді відсутні квадратичні резонанси відповідно для* ζ_2; ζ_2, ζ_1; ζ_2, ζ_1, ζ_6; ζ_2, ζ_1, ζ_6, ζ_5.

З центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 5.1. *Покладемо* $\dfrac{e_0}{3e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$. *Нехай виконується одна з чотирьох умов* $\eta = \dfrac{2}{3}$, $\eta < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3} < \eta < \dfrac{3}{4}$, $\eta \geq \dfrac{3}{4}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *при* $d = 3$, $N = 2$, $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (4.1) *і вершинами октаедра* b_j, *заданими формулами* (5.1), (5.2), *має рівновагу* $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, *а також відповідно один*, *два*, *три та чотири періодичних розв'язки в її околі. Вони залежать від дійсних параметрів* c_j *для відповідного* j, $j = 1; j = 1, 2; j = 1, 2, 3$ *та* $j = 1, 2, 3, 4$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_j(c_j)$ *є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі початку координат і* $\tau_1(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_2})^{-1}$, $\tau_2(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_1})^{-1}$, $\tau_3(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_6})^{-1}$, $\tau_4(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_5})^{-1}$.

Література

1. W. Skrypnik, *Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line*, Ukr. Math. J., **66**, № 5, 668–682 (2014).
2. В. Скрипник, *Кулонівська динаміка двох та трьох рівних від'ємних зарядів на площині у полі фіксованих двох рівних додатних зарядів*, Укр. мат. журн., **68**, № 11, 1528–1539 (2016).
3. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics near equilibrium of two equal negative charges in the field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1273–1285 (2016).

4. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics of three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, J. Geom. and Phys., **127**, 101 – 111 (2018).
5. A. Lyapunov, *General problem of stability of motion*, Moscow (1950); *English translation*: Internat. J. Control, **55**, № 3, 521 – 790 (1992).
6. M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Lectures on Nonlinear Problems in Math. Analysis, Acad. Press, New York etc. (1977).
7. J. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York (1976).
8. C. Siegel, J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin ect. (1971).
9. В. Немыцкий, В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва, Ленинград (1947).
10. W. Skrypnik, *Coulomb planar periodic motion of n equal charges n the field of n equal positive charges fixed at a line and constant magnetic field*, Adv. Math. Phys., **2018**, Article ID 2548074 (2018), 10 p.
11. C. Siegel, *Über eine periodische Lösung in ebenen Dreikörper Problem*, Math. Nachr., **4**, 28 – 35 (1950-1951).

Одержано 06.05.19