

УДК 519.177

**В. М. Пивоварчик** (Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Ушинського, Одеса)

## ПРО МІНІМАЛЬНУ КІЛЬКІСТЬ РІЗНИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ У ЗАДАЧІ НА ДЕРЕВІ ЗІ СТІЛЬТЬЄСІВСЬКИХ СТРУН

We consider spectral problems related to small vibrations of a tree formed by Stieltjes strings. It is shown that the minimum number of distinct eigenvalues of these problem is equal to the maximal length (measured as the number of point masses) of paths in this tree.

Розглянуто спектральні задачі, пов'язані з малими коливаннями дерева зі стільтьєсівських струн. Показано, що мінімальна кількість різних власних значень такої задачі дорівнює максимальній довжині (виміряній у кількості точкових мас) ланцюгів у цьому дереві.

**1. Вступ.** Питання про мінімальну кількість різних власних значень матриці, граф якої є заданим, розглядалось у багатьох публікаціях (див., наприклад, [1, 2, 5, 13, 14]).

Нехай  $A \in S(T)$  — матриця з невід'ємними елементами (див. [5]), де  $T$  — дерево з  $n$  вершинами. Якщо  $A = (a_{ij})$  — ермітова  $(n \times n)$ -матриця, то граф  $G = G(A)$  матриці  $A$  визначається недиагональними елементами матриці  $A$ , причому у  $G(A)$  вершини  $i$  та  $j$  сполучені ребром тоді й тільки тоді, коли  $a_{ij} \neq 0$ . З іншого боку, якщо  $G$  — граф, позначимо через  $H(G) = \{A = A^* : G(A) = G\}$  множину ермітових матриць, графом яких є  $G$ . Таким чином, якщо граф є деревом  $T$ , то  $g(T) \geq d(T)$ , де  $g(T)$  — кількість різних власних значень матриці  $H(T)$ , а  $d(T)$  — діаметр дерева  $T$ , тобто довжина (виміряна у кількості вершин) ланцюга у дереві (див. теорему 2 у [5]). Цей результат можна застосувати до задачі, породженої рівняннями стільтьєсівських струн на областях, що є деревами, за умови, що кожна внутрішня вершина несе на собі точкову (зосереджену) масу. У даній статті отримано аналогічний результат за припущення відсутності точкових мас у деяких (або в усіх) внутрішніх вершинах.

Різницеві рівняння другого порядку

$$\frac{w_k(t) - w_{k+1}(t)}{l_k} + \frac{w_k(t) - w_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + m_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

виникають у різних областях фізики, таких як синтез електричних ланцюгів [7, с. 129], відомий метод Кауера [3, 7], позовжні коливання точкових мас, з'єднаних пружинами [15], поперечні коливання так званих стільтьєсівських струн [9]. Нагадаємо, що стільтьєсівською струною М. Г. Крейн [9] назвав невагому нитку, яка несе на собі намистинки (точкові маси). Такі струни широко застосовуються як прості моделі у механіці [6, 8]. У випадку однієї струни обернену задачу за двома спектрами було повністю розв'язано у [9]. Зокрема, у [9] знайдено алгоритм відновлення величин мас та довжин інтервалів між ними за двома спектрами крайових задач та загальною довжиною струни, а також наведено характеристизацію спектрів. У статті [4] маси та інтервали між ними були розраховані на підставі частот коливань, отриманих з експериментів.

Коливанням графів із стільтьєсівських струн (або графів, ребра яких — точкові маси, з'єднані пружинами) присвячено багато публікацій (див. [10–12, 16–19]).

**2. Постановка спектральних задач.** Нехай  $T$  — метричне дерево з  $q$  ребрами. Позначимо через  $v_i$  вершини, через  $d(v_i)$  їхні степені, через  $e_j$  ребра, через  $l_j$  їхні довжини, через  $n_j \geq 1$  кількості точкових мас  $m_1^j, m_2^j, \dots, m_{n_j}^j$ , які ділять струну на підінтервали  $l_0^j, l_1^j, \dots, l_{n_j}^j$  ( $l_k^j > 0$  при  $j = 0, 1, n_j - 1, l_{n_j}^j \geq 0, m_k^j > 0, l_j = \sum_{k=0}^{n_j} l_k^j$ ). Випадок  $l_{n_j}^j = 0$  відповідає знаходженню маси  $m_{n_j}^j$  у внутрішній вершині. Довільно виберемо вершину в якості кореня дерева. У висячих вершинах точкових мас немає. Всі ребра напрямлені від кореня.

Корінь  $\mathbf{v}$  є початком підінтервалу довжини  $l_0^j$  на ребрі  $e_j$ , інцидентному кореню. Кожна інша вершина  $v_i$  має одне вхідне ребро  $e_j$ , яке закінчується підінтервалом довжини  $l_{n_j}^j$ , тоді як кожне вихідне ребро  $e_r$  починається у  $v_i$  з інтервалу довжини  $l_0^r$ .

Степінь входу вершини  $v_i$  позначено через  $d^+(v_i)$ , а степінь виходу — через  $d^-(v_i)$ . Очевидно,  $d^+(v_i) = 1$  для кожної вершини  $v_i \neq \mathbf{v}$  та  $d^+(\mathbf{v}) = 0$ . Для кожної висячої вершини  $v_i$ , яка не є коренем,  $d^-(v_i) = 0$ .

Будемо вважати, що дерево є розтягнутим і всі висячі вершини, крім кореня, закріплені. Ми розглядаємо два випадки: 1) корінь закріплено (задача Діріхле), 2) корінь може рухатись у напрямку, перпендикулярному до площини дерева (задача Ноймана). Дерево може коливатись у напрямку, перпендикулярному до площини рівноважного стану струн. Поперечні зміщення мас  $m_k^j$  ми позначаємо через  $w_k^j(t)$ , зміщення кореня — через  $\mathbf{w}(t)$ , де  $t$  — час.

Якщо ребро  $e_j$  є вхідним для внутрішньої вершини  $v_i$ , то зміщення вхідного кінця ребра позначимо через  $w_{n_j+1}^j(t)$ , а якщо ребро  $e_r$  — вихідне з вершини  $v_i$ , то зміщення вихідного кінця ребра позначимо через  $w_0^r(t)$ . За таких позначень коливання графа можна описати системою рівнянь

$$\frac{w_k^j(t) - w_{k+1}^j(t)}{l_k^j} + \frac{w_k^j(t) - w_{k-1}^j(t)}{l_{k-1}^j} + m_k^j \frac{\partial^2 w_k^j(t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, \tilde{n}_j, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

де  $\tilde{n}_j = n_j - 1$ , якщо  $l_{n_j}^j = 0$ , і  $\tilde{n}_j = n_j$ , якщо  $l_{n_j}^j > 0$ .

Для кожної внутрішньої вершини  $v_i$  (крім кореня) з вхідним ребром  $e_j$  та вихідними ребрами  $e_r$  ми накладаємо умови неперервності

$$w_0^r(t) = w_{n_j+1}^j(t) \quad (2)$$

для всіх  $r$ , що відповідають вихідним ребрам. Баланс сил у такій вершині  $v_i$  приводить до

$$\frac{w_{\tilde{n}_j+1}^j(t) - w_{\tilde{n}_j}^j(t)}{l_{\tilde{n}_j}^j} + \sum_r \frac{w_0^r(t) - w_1^r(t)}{l_0^r} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_{n_j}^j > 0, \\ m_{n_j}^j \frac{\partial^2 w_{n_j}^j(t)}{\partial t^2}, & \text{якщо } l_{n_j}^j = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де суму взято по індексах всіх вихідних ребер. Для ребра  $e_j$ , інцидентного висячій вершині (крім кореня), ми накладаємо умову Діріхле

$$w_{n_j+1}^j(t) = 0. \quad (4)$$

У корені ми розглядаємо умову Діріхле

$$\mathbf{w}(t) = 0, \quad \text{тобто} \quad w_0^j(t) = 0 \quad (5)$$

для всіх  $j$ , які відповідають ребрам, інцидентним із коренем. Назвемо задачу (1)–(5) задачею Діріхле на  $T$ .

Щоб отримати крайову задачу Ноймана, замінимо умову (5) узагальненою умовою Ноймана

$$w_0^j(t) = w_0^l(t) \quad (6)$$

для всіх  $j$  та  $l$ , відповідних ребрам, які інцидентні з коренем, і

$$\sum_{j=1}^{d(\mathbf{v})} \frac{w_0^j(t) - w_1^j(t)}{l_0^j} = 0. \quad (7)$$

Ми не розглядаємо випадок, коли маса знаходиться у корені.

Якщо корінь — висяча вершина, то позначаємо через  $e_1$  ребро, інцидентне з коренем. У цьому випадку умова Діріхле (5) у корені має вигляд

$$\mathbf{w}(t) = 0, \quad \text{тобто} \quad w_0^1(t) = 0, \quad (8)$$

а умова Ноймана (6), (7) у цьому випадку спрощується до вигляду

$$\mathbf{w}(t) = w_0^1(t) = w_1^1(t). \quad (9)$$

Підставляючи  $w_j^k(t) = e^{i\lambda t} u_j^k$ ,  $w_i(t) = e^{i\lambda t} u_i$  і  $\mathbf{w}(t) = e^{i\lambda t} \mathbf{u}$  у (1)–(9), отримуємо наступні спектральні задачі

**Задача Діріхле.** Для кожного ребра

$$\frac{u_k^j - u_{k+1}^j}{l_k^j} + \frac{u_k^j - u_{k-1}^j}{l_{k-1}^j} - m_k^j \lambda^2 u_k^j = 0, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, \tilde{n}_j, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Для кожної внутрішньої вершини (крім кореня) з вхідним ребром  $e_j$  та вихідними ребрами  $e_r$  маємо

$$u_{\tilde{n}_j+1}^j = u_0^r \quad (11)$$

і

$$\frac{u_{\tilde{n}_j+1}^j - u_{\tilde{n}_j}^j}{l_{\tilde{n}_j}^j} + \sum_r \frac{u_0^r - u_1^r}{l_0^r} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_{\tilde{n}_j}^j > 0, \\ -m_{\tilde{n}_j}^j \lambda^2 m_{\tilde{n}_j}^j, & \text{якщо } l_{\tilde{n}_j}^j = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для ребра  $e_j$ , інцидентного з висячою вершиною (крім кореня), маємо крайову умову Діріхле

$$u_{\tilde{n}_j+1}^j = 0. \quad (13)$$

Умова Діріхле у корені має вигляд

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{тобто} \quad u_0^j = 0 \quad (14)$$

для всіх  $j$ , що відповідають ребрам, інцидентним із коренем.

Якщо корінь — висяча вершина і  $e_1$  — ребро, інцидентне з коренем, то замість (14) у корені маємо

$$u_0^1 = 0. \quad (15)$$

**Задача Ноймана** на  $T$  складається з рівнянь (10)–(13), рівняння

$$u_0^j = u_0^l \quad (16)$$

для всіх  $j$  та  $l$ , які відповідають ребрам, інцидентним із коренем, та з рівняння

$$\sum_{j=1}^{d(v)} \frac{u_0^j - u_1^j}{l_0^j} = 0. \quad (17)$$

Якщо корінь — висяча вершина, а  $e_1$  — ребро, інцидентне з коренем, то замість (16), (17) у корені маємо

$$u_0^1 = u_1^1. \quad (18)$$

**3. Допоміжні результати.** У цьому пункті ми наведемо кілька лем, які будуть використані у пункті 4.

**Означення 1.** Раціональна функція  $f(z)$  називається неванліннівською, якщо:

- (i) ця функція аналітична у півплощинах  $\text{Im}z > 0$  та  $\text{Im}z < 0$ ;
- (ii)  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  ( $\text{Im}z \neq 0$ );
- (iii)  $\text{Im}z \text{Im}f(z) \geq 0$  при  $\text{Im}z \neq 0$ .

**Означення 2.** Раціональна неванліннівська функція  $\omega(z)$  називається  $S$ -функцією, якщо  $\omega(z) > 0$  при  $z < 0$ .

**Означення 3.** Раціональна  $S$ -функція  $\omega(z)$  називається  $S_0$ -функцією, якщо 0 не є полюсом функції  $\omega(z)$ .

Наступні леми є очевидними.

**Лема 1.** Нехай  $f$  і  $g$  — раціональні  $S_0$ -функції, тоді  $f + g$  і  $(f^{-1} + g^{-1})^{-1}$  — також  $S_0$ -функції.

**Лема 2.** Нехай  $\phi_j$  — раціональні  $S_0$ -функції з  $n_j$  коренями і  $n_j$  полюсами при  $j = 1, 2, \dots, s$ . Тоді

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^s \frac{1}{\phi_j}}$$

— раціональна  $S_0$ -функція з  $\tilde{n}$  коренями і  $\tilde{n}$  полюсами, де  $\tilde{n} \geq \max\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$ .

**Лема 3.** Нехай

$$\varphi = a_0 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2z + \dots + \frac{1}{a_{r-1} + \frac{1}{-b_rz + \frac{1}{a_r + \phi}}}}}}, \quad (19)$$

де  $a_j > 0$  при  $j = 0, 1, \dots, r-1$ ,  $a_r \geq 0$ ,  $b_j > 0$  при  $j = 1, 2, \dots, r$ , а  $\phi$  — раціональна  $S_0$ -функція з  $\hat{n}$  полюсами і  $\hat{n}$  коренями. Тоді  $\varphi$  — раціональна  $S_0$ -функція з  $\hat{n} + r$  коренями і  $\hat{n} + r$  полюсами.

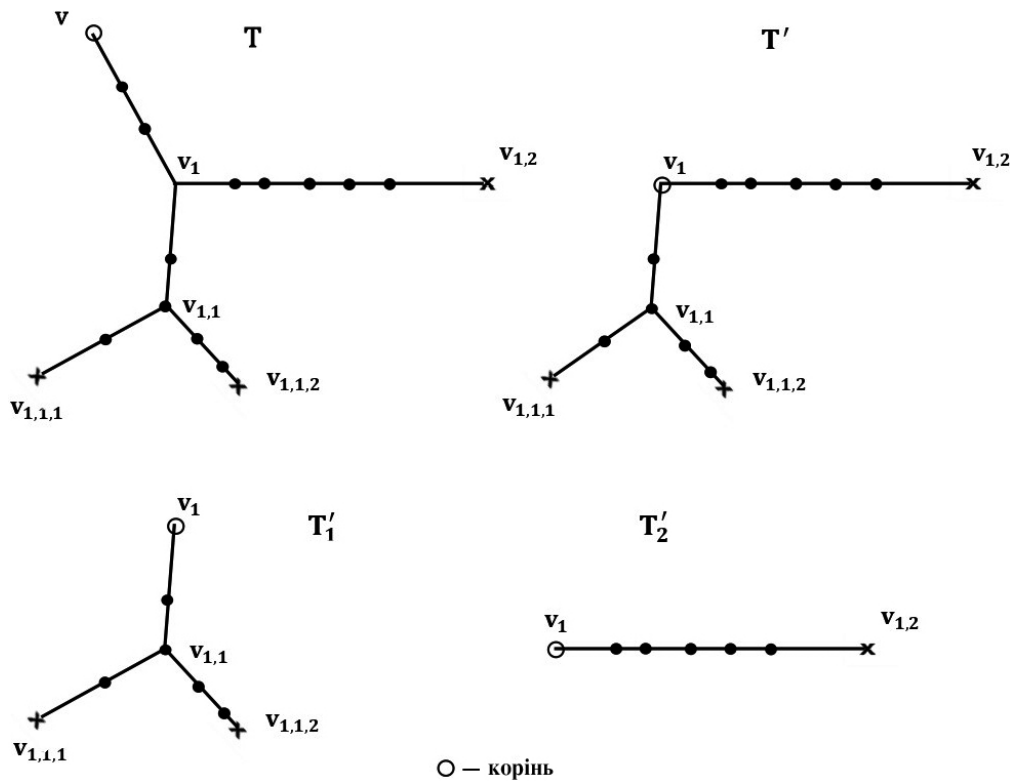
**4. Основний результат.** У цьому пункті ми розглядаємо дерево  $T$  з коренем у висячій вершині. Задача Діріхле на цьому дереві складається з рівнянь (10)–(13) і (15), тоді як задача Ноймана на цьому дереві складається з рівнянь (10)–(13) і (18).

Позначимо через  $P$  ланцюг на  $T$ , що включає найбільшу кількість точкових мас.

**Теорема.** *Кількість різних власних значень кожної з задач (10)–(13), (15) і (10)–(13), (18) на дереві, кожне з ребер якого несе на собі маси, не менша, ніж кількість точкових мас на ланцюгу  $P$  цього дерева.*

**Доведення.** По-перше, зауважимо, що внутрішні вершини степеня 2 не впливають на результат, і ми, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що вони відсутні. Очевидно, ланцюг  $P$  починається і закінчується у висячих вершинах. Позначимо початкову вершину через  $v_0$  і виберемо її в якості кореня дерева. Нумерація інших вершин є довільною. Спрямуємо ребра від кореня. Позначимо ребро, що входить у вершину  $v_i$ , через  $e_i$  для всіх  $i$ . Тоді  $P: v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_{s_2} \rightarrow v_{s_3} \rightarrow \dots \rightarrow v_{s_{r-1}} \rightarrow v_{s_r}$ . Видаляючи  $v_0$  та  $e_1$ , отримуємо нове дерево  $T'$  з коренем у  $v_1$ .

Оскільки  $d(v_1) > 2$ , можемо розділити дерево  $T'$  на піддерева  $T'_1, T'_2, \dots, T'_{d(v_1)-1}$ , для яких  $v_1$  — єдина спільна вершина. (Назвемо  $T'_1, T'_2, \dots, T'_{d(v_1)-1}$  взаємодоповнювальними піддеревами дерева  $T'$  (див. рисунок).)



Позначимо через  $\phi_N(\mathbf{v})$  характеристичний многочлен задачі (10)–(13), (18) на дереві  $T$ , а через  $\phi_D(\mathbf{v})$  характеристичний многочлен задачі (10)–(13), (15) на цьому ж дереві. Відомо (див. рівняння (2.49) у [16]), що

$$\frac{\phi_{D(\mathbf{v})}(z)}{\phi_{N(\mathbf{v})}(z)} = l_0^{(1)} + \frac{1}{-m_1^{(1)}z + \frac{1}{l_1^{(1)} + \frac{1}{-m_2^{(1)}z + \dots + \frac{1}{-m_{n_1}^{(1)}z + \frac{1}{l_{n_1} + \frac{\phi_{D(v_1)}(z)}{\phi_{N(v_1)}(z)}}}}}, \quad (20)$$

де  $\phi_{D(v_1)}(z)$  – характеристичний многочлен задачі (10)–(14) на  $T'$ , а  $\phi_{N(v_1)}(z)$  – характеристичний многочлен задачі (10)–(13), (16), (17) на  $T'$ . Тут  $m_k^j > 0$  для  $k = 1, 2, \dots, n_j$ ,  $l_k^j > 0$  для  $k = 0, 1, \dots, n_j - 1$ ,  $l_{n_j}^j \geq 0$ .

Згідно з наслідком 2.2 [16],

$$\frac{\phi_{D(v_1)}(z)}{\phi_{N(v_1)}(z)} = \frac{1}{\sum_{r=1}^{d^+(v_1)-1} \frac{\phi_{N_r(v_1)}(z)}{\phi_{D_r(v_1)}(z)}}, \quad (21)$$

де  $\phi_{D_r(v_1)}$  – характеристичний многочлен задачі (10)–(13), (15) на  $T'_r$ , а  $\phi_{N_r(v_1)}$  – характеристичний многочлен задачі (10)–(13), (18) на цьому ж дереві. Знову розкладаємо у ланцюговий дріб

$$\frac{\phi_{D_r(v_1)}(z)}{\phi_{N_r(v_1)}(z)} = l_0^{(r)} + \frac{1}{-m_1^{(r)}z + \frac{1}{l_1^{(r)} + \frac{1}{-m_2^{(r)}z + \dots + \frac{1}{-m_{n_r}^{(r)}z + \frac{1}{l_{n_r} + F_r(z)}}}}}. \quad (22)$$

У свою чергу,  $F_j$  можна розкласти так, як (21), (22). Діючи так далі, остаточно отримуємо для  $\frac{\phi_{D(\mathbf{v})}(z)}{\phi_{N(\mathbf{v})}(z)}$  ланцюговий дріб, що розгалуджується.

Згідно з теоремою 2.8 [16],  $\frac{\phi_{D(v_1)}(z)}{\phi_{N(v_1)}(z)}$ ,  $\frac{\phi_{D_r(v_1)}(z)}{\phi_{N_r(v_1)}(z)}$ ,  $F_r, \dots$  –  $S_0$ -функції.

Тепер висновок теореми 1 випливає з лем 1–3.

Теорему доведено.

**Приклад.** На рисунку ланцюг із максимальною кількістю мас у  $T$  – це  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ , і ця максимальна кількість дорівнює 7. Це означає, що кількість різних власних значень більша або дорівнює 7.

## Література

1. B. Ahmadi, F. Alinaghypour, M. Cavers, F. Fallat, K. Meager, *Minimum distinct eigenvalues of graphs*, Electron. J. Linear Algebra, **26** (2013), Art. 45.
2. F. Barioli, S. Fallat, *On two conjectures regarding an inverse eigenvalue problem for acyclic symmetric matrices*, Electron. J. Linear Algebra, **11**, 41–50 (2004).
3. W. Cauer, *Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit*, Arch. Electrotechnik, **17**, № 4, 355–388 (1926).
4. S. J. Cox, M. Embree, J. M. Hokanson, *One can hear the composition of a string: experiments with an inverse eigenvalue problem*, SIAM Rev., **54**, № 1, 157–178 (2012).

5. A. L. Duarte, C. R. Johnson, *On the minimum number of distinct eigenvalues for a symmetric matrix whose graph is a given tree*, Math. Inequal. Appl., **5**, 175–180 (2002).
6. A. M. Filimonov, P. F. Kurchanov, A. D. Myshkis, *Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with  $n$  beads when  $n$  is large*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **313**, № 6, 961–965 (1991).
7. E. A. Guillemin, *Synthesis of passive networks. Theory and methods appropriate to the realization and approximation problems*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1958).
8. A. F. Filimonov, A. D. Myshkis, *On properties of large wave effect in classical problem bead string vibration*, J. Difference Equat. Appl., **10**, № 13-15, 1171–1175 (2004).
9. F. R. Gantmakher, M. G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*, Revised ed., AMS Chelsea Publ., Providence, RI (2002).
10. J. Genin, J. Maybee, *Mechanical vibrations tree*, J. Math. Anal. Appl., **45**, 746–763 (1974).
11. G. Gladwell, *Inverse problems in vibration*, Kluwer Acad. Press (2004).
12. G. Gladwell, *Matrix inverse eigenvalue problems*, Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications, CISM Courses and Lectures, **529**, 1–29 (2011).
13. L. Hogben, *Spectral graph theory and inverse eigenvalue problem of a graph*, Electron J. Linear Algebra, **14**, 12–31 (2005).
14. I.-J. Kim, B. L. Shader, *Classification of trees each of whose associated acyclic matrices with distinct diagonal entries has distinct eigenvalues*, Bull. Korean Math. Soc., **28**, 95–99 (2008).
15. В. А. Марченко, *Введение в теорию обратных задач спектрального анализа*, Акта, Харків (2005).
16. V. Pivovarchik, *Existence of a tree of Stieltjes strings corresponding to two given spectra*, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, № 37 (2009), 16 p.
17. V. Pivovarchik, N. Rozhenko, C. Tretter, *Dirichlet–Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*, Linear Algebra Appl., **439**, № 8, 2263–2292 (2013).
18. V. Pivovarchik, C. Tretter, *Location and multiplicities of eigenvalues for a star graph of Stieltjes strings*, J. Difference Equat. Appl., **21**, № 5, 383–402 (2015).
19. V. Pivovarchik, *On multiplicities of eigenvalues of a boundary value problem on a snowflake graph*, Linear Algebra Appl., **571**, 78–91 (2019).

Одержано 29.05.19