УДК 517.955

А. К. Уринов, А. Б. Окбоев (Ферган. гос. ун-т, Узбекистан)

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

We study a modified Cauchy problem for the degenerated hyperbolic equation of the second kind. First, we find the representations of the general solution of the analyzed equation for $\alpha \leq 1$. Then, by using these representations, we formulate modified Cauchy problems for all real values of α and deduce the formulas for the solution of the analyzed problems. Further, it is shown that the obtained solutions indeed satisfy the investigated equation and the initial conditions.

Досліджено видозмінену задачу Коші для вироджуваного гіперболічного рівняння другого роду. При цьому спочатку знайдено зображення загального розв'язку розглядуваного рівняння при $\alpha \leq 1$. Потім за допомогою цих зображень загального розв'язку рівняння для всіх дійсних α сформульовано видозмінені задачі Коші й отримано формули для розв'язку поставлених задач. Отримані формули обгрунтовано, тобто доведено, що вони задовольняють рівняння і початкові умови.

1. Введение. Известно, что вырождающиеся уравнения занимают центральное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных и имеют многочисленные приложения в различных разделах науки. Например, вырождающиеся гиперболические уравнения встречаются при решении многих вопросов газовой динамики [1, 2], теории бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения [3], безмоментной теории оболочек [3], компьютерной томографии [4] и др. При изучении вырождающихся гиперболических уравнений одной из важных проблем является начальная задача, т. е. задача Коши. Особенностью вырождающихся гиперболических уравнений является то, что для них не всегда имеет место корректность задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения. Например, задача Коши в обычной постановке может оказаться неразрешимой, если гиперболическое уравнение вырождается вдоль линии, являющейся одновременно характеристикой, т. е. если уравнение является вырождающимся второго рода. В справедливости этого утверждения, например, для уравнения $u_{xx} - yu_{yy} - (1/2)\, u_y = 0,\ y > 0$, легко убедиться с помощью его общего решения [5, с. 50–52] $u\,(x,y) = \varphi\left(x + 2\sqrt{y}\right) + \psi\left(x - 2\sqrt{y}\right)$, где $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^2$ — произвольные функции. Поэтому в таких случаях естественно рассмотреть „видоизмененную” задачу Коши, т. е. задачу с начальными условиями в видоизмененной форме. Один из вариантов таких задач был предложен А. В. Бицадзе в [5, с. 50–52], согласно которому для уравнения, приведенного выше, корректно поставленной будет начальная задача с условиями $u(x,0) = \tau(x)$, $\lim_{y\to 0} \sqrt{y} u_y(x,y) = \nu(x)$.

Постановке и исследованию начальных задач для общего линейного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

$$y^n u_{yy} - u_{xx} + au_y + bu_x + cu = f, \quad y > 0, \tag{1}$$

где $a,\ b,\ c,\ f$ — заданные функции переменных x и y, и его частным случаям посвящено много работ (см., например, [6–10]). В частности, в работе [6] при рассмотрении уравнения (1) при $0 < n < 1$, $a \equiv b \equiv c \equiv f \equiv 0$ в характеристическом треугольнике D, опирающемся на отрезок $[0, 1]$ оси абсцисс, доказано, что задача Коши с начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_y\,(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

однозначно разрешима, и найдена формула решения этой задачи. Существует единственное решение задачи Коши $\{(1), (2)\}$ и в том случае, когда $0 < n < 1$, а функции $a,\ b,\ c,\ f$ и их производные по x непрерывны в $\overline{D}$ [7, с. 44] (теорема 1). Это утверждение в случае $a \equiv b \equiv \equiv f \equiv 0,\ c \equiv \text{const} \neq 0$ методом Римана доказано в работе [8]. Далее, если $1 \leq n < 2$ и функции $a,\ b,\ c,\ f$ удовлетворяют условиям, указанным выше, и условиям

$$n-1 < \beta(x) = \lim_{y\to 0} y^{1-n} a(x,y) < 1, \quad \beta(x) \in C^3, \quad \gamma(x,y) = \beta(x) - y^{1-n} a = O(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

то для уравнения (1) корректно поставленной будет начальная задача со следующими начальными условиями на линии $y = 0$ [7, с. 45] (теорема 3):

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{y\to 0} y^{\beta(x)} u_y = \nu_1(x), \quad 0 < x < 1.$$

В работе [9] (теорема 1) при $n = 1$ и определенных условиях на коэффициенты $a,\ b,\ c,$ свободный член f уравнения (1) и заданные функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$ доказано, что в области D существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям в виде

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{y\to 0}\ H_y^{-1} (\partial/\partial y)[u - \Phi(x,y)] = \nu_2(x), \quad 0 < x < 1, \qquad (3)$$

где $H = H(x,y) = \displaystyle\int_0^y \exp\left\{\int_t^T a\,(x,z)\, z^{-1} dz\right\} dt,\ \Phi(x,y)$ — известная функция, определяемая с помощью некоторых рекуррентных соотношений и функций $a,\ b,\ c,\ f,\ \tau,\ \nu_2$, а T — высота характеристического треугольника D. В этой же работе аналогичное утверждение доказано и в том случае, когда в уравнении (1) $1 < n < 2$ [9] (теоремы 2 и 3). Проблема правильной постановки начальной задачи с данными на линии вырождения типа для более общего, чем (1), гиперболического уравнения второго рода изучена в работе [10].

Исходя из того, что функция $\Phi\,(x,\,y)$, содержащаяся во втором начальном условии из (3), зависит от функций $a,\ b,\ c,$ можно сделать вывод о том, что коэффициенты уравнения (1) существенно влияют на корректность постановки начальной задачи для этого уравнения с условиями на линии параболического вырождения $y = 0$. Это утверждение относительно гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка отмечено А. В. Бицадзе в работе [11].

Известно, что очень часто корректно поставленная задача подсказывается его общим решением. Поэтому во многих случаях, с целью изучения правильной постановки задач для гиперболических уравнений, сначала находится представление общего решения данного уравнения. Например, в работе [9] при рассмотрении уравнения

$$yu_{yy} - u_{xx} + \alpha u_y = 0, \quad y > 0, \qquad (4)$$

вытекающего из (1) при $n = 1,\ a(x,y) = \alpha = \text{const},\ b(x,y) \equiv c(x,y) \equiv f(x,y) \equiv 0,$ при всех значениях $\alpha \leq 1$ приведено его общее решение, но методика получения этой формулы не изложена. В работе [12] методом сферических средних найдено общее решение уравнения $u_{xx} - u_{tt} - (k/t)\, u_t = 0,\ t > 0,$ которого преобразуется в (4) путем замены $t = 2\sqrt{y}$. Общее решение уравнения (4) при $\alpha = -n + 1/2,\ n \in N$, в работе [13] найдено с помощью решения уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Из найденных в этих работах представлений общего решения уравнения (4), в частности, когда α — нецелое число меньше единицы, следует, что видоизмененная задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями вида (3) однозначно разрешима, если $H_y^{-1} = y^{\alpha}$, а $\Phi(x, y)$ — известная функция вида

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} N_k\,(n,\delta)\, y^k \int_0^1 \left[\tau^{(2k)}(t) + \tau^{(2k)}\,(t_1)\right] [z(1-z)]^{k+\delta}\, dz,$$

где

$$N_k(n,\delta) = 2^{3k} C_{n+1}^k \left[\Gamma(\delta + k + 1) \prod_{s=0}^{k-1} (1 + 2s + 2\delta - 2n)\right]^{-1},$$

$$\delta = \alpha + n - 1/2, \quad t = x - 2\sqrt{y}(1-2z), \quad t_1 = x + 2\sqrt{y}(1-2z).$$

При этом решение видоизмененной задачи Коши записывается в виде

$$u(x,y) = \Phi(x,y) + y^{1-\alpha} \int_0^1 [\nu(t) + \nu\,(t_1)]\, [z(1-z)]^{n-\delta}\, dz.$$

В работе [14] эта формула приведена к виду, удобному при исследовании краевых задач для уравнения (4). Задача нахождения общего решения одного гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка, а также правильная постановка начальных и краевых задач для этого уравнения изучены в работе [15].

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + y\, u_{yy} + \alpha\, u_y - \lambda^2\, u = 0, \quad y < 0, \tag{5}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной его характеристиками $OB: x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB: x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $OA: y = 0$, где α и λ — заданные действительные числа. Найдены формулы, связывающие решения уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$ с решениями уравнений $L_{2-\alpha,\lambda}(u) = 0$, $L_{\alpha-n,\lambda}(u) = 0$ и $L_{2-\alpha-n,\lambda}(u) = 0$, $n \in N$. С помощью найденных формул при всех значениях $\alpha \le 1$ построено представление общего решения уравнения (5), для всех $\alpha \in R$ сформулированы видоизмененные задачи Коши с начальными условиями на линии параболического вырождения $y = 0$, найдены в явном виде решения поставленных задач и доказано, что найденные решения действительно удовлетворяют уравнению и начальным условиям.

2. Свойства решений уравнения (5) и вспомогательные формулы. Введем в рассмотрение новую функцию $w(x, y)$, положив

$$u(x,y) = (-y)^{1-\alpha} w(x,y). \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) сведется к виду

$$w_{xx} + y w_{yy} + (2-\alpha) w_y - \lambda^2\, w = 0. \tag{7}$$

Обозначим через $Z(\alpha, \lambda)$ любое решение уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$. Тогда в силу равенств (5) – (7) имеем

$$Z(\alpha, \lambda) = (-y)^{1-\alpha} Z(2-\alpha, \lambda). \tag{8}$$

Отсюда следует, что если известно решение уравнения (5) при $\alpha < 1$, то его решение при $\alpha > 1$ определяется равенством (8).

Пусть $Z(\alpha, \lambda)$ — любое решение уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$. Тогда $Z(\alpha+1, \lambda) = (\partial/\partial y)\, Z(\alpha, \lambda)$ представляет собой решение уравнения $L_{\alpha+1,\lambda}(u) = 0$ и, вообще,

$$Z(\alpha+n, \lambda) = (\partial^n/\partial y^n)\, Z(\alpha, \lambda) \tag{9}$$

является решением уравнения $L_{\alpha+n,\lambda}(u) = 0$.

Далее, в силу (8) формулу (9) можно записать в виде

$$(-y)^{1-\alpha-n} Z(2-\alpha-n, \lambda) = (\partial^n/\partial y^n\ )\, [(-y)^{1-\alpha} Z(2-\alpha, \lambda)]. \tag{10}$$

Выполняя здесь замену $2-\alpha$ на α, получаем

$$Z(\alpha-n, \lambda) = (-y)^{1-\alpha+n}\, (\partial^n/\partial y^n\ )\, [(-y)^{\alpha-1} Z(\alpha, \lambda)]. \tag{11}$$

Учитывая равенство (8), из (10) находим

$$Z(2-\alpha-n, \lambda) = (-y)^{\alpha+n-1}\, (\partial^n/\partial y^n)\, Z(\alpha, \lambda). \tag{12}$$

Равенства (11), (12) и доказываемая ниже лемма существенно используются при построении и обосновании общего решения уравнения (5) при $\alpha < 0$.

Лемма 1. *Если $\psi(z) \in C^2[0,1]$ и $\gamma > -1$, то справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^1 \psi(t) \big[z(1-z)\big]^{\gamma} \bar{J}_{\gamma}(\sigma) dz =$$

$$= \frac{4}{\gamma+1} \int\limits_0^1 \big[(\lambda^2 - d^2/dt^2\ )\psi(t)\big]\, \big[z(1-z)\big]^{\gamma+1} \bar{J}_{\gamma+1}(\sigma) dz, \tag{13}$$

а если $\psi(z) \in C^1[0,1]$ и $\gamma > 0$, то имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^1 \psi(t) \big[z(1-z)\big]^{\gamma} \bar{J}_{\gamma}(\sigma) dz = \frac{\gamma}{4y} \int\limits_0^1 \psi(t) [z(1-z)]^{\gamma-1} \bar{J}_{\gamma-1}(\sigma) dz -$$

$$- \frac{1+2\gamma}{2y} \int\limits_0^1 \psi(t) \big[z(1-z)\big]^{\gamma} \bar{J}_{\gamma}(\sigma) dz, \tag{14}$$

где $t = x + 2\sqrt{-y}(2z-1)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\bar{J}_{\delta}(z) = \Gamma(\delta+1)(z/2)^{-\delta} J_{\delta}(z)$, $J_{\delta}(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Сначала докажем равенство (13). С этой целью его левую часть запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 \psi(t)\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)dz = I_1 + I_2, \tag{15}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \left[(\partial/\partial y)\psi(t)\right]\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)dz, \qquad I_2 = \int_0^1 \psi(t)(\partial/\partial y)\left\{\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)\right\}dz.$$

Вычислим I_1:

$$I_1 = \int_0^1 \psi'(t)\frac{\partial t}{\partial y}\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)dz = \int_0^1 \psi'(t)\,(1-2z)\,(-y)^{-1/2}\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)dz =$$

$$= (-y)^{-\gamma-3/2}2^{-3\gamma-3}\lambda^{-2\gamma-2}\Gamma(\gamma+1)\int_0^1 \psi'(t)\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma^{\gamma+1}\, J_{\gamma+1}(\sigma)\right]dz.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$I_1 = -(-y)^{-\gamma-3/2}2^{-3\gamma-3}\lambda^{-2\gamma-2}\Gamma(\gamma+1)\int_0^1 \psi''(t)\frac{\partial t}{\partial z}\sigma^{\gamma+1}\, J_{\gamma+1}(\sigma)dz =$$

$$= -\frac{4}{\gamma+1}\int_0^1 \psi''(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma+1}\, \bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz. \tag{16}$$

Теперь вычислим I_2:

$$I_2 = \int_0^1 \psi(t)\frac{\partial}{\partial y}\{[z(1-z)]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)\}dz = \int_0^1 \psi(t)\big[z(1-z)\big]^\gamma\, \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{J}_\gamma(\sigma)\right]dz.$$

Отсюда, применяя формулу [16] $(\partial/\partial\sigma)\,\bar{J}_\gamma(\sigma) = -\left[\sigma/(2\gamma+2)\right]\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)$, находим

$$I_2 = \frac{4\lambda^2}{\gamma+1}\int_0^1 \psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma+1}\, \bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz. \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (15), получаем формулу (13).

Теперь докажем равенство (14). Как показано выше,

$$I_1 = \int_0^1 \psi'(t)\,(1-2z)\,(-y)^{-1/2}\big[z(1-z)\big]^\gamma \bar{J}_\gamma(\sigma)dz.$$

Отсюда, вводя $\psi'(t)$ под знаком дифференциала и интегрируя по частям, имеем

$$I_1 = \frac{1}{4y}\int_0^1 \psi(t)\frac{\partial}{\partial z}\{(1-2z)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)\}dz =$$

$$= -\frac{1}{2y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz + \frac{\gamma}{4y}\int_0^1 \psi(t)(1-2z)^2\left[z(1-z)\right]^{\gamma-1}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz+$$

$$+\frac{\lambda}{4(-y)^{1/2}(\gamma+1)}\int_0^1 \psi(t)(1-2z)^2\left[z(1-z)\right]^{\gamma-1/2}\sigma\,\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz = I_{11}+I_{12}+I_{13}.$$

Принимая во внимание равенство $(1-2z)^2 = 1-4z(1-z)$, записываем интегралы I_{12} и I_{13} следующим образом:

$$I_{12} = \frac{\gamma}{4y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma-1}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz - \frac{\gamma}{y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz,$$

$$I_{13} = \frac{-4\lambda^2}{\gamma+1}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma+1}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz + \frac{\lambda^2}{\gamma+1}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz.$$

Следовательно,

$$I_1 = I_{11}+I_{12}+I_{13} = -\frac{1}{2y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz+$$

$$+\frac{\gamma}{4y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma-1}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz - \frac{\gamma}{y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz-$$

$$-\frac{4\lambda^2}{\gamma+1}\int_0^1 \psi(t)[z(1-z)]^{\gamma+1}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz + \frac{\lambda^2}{\gamma+1}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz. \qquad (18)$$

На основании равенств (17), (18) имеем

$$I_1+I_2 = -\frac{1+2\gamma}{2y}\int_0^1 \psi(t)\left[z(1-z)\right]^{\gamma}\bar{J}_\gamma(\sigma)dz+$$

$$+\frac{\gamma}{4y}\int_0^1 \psi(t)[t(1-t)]^{\gamma-1}\left\{\bar{J}_\gamma(\sigma)+\frac{4\lambda^2yz(1-z)}{\gamma(\gamma+1)}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)\right\}dz.$$

Отсюда, учитывая обозначение $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$ и легко проверяемое равенство $\bar{J}_\gamma(\sigma) - \left[\sigma^2/[4\gamma(\gamma+1)]\right]\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma) = \bar{J}_{\gamma-1}(\sigma)$, получаем равенство (14).

Лемма 1 доказана.

3. Построение общего решения уравнения (5) при $\alpha \leq 1$. Очевидно, что представление общего решения уравнения (5) существенно зависит от местонахождения параметра α на числовой оси. Если число $\alpha \in (-\infty, 1)$, то оно имеет один из следующих видов: $\alpha = -n$, $\alpha = -n + 1/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\alpha = -n + \alpha_0$, $\alpha = 2 - n - \alpha_0$, где $n \in N$, $\alpha_0 \in (1/2, 1)$. Числа, имеющие последних два вида, можно объединить в одно: $\alpha = 1-(-1)^m - n + (-1)^m \alpha_0$, где $m = \overline{0, 1}$, а $n = 0, 1, 2, \ldots$ при $m = 0$ и $n = 1, 2, \ldots$ при $m = 1$.

Теперь, полагая $\alpha < 1$, переходим к построению общего решения уравнения (5).

Прежде всего отметим, что из формул (3.7) и (3.23) работы [16] и формулы (36) работы [17, с. 137], которые представляют собой общие решения уравнения $u_{xx} - u_{ss} - (2\beta/s)\, u_s - \lambda^2 u = 0$, $s > 0$ при $\beta > 0$, $\beta = 1/2$ и $\beta = 0$ соответственно, следует, что общие решения уравнения (5) при $\alpha = \alpha_0 \in (1/2, 1)$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/2$ имеют вид

$$u_{\alpha_0}(x, y) = \int\limits_0^1 \frac{\psi_0(t) \bar{J}_{\beta_0 - 1}(\sigma)}{\left[z(1-z)\right]^{1-\beta_0}} dz + (-y)^{1-\alpha_0} \int\limits_0^1 \frac{\varphi_0(t) \bar{J}_{-\beta_0}(\sigma)}{\left[z(1-z)\right]^{\beta_0}} dz, \tag{19}$$

$$u_1(x, y) = \int\limits_0^1 \frac{\psi_0(t)}{\sqrt{z(1-z)}} \Bigg\{ \ln\left[\sqrt{-y} z(1-z)\right] \bar{J}_{-1/2}(\sigma) -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\sigma/2)^{2l}}{l!\, (1/2)_l} \sum_{j=1}^{l} \frac{2}{2j-1} \Bigg\} dz + \int\limits_0^1 \frac{\varphi_0(t) \bar{J}_{-1/2}(\sigma)}{\sqrt{z(1-z)}} dz, \tag{20}$$

$$u_{1/2}(x, y) = \sqrt{-y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{-y} \int\limits_0^1 \psi_0(t) J_0(\sigma) dz + \int\limits_0^1 \varphi_0(t) J_0(\sigma) dz \right], \tag{21}$$

где $\beta_0 = \alpha_0 - 1/2$, $t = x + 2\sqrt{-y}(2z-1)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, а $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ — произвольные функции из класса C^2 в (19) и (20), а в (21) $\varphi_0(t) \in C^2$, $\psi_0(t) \in C^3$.

1. Пусть $\alpha = 1 - (-1)^m - n + (-1)^m \alpha_0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ при $m = 0$ и $n \in N$ при $m = 1$, а $\alpha_0 \in (1/2, 1)$. Для построения общего решения уравнения (5) в этом случае используем функции (19) и предположим, что $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ — достаточно гладкие функции.

Пусть $m = 0$. Тогда $\alpha = -n + \alpha_0 \in (1/2 - n, 1 - n)$, $n \in N$. Если учесть это, то общее решение уравнения (5), согласно равенству (11) и формуле (19), определяется равенством

$$u(x, y) = (-y)^{1-\alpha_0+n} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[(-y)^{\alpha_0 - 1} u_{\alpha_0}\right] = (-y)^{1-a_0+n} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[(-y)^{\alpha_0-1} v_1 + v_2\right], \tag{22}$$

где

$$v_1 = \int\limits_0^1 \psi_0(t) \left[z(1-z)\right]^{\beta_0 - 1} \bar{J}_{\beta_0-1}(\sigma) dz, \qquad v_2 = \int\limits_0^1 \varphi_0(t) \left[z(1-z)\right]^{-\beta_0} \bar{J}_{-\beta_0}(\sigma) dz.$$

С помощью формулы (13) легко убедиться, что

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} v_1 = \frac{4^k}{(\beta_0)_k} \int\limits_0^1 \Psi_k\left(\psi_0, \lambda\right) \left[z(1-z)\right]^{k+\beta_0-1} \bar{J}_{k+\beta_0-1}(\sigma) dz, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}v_2 = \frac{4^n}{(1-\beta_0)_n}\int\limits_0^1 \Psi_n\left(\varphi_0,\lambda\right)\left[z(1-z)\right]^{n-\beta_0}\bar{J}_{n-\beta_0}(\sigma)dz, \tag{24}$$

где $(a)_k$ — символ Похгаммера, т. е. $(a)_0 = 0$ и $(a)_k = a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+k-1) = \Gamma\,(a+k)\,/\Gamma\,(a)$ при $k\in N$, $\Psi_k\left(\varphi,\lambda\right) = \left(\lambda^2 - d^2/dt^2\right)^k\varphi(t)$, $k=0,1,2,\ldots$.

Далее, применяя формулу Лейбница и учитывая равенство (23), находим

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[(-y)^{\alpha_0-1}v_1\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(1-\alpha_0)_{n-k}(-y)^{\alpha_0-1-n+k}\frac{\partial^k}{\partial y^k}v_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(1-\alpha_0)_{n-k}(-y)^{\alpha_0-1-n+k}\frac{4^k}{(\beta_0)_k}\int\limits_0^1 \Psi_k\left(\psi_0,\lambda\right)\left[z(1-z)\right]^{k+\beta_0-1}\bar{J}_{k+\beta_0-1}(\sigma)dz, \tag{25}$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент.

Введя обозначение $\beta = \alpha - 1/2 = -n + \beta_0$, нетрудно убедиться, что $(1-\alpha_0)_{n-k} = (-1)^k\Gamma\left[1/2-\beta\right]/\left\{\Gamma\left[1/2-\beta_0\right](\beta+1/2)_k\right\}$. Подставляя это значение $(1-\alpha_0)_{n-k}$ в (25), а (24) и (25) в равенство (22) и вводя обозначения

$$\left[4^n/(1-\beta_0)_n\right]\Psi_n\left(\varphi_0,\lambda\right) = \varphi(t), \qquad \left\{\Gamma\left[1/2-\beta\right]/\Gamma\left[1/2-\beta_0\right]\right\}\psi_0(t) = \psi(t),$$

получаем представление общего решения уравнения (5):

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(4y)^k C_n^k}{(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k}\int\limits_0^1 \Psi_k(\psi,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{n+k+\beta-1}\bar{J}_{n+k+\beta-1}(\sigma)dz+$$

$$+(-y)^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi(t)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)dz. \tag{26}$$

Пусть теперь $m=1$. Тогда $\alpha = 2-n-\alpha_0 \in (1-n, 3/2-n)$, $n\in N$. Если учесть это, то общее решение уравнения (5), согласно равенству (12) и формуле (19), определяется формулой

$$u(x,y) = (-y)^{\alpha_0+n-1}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[v_1(x,y) + (-y)^{1-\alpha_0}v_2(x,y)\right].$$

Отсюда, применяя метод, использованный в случае $m=0$, также получаем формулу (26), только в этом случае $\beta = \alpha - (1/2) = 1 - n - \beta_0$,

$$\varphi(t) = \left[4^n/(\beta_0)_n\right]\Psi_n\left(\psi_0,\lambda\right), \qquad \psi(t) = \left\{\Gamma\left[1/2-\beta\right]/\Gamma\left(\beta_0-1/2\right)\right\}\varphi_0(t).$$

2. Пусть $\alpha = -n+1/2$, $n = 0,1,2,\ldots$. В этом случае воспользуемся формулой (21). Предполагая, что $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ — достаточно гладкие функции, и полагая в формуле (11) $\alpha = 1/2$, применяем полученную формулу к равенству (21):

$$u(x,y) = (-y)^{n+1/2}\left(\partial^n/\partial y^n\right)\left[(-y)^{-1/2}u_{1/2}(x,y)\right].$$

Теперь, используя формулу Лейбница и равенство (13), после некоторых преобразований получаем представление общего решения уравнения (5) при $\alpha = -n + 1/2$:

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (4y)^k}{k!(-n+1/2)_k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\psi,\lambda)\big[z(1-z)\big]^k \bar{J}_k(\sigma)dz+$$

$$+(-y)^{n+1/2} \int\limits_0^1 \varphi(t)\big[z(1-z)\big]^n \bar{J}_n(\sigma)dz, \qquad (27)$$

где $\varphi(t) = (4^n/n!)\,\Psi(\varphi_0,\lambda),\ \psi(t) = -\left[\Gamma\left(n+1/2\right)/2\sqrt{\pi}\right]\psi_0(t)$.

3. Пусть $\alpha = -n,\ n = 0,1,2,\ldots$. Общее решение уравнения (5) в этом случае можно получить из общего решения уравнения $L_{\alpha_0-n-1,\lambda}(u) = 0$, которое в силу (26) имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(\beta+1/2)_k\,(\beta+n+1)_k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\psi,\lambda)[z(1-z)]^{n+k+\beta} \bar{J}_{n+k+\beta}(\sigma)dz+$$

$$+(-y)^{n+2-\alpha_0} \int\limits_0^1 \varphi(t)\big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)dz, \qquad (28)$$

где $\beta = \alpha_0 - n - 3/2,\ \alpha_0 \in (1/2,1)$.

Поскольку $\alpha_0 \in (1/2,1)$ и $\varphi(t)$ — произвольная функция, то, полагая $\alpha_0 = 1-\varepsilon,\ \varphi(t) = \omega(t) - \Big[(-4)^{n+1}\Psi_{n+1}(\psi,\lambda)/(\beta+1/2)_{n+1}(\beta+n+1)_{n+1}\Big]$ и учитывая равенства $\beta = \alpha_0 - n - 3/2,\ (-n-\varepsilon)_{n+1} = -\varepsilon(-n-\varepsilon)_n$, решение (28) можно записать в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(-n-\varepsilon)_k(1/2-\varepsilon)_k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\psi,\lambda)[z(1-z)]^{k-\varepsilon-1/2} \bar{J}_{k-\varepsilon-1/2}(\sigma)dz+$$

$$+\frac{(4y)^{n+1}}{(-n-\varepsilon)_n(1/2-\varepsilon)_{n+1}} \int\limits_0^1 \Psi_{n+1}(\psi,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{n+1/2} G_\varepsilon\left(z,y,\lambda\right)dz+$$

$$+(-y)^{n+1+\varepsilon} \int\limits_0^1 \omega(t)\big[z(1-z)\big]^{n+\varepsilon+1/2} \bar{J}_{n+\varepsilon+1/2}(\sigma)dz, \qquad (29)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, $\omega(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция, а

$$G_\varepsilon^\lambda\left(z,y\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left\{[(-y)z(1-z)]^\varepsilon \bar{J}_{n+\varepsilon+1/2}(\sigma) - [z(1-z)]^{-\varepsilon}\bar{J}_{n-\varepsilon+1/2}(\sigma)\right\}.$$

Очевидно, что выражение $G_\varepsilon^\lambda\left(z,y\right)$ при $\varepsilon \to 0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, применим правило Лопиталя. Тогда, принимая во внимание равенства

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a, \quad a > 0; \quad \frac{\Gamma'(m+a+1)}{\Gamma(m+a+1)} - \frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a+j},$$

находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon^\lambda(z,y) = 2\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{n+1/2}(\sigma) -$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(n+3/2)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{n+j+1/2}. \tag{30}$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в формуле (29) и учитывая равенство (30), получаем представление общего решения уравнения $L_{-n,\lambda}(u) = 0$:

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(-n)_k(1/2)_k}\int_0^1 \Psi_k(\psi,\lambda)\left[z(1-z)\right]^{k-1/2}\bar{J}_{k-(1/2)}(\sigma)dz +$$

$$+\frac{2(4y)^{n+1}}{(-n)_n(1/2)_{n+1}}\int_0^1 \Psi_{n+1}(\psi,\lambda)[z(1-z)]^{n+1/2}\left\{\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{n+1/2}(\sigma) -\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(n+3/2)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n+j+1/2}\right\}dz +$$

$$+(-y)^{n+1}\int_0^1 \omega(t)\left[z(1-z)\right]^{n+1/2}\bar{J}_{n+1/2}(\sigma)dz. \tag{31}$$

Ответ на вопрос о том, при каких условиях на произвольные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ функция $u(x,y)$, определяемая формулами (26), (27) и (31), действительно удовлетворяет уравнению (5), содержится в теоремах, доказываемых в следующем пункте.

4. Видоизмененная задача Коши и обоснование решения. 1. Пусть $\alpha = 1-(-1)^m - n + (-1)^m\alpha_0$, где $n = 0,1,2,\ldots$ при $m = 0$ и $n \in N$ при $m = 1$, а $\alpha_0 \in (1/2,1)$. В этом случае будет однозначно разрешимой видоизмененная задача Коши об определении функции $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющей в области D уравнению (5) и начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [0,1]; \quad \lim_{y\to -0}(-y)^\alpha(\partial/\partial y)[u - A_\alpha^-(\tau,\lambda)] = \nu(x), \quad x \in (0,1), \tag{32}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, а $A_\alpha^-(\tau,\lambda)$ — оператор вида

$$A_\alpha^-(\tau,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_1(4y)^k C_n^k}{(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)\left[z(1-z)\right]^{k+n+\beta-1}\bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz. \tag{33}$$

Для нахождения решения этой задачи воспользуемся представлением (26) общего решения уравнения (5). На основании условия (32) из формулы (26) следует, что $\psi(x) = \gamma_1\tau(x)$, $\varphi(x) = -\gamma_2\nu(x)$, где $\gamma_1 = \Gamma(2n+2\beta)\Gamma^{-2}(n+\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)(1-\alpha)^{-1}\Gamma^{-2}(1-\beta)$. Подставляя найденные $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ в (26), получаем решение задачи $\{(5),(32)\}$ в виде

$$u(x,y) = A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) - \gamma_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu(t)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz. \tag{34}$$

Теорема 1. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+1)}[0,\,1]$ *и* $\nu(x)\in C^2[0,1]$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой* (34), *является единственным решением задачи* $\{(5),(32)\}$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция, определяемая формулой (34), удовлетворяет уравнению (5). С этой целью функцию (34) запишем в виде

$$u(x,y) = \gamma_1 v_3(x,y) - \gamma_2 v_4(x,y), \tag{35}$$

где

$$v_3(x,y) = \sum_{k=0}^{n} y^k A_{n,k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1}\bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz,$$

$$v_4(x,y) = (-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu(t)\big[z(1-z)\big]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)dz, \qquad A_{n,k} = 4^k C_n^k[(\beta+1/2)_k\,(\beta+n)_k]^{-1}.$$

Сначала рассмотрим функцию $v_3(x,y)$ и вычислим ее производные. Согласно формуле (13) имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}v_3 = \sum_{k=0}^{n} k\,y^{k-1}A_{n,k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1}\bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{4y^k A_{n,k}}{k+n+\beta}\int_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta}\bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma)dz.$$

Для вычисления $\big(\partial^2/\partial y^2\big)v_3(x,y)$ используем сначала формулу (13), а затем (14):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_3 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)y^{k-2}A_{n,k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1}\bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}\frac{4k\,y^{k-1}A_{n,k}}{k+n+\beta}\int_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta}\bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma)dz+$$

$$+\sum_{k=0}^{n} y^{k-1}A_{n,k}\int_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1}\bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz-$$

$$-2\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+2k+2n+2\beta)\,y^{k-1}A_{n,k}}{k+n+\beta}\int_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta}\bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma)dz.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_3 = \sum_{k=0}^{n} y^k A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau'', \lambda)[z(1-z)]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz.$$

Подставляя найденные $v_{3xx},\ v_{3y},\ v_{3yy}$ в уравнение (5), получаем

$$L_{\alpha,\lambda}(v_3) \equiv v_{3xx} + y\, v_{3yy} + \alpha\, v_{3y} - \lambda^2 v_3 = \sum_{j=1}^{8} f_j,$$

где

$$f_1 = \sum_{k=0}^{n} y^k A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau'', \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz,$$

$$f_2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) y^{k-1} A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz,$$

$$f_3 = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{4k\, y^k A_{n,k}}{k+n+\beta} \int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta} \bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma) dz,$$

$$f_4 = \sum_{k=0}^{n} y^k A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz,$$

$$f_5 = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{(1+2k+2n+2\beta)\, y^k A_{n,k}}{k+n+\beta} \int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta} \bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma) dz,$$

$$f_6 = \sum_{k=0}^{n} k\,(\beta+1/2) y^{k-1} A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz,$$

$$f_7 = \sum_{k=0}^{n} \frac{4(\beta+1/2) y^k A_{n,k}}{k+n+\beta} \int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta} \bar{J}_{k+n+\beta}(\sigma) dz,$$

$$f_8 = -\lambda^2 \sum_{k=0}^{n} y^k A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz.$$

Используя легко проверяемое равенство $\Psi_{k+1}(\tau,\lambda) = \lambda^2 \Psi_k(\tau,\lambda) - \Psi_k(\tau'',\lambda)$, нетрудно убедиться, что $f_1 + f_4 + f_8 = 0$. Выполняя несложные вычисления, имеем

$$f_2 + f_6 = \sum_{k=0}^{n} k\,(k+\beta-1/2) y^{k-1} A_{n,k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)\big[z(1-z)\big]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz =$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,(k+\beta+1/2)y^k A_{n,k+1}\int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{\,k+n+\beta}\,\bar{J}_{k+n+\beta}\,(\sigma)\,dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4(n-k)y^k A_{n,k}}{k+n+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{\,k+n+\beta}\,\bar{J}_{k+n+\beta}\,(\sigma)dz,$$

$$f_3+f_5+f_7=\sum_{k=0}^{n}\frac{4(k-n)y^k A_{n,k}}{k+n+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_{k+1}(\tau,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{\,k+n+\beta}\,\bar{J}_{k+n+\beta}\,(\sigma)dz.$$

Из полученных равенств следует, что $\sum_{j=1}^{8} f_j=0.$

Теперь докажем, что функция $v_4(x,y)$ также удовлетворяет уравнению (5). Для этого вычислим нужные производные:

$$\frac{\partial}{\partial y}v_4=-(1-\alpha)(-y)^{-\alpha}\int\limits_0^1 \nu(t)\big[z(1-z)\big]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz+$$

$$+\frac{4(-y)^{1-\alpha}}{1-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{1-\beta}\bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\,dz,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_4=-\alpha(1-\alpha)(-y)^{-\alpha-1}\int\limits_0^1 \nu(t)\big[z(1-z)\big]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz-$$

$$-\frac{8(1-\alpha)(-y)^{-\alpha}}{1-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{1-\beta}\bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\,dz-$$

$$-(-y)^{-\alpha}\int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz+$$

$$+\frac{2(3-2\beta)(-y)^{-\alpha}}{1-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,)\big[z(1-z)\big]^{1-\beta}\bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\,dz,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_4=(-y)^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \nu''(t)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz.$$

Подставляя найденные $v_{4xx},\ v_{4y},\ v_{4yy}$ в уравнение (5), находим

$$L_{\alpha,\lambda}\,(v_4)\equiv v_{4xx}+y\,v_{4yy}+\alpha\,v_{4y}-\lambda^2\,v_4=\sum_{j=1}^{8}g_j.$$

Здесь

$$g_1 = (-y)^{1-\alpha} \int\limits_0^1 \nu''(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_2 = \alpha(1-\alpha)(-y)^{-\alpha} \int\limits_0^1 \nu(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_3 = \frac{8[1/2-\beta](-y)^{1-\alpha}}{1-\beta} \int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,) \big[z(1-z)\big]^{1-\beta} \bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_4 = (-y)^{1-\alpha} \int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_5 = -\frac{2(3-2\beta)(-y)^{1-\alpha}}{1-\beta} \int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,) \big[z(1-z)\big]^{1-\beta} \bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_6 = -\alpha(1-\alpha)(-y)^{-\alpha} \int\limits_0^1 \nu(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_7 = \frac{4(\beta+1/2)(-y)^{1-\alpha}}{1-\beta} \int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,) \big[z(1-z)\big]^{1-\beta} \bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\, dz,$$

$$g_8 = -\lambda^2(-y)^{1-\alpha} \int\limits_0^1 \nu(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz.$$

Используя равенство $\Psi_1(\nu,\lambda\,) = \lambda^2\nu(t) - \nu''(t)$, легко убедиться, что

$$g_1 + g_4 + g_8 = (-y)^{1-\alpha} \left\{ \int\limits_0^1 \nu''(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda\,) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz - \lambda^2 \int\limits_0^1 \nu(t) \big[z(1-z)\big]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\, dz \right\} = 0.$$

Очевидно, что $g_2 + g_6 = 0,\ g_3 + g_5 + g_7 = 0$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{8} g_j = 0$.

Из доказанного выше в силу равенства (35) следует, что функция $u(x,y)$, определяемая равенством (34), удовлетворяет уравнению (5).

Теперь проверим удовлетворение функции (34) первому из условий (32). Для этого, согласно равенству (35), вычислим $u(x,0) = \gamma_1 v_3(x,0) - \gamma_2 v_4(x,0)$. Легко видеть, что $v_3(x,0) = (1/\gamma_1)\tau(x),\ v_4(x,0) = 0,\ x \in [0,1]$, следовательно, $u(x,0) = \tau(x),\ x \in [0,1]$.

Проверим выполнение второго из условий (32). Для этого, принимая во внимание равенство $u(x,y) - A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) = -\gamma_2 v_4(x,y),$ вычисляем следующий предел:

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}(\partial/\partial y)[u - A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)] = -\gamma_2 \lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha} v_{4y}(x,y) =$$

$$= (1-\alpha)\gamma_2 \lim_{y\to -0}\int\limits_0^1 \frac{\nu(t)\bar{J}_{-\beta}(\sigma)}{\big[z(1-z)\big]^{\beta}}\,dz +$$

$$+\lim_{y\to -0}\frac{4y\gamma_2}{1-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_1(\nu,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{1-\beta}\bar{J}_{1-\beta}(\sigma)\,dz = \nu(x), \quad x\in(0,1).$$

Единственность решения (34) следует из процесса его получения.

Теорема 1 доказана.

2. Пусть $\alpha = -n + (1/2),\ n = 0,1,2,\ldots.$ В этом случае будет однозначно разрешимой видоизмененная задача Коши с начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x\in[0,1],$$
$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-n+1/2}(\partial/\partial y)\big[u(x,y) - A_{-n+1/2}^{-}(\tau,\lambda)\big] = \nu(x), \quad x\in(0,1), \tag{36}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, а $A_{-n+1/2}^{-}(\tau,\lambda)$ — оператор вида

$$A_{-n+1/2}^{-}(\tau,\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{C_{n+1}^{k}(4y)^k}{k!(-n+1/2)_k}\int\limits_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^k\bar{J}_k(\sigma)dz. \tag{37}$$

В этом случае воспользуемся представлением (27) общего решения уравнения $L_{-n+1/2,\lambda}(u) = 0.$ Тогда, согласно условию (36), из (27) следует, что

$$\psi(x) = \tau(x), \qquad \varphi(x) = -\gamma_3\nu(x), \qquad \gamma_3 = 2\,(2n)!/(n!)^2.$$

Подставляя эти значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в формулу (27), получаем решение задачи $\{(5),(36)\}$ при $\alpha = -n + 1/2$:

$$u(x,y) = A_{-n+1/2}^{-}(\tau,\lambda) - \gamma_3(-y)^{n+1/2}\int\limits_0^1 \nu(t)\big[z(1-z)\big]^n\bar{J}_n(\sigma)dz. \tag{38}$$

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+2)}[0,1]$ *и* $\nu(x)\in C^2[0,1],$ *то функция* $u(x,y),$ *определяемая формулой* (38), *является единственным решением уравнения* $L_{-n+1/2,\lambda}(u) = 0,$ *удовлетворяющим условиям* (36).

3. Пусть $\alpha = -n,\ n = 0,1,2,\ldots.$ В этом случае будет однозначно разрешимой видоизмененная задача Коши с начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x\in[0,1]; \quad \lim_{y\to -0}(-y)^{-n}\frac{\partial}{\partial y}\big[u(x,y) - A_{-n}^{-}(\tau,\lambda)\big] = \nu(x), \quad x\in(0,1), \tag{39}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, а $A^{-}_{-n}(\tau,\lambda)$ — оператор вида

$$A^{-}_{-n}(\tau,\lambda)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(4y)^k C^k_{n+1}}{(-n)_k(1/2)_k}\int\limits_0^1\Psi_k(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{k-1/2}\bar{J}_{k-1/2}(\sigma)dz+$$

$$+\frac{2(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n(1/2)_{n+1}}\int\limits_0^1\Psi_{n+1}(\tau,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{n+1/2}\Bigg\{\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{n+1/2}(\sigma)-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(n+3/2)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n+j+1/2}\Bigg\}dz. \tag{40}$$

При этом воспользуемся представлением (31) общего решения уравнения $L_{-n,\lambda}(u)=0$. В силу начальных условий (39) из (31) следует, что

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\tau(x),\qquad \omega(x)=-\gamma_4\nu(x),\qquad \gamma_4=\Gamma(2n+3)/\left[(n+1)\Gamma^2(n+3/2)\right].$$

Подставляя эти значения функций $\psi(x)$ и $\omega(x)$ в (31), получаем решение задачи $\{(5),(39)\}$ при $\alpha=-n$:

$$u(x,y)=A^{-}_{n}(\tau,\lambda)-\gamma_4(-y)^{n+1}\int\limits_0^1\nu(t)\big[z(1-z)\big]^{n+1/2}\bar{J}_{n+1/2}(\sigma)dz. \tag{41}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+1)}[0,1]$ *и* $\nu(x)\in C^2[0,1]$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой* (41), *является единственным решением уравнения* $L_{-n,\lambda}(u)=0$, *удовлетворяющим условиям* (39).

Доказательство. Введем обозначения

$$v_5(x,y)=A^{-}_{-n}(\tau,\lambda),\qquad v_6(x,y)=(-y)^{n+1}\int\limits_0^1\nu(t)\big[z(1-z)\big]^{n+1/2}\bar{J}_{n+1/2}(\sigma)dz,$$

где $A^{-}_{-n}(\tau,\lambda)$ — функция, определяемая равенством (40).

Если в функции $v_4(x,y)$, введенной в доказательстве теоремы 1, положим $\alpha=-n$ и учтем равенство $\beta=\alpha-1/2$, то получим функцию $v_6(x,y)$. Тогда, согласно теореме 1, $v_6(x,y)$ удовлетворяет уравнению $L_{-n,\lambda}(u)=0$.

Утверждение о том, что функция $v_5(x,y)$ удовлетворяет уравнению $L_{-n,\lambda}(u)=0$, доказывается непосредственной проверкой. При этом используется следующая лемма.

Лемма 2. *Если* $\psi(z)\in C^2[0,1]$ *и* $\gamma>-1$, *то справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma}\Bigg\{\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{\gamma}(\sigma)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma+j}\Bigg\}dz=$$

$$=\frac{1}{2y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma}\bar{J}_{\gamma}(\sigma)dz+$$

$$+\frac{4}{(\gamma+1)^2}\int\limits_0^1\Psi_1(\psi,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{\gamma+1}\left\{(\gamma+1)\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]-1\right\}\bar{J}_{\gamma+1}(\sigma)dz-$$

$$-\frac{4}{\gamma+1}\int\limits_0^1\Psi_1(\psi,\lambda)\big[z(1-z)\big]^{\gamma+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+2)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma+1+j}\,dz,$$

а если $\psi(z)\in C[0,1]$ *и* $\gamma>0$, *то имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma}\left\{\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{\gamma}(\sigma)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma+j}\right\}dz=$$

$$=\frac{1}{4y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma-1}\left\{\gamma\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]+1\right\}\bar{J}_{\gamma-1}(\sigma)dz-$$

$$-\frac{1}{2y}\int\limits_0^1\psi(t)[z(1-z)]^{\gamma}\left\{(1+2\gamma)\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]+1\right\}\bar{J}_{\gamma}(\sigma)dz-$$

$$-\frac{\gamma}{4y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma-1+j}dz-$$

$$-\frac{1+2\gamma}{2y}\int\limits_0^1\psi(t)\big[z(1-z)\big]^{\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma+j}dz.$$

Из изложенного выше следует утверждение теоремы 3.

4. Пусть $\alpha=1$. Тогда, как видно из представления (20) общего решения уравнения (5), вблизи окрестности линии $y=0$ его решение может быть и неограниченным, и ограниченным. В случае, когда ищется неограниченное при $y\to 0$ решение уравнения (5), будет однозначно разрешимой видоизмененная задача Коши с условиями

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln\sqrt{-y}}=\tau(x),\quad x\in[0,1]\,,\tag{42}$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)\ln^2\sqrt{-y}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{u(x,y)-A_1^-(\tau,\lambda)}{\ln\sqrt{-y}}\right\}=\nu(x),\quad x\in(0,1),\tag{43}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, а

$$A_1^-(\tau,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\tau(t)}{\sqrt{z(1-z)}}\left\{\ln\left[\sqrt{-y}z(1-z)\right]\bar{J}_{-1/2}(\sigma)-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l\sigma^{2l}}{(2l)!}\sum_{j=1}^{l}\frac{2}{2j-1}\right\}dz.$$

Удовлетворяя функцию (20) условиям (42) и (43), легко убедиться, что решение этой задачи имеет вид

$$u(x,y) = A_1^-(\tau,\lambda) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\nu(t)\bar{J}_{-1/2}(\sigma)}{\sqrt{z(1-z)}}dz. \tag{44}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $\tau(x),\ \nu(x) \in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой* (44), *является единственным решением уравнения* $L_{1,\lambda}(u)=0$, *удовлетворяющим начальным условиям* (42), (43).

Если требуется ограниченное при $y\to 0$ решение уравнения $L_{1,\lambda}(u)=0$, то будет правильно поставленной задача с одним начальным условием вида

$$u(x,0) = T(x), \quad x\in[0,1], \tag{45}$$

где $T(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ — заданная функция. Из (20), согласно (45), следует, что решение этой задачи определяется формулой

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{T(t)\bar{J}_{-1/2}(\sigma)}{\sqrt{z(1-z)}}dz.$$

5. Пусть $\alpha>1$. В этом случае общее решение уравнения (5), согласно (8), определяется равенством

$$u_\alpha(x,y) = (-y)^{1-\alpha}u_{2-\alpha}(x,y), \quad 2-\alpha<1, \tag{46}$$

где $u_{2-\alpha}(x,y)$ — функция, определяемая одним из равенств (26), (27), (31), в которых α заменено на $2-\alpha$. Подставляя выражения для функции $u_{2-\alpha}(x,y)$ в равенство (46), легко убедиться, что решение уравнения (5) при $\alpha>1$ может оказаться и неограниченным, и ограниченным вблизи линии $y=0$. В случае, когда ищется неограниченное при $y\to 0$ решение, однозначно разрешимой будет задача с начальными условиями

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha-1}u_\alpha(x,y) = \tau(x), \quad x\in[0,1],$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{2-\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\alpha-1}u_\alpha(x,y) - \tilde{A}_\alpha(\tau,\lambda)\right] = \nu(x), \quad x\in(0,1),$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, а $\tilde{A}_\alpha(\tau,\lambda)$ — функция, определяемая одним из равенств (33), (37), (40), в которых α заменено на $2-\alpha$. В случае, когда ищется ограниченное при $y\to 0$ решение, достаточно будет задать одно начальное условие вида (45).

Отметим, что единственность решения начальных задач, изученных в этом пункте, можно доказать и методом, примененным в работе [9].

Литература

1. Л. Берс, *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).

2. Ф. И. Франкль, *О задачах Чаплыгина для смешанных до - и сверхзвуковых течений*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **9**, № 2, 121 – 142 (1945).
3. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, Москва (1959).
4. F. Natterer, *The mathematics of Computerized Tomography*, SIAM (1986).
5. А. В. Бицадзе, *Уравнение смешанного типа*, Изд-во АН СССР, Москва (1959).
6. И. Л. Кароль, *К теории уравнений смешанного типа,* Докл. АН СССР, **88**, № 3, 397 – 400 (1953).
7. М. М. Смирнов, *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Вышэйш. шк., Минск (1977).
8. Ф. Ф. Евдокимов, *Задача Коши для уравнения* $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$, Дифференц. уравнения, Вып. 12, 45 – 50 (1978).
9. С. А. Терсенов, *К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа*, Сиб. мат. журн., **2**, № 6, 913 – 935 (1961).
10. С. А. Терсенов, *О задаче Коши с данными на линии вырождения типа для гиперболического уравнения*, Дифференц. уравнения, **2**, № 4, 125 – 130 (1966).
11. А. В. Бицадзе, *К теории одного класса уравнений смешанного типа*, Некоторые проблемы математики и механики, Ленинград (1970), с. 112 – 119.
12. С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*, Наука, Новосибирск (1973).
13. Ю. М. Крикунов, *Видоизмененная задача Трикоми для уравнения* $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$, Изв. вузов. Математика, № 9(208), 21 – 28 (1979).
14. Н. К. Мамадалиев, *О представлении решения видоизменной задачи Коши*, Сиб. мат. журн., **41**, № 5, 1087 – 1097 (2000).
15. В. А. Елеев, *О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения*, Дифференц. уравнения, **12**, № 1, 46 – 58 (1976).
16. М. Б. Капилевич, *Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа*, Мат. сб., **30(72)**, № 1, 11 – 38 (1952).
17. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).

Получено 26.05.17