УДК 517.929

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

We establish new properties of solutions of a differential-functional equation with linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В данной работе рассматривается обобщенное уравнение пантографа

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \tag{1}$$

где $\operatorname{Re} a = 0,\ a \neq 0,\ \{b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1$. При $c = 0$ это уравнение исследовалось в [1 – 8, 20], а в случае $c \neq 0$ — в [9, 11, 14]. Нелинейное дифференциальное уравнение с линейным запаздыванием нейтрального типа появилось в [10], где описан класс автомодельных потенциалов в уравнении Шредингера и частично изучены собственные функции операторов симметрии, называемые когерентными состояниями. Некоторые из этих когерентных состояний (например, состояния Юрке – Столера) имеют практическое применение. Это нелинейное уравнение в окрестности постоянных решений изучалось в [11]. Дифференциально-функциональные уравнения нейтрального типа с линейным отклонением аргумента и особенностью при производной изучались в большом цикле работ (см. [15 – 19] и приведенную в них библиографию). Несмотря на это и на широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники, многие вопросы теории дифференциально-функционального уравнения (1) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотического поведения решений этого уравнения в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому основной целью настоящей статьи является дополнение результатов [5] для случая $c \neq 0$.

Фундаментальное решение $G(t, t_0)$ — это единственное непрерывное решение начальной задачи (1) и

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ 1, & t = t_0. \end{cases} \tag{2}$$

Основываясь на представлении решений уравнения (1) рядами Дирихле в [13], будем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$G(t, t_0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} D_{k,l} e^{q^{-l} a(q^k t - t_0)}, \qquad t \in \left[q^{-n} t_0, q^{-n-1} t_0\right], \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Поскольку $G(t, t_0) = e^{a(t - t_0)}$ для $t \in \left[t_0, q^{-1} t_0\right]$, то $D_{0,0} = 1$. Применяя метод шагов к начальной задаче (1), (2), для коэффициентов в формуле (3) получаем рекуррентные соотношения

$$aD_{k,k} - D_{k,k}a = 0,$$

$$aD_{k,l} - q^{k-l}aD_{k,l} = -bD_{k-1,l} - q^{k-l-1}acD_{k-1,l}, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и условие непрерывности функции $G(t, t_0)$ в точках $t = q^{-k}t_0$

$$D_{k,k} = -\sum_{l=0}^{k-1} D_{k,l}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Теорема [12]. *Если* $a \neq 0$, *то фундаментальное решение имеет представление*

$$G(t,t_0) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}b + q^{k-l-j}c}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{c + q^{l-j}a^{-1}b}{1-q^j}\right)e^{q^{-l}a\left(q^k t - t_0\right)}, \tag{4}$$

$$t \in \left[q^{-n}t_0, q^{-n-1}t_0\right], \quad n = 0, 1, \ldots.$$

***Пример* 1.** Пусть $a^{-1}b = -1$, $c = q^{-1}$, $a < 0$. Тогда для $t \in \left[q^{-n}t_0, q^{-n-1}t_0\right]$, $n = 0, 1, \ldots$, получаем следующую формулу фундаментального решения:

$$G(t,t_0) = e^{a(t-t_0)} - \sum_{k=1}^{n} q^{-k}\left\{e^{aqq^{-k}\left(q^k t - t_0\right)} - e^{aq^{-k}\left(q^k t - t_0\right)}\right\} \leq$$

$$\leq 1 - q^{-n}\left\{e^{aqq^{-n}(q^n t - t_0)} - e^{aq^{-n}(q^n t - t_0)}\right\}.$$

Аргумент в степени экспоненты в правой части последнего неравенства изменяется в пределах

$$0 \leq q^{-n}\left(q^n t - t_0\right) \leq q^{-n}\left(q^{-1}t_0 - t_0\right) \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

поэтому найдется число $t_n \in \left[q^{-n}t_0, q^{-n-1}t_0\right]$ такое, что $q^{-n}\left(q^n t_n - t_0\right) = 1$. Отсюда получаем неравенство

$$G(t_n, t_0) \leq 1 - q^{-n}\left\{e^{aq} - e^{a}\right\} \leq 1 - q\frac{t_n}{t_0}\left\{e^{aq} - e^{a}\right\}.$$

Последнее неравенство означает, что асимптотическое поведение непрерывного, кусочно непрерывно дифференцируемого решения $G(t, t_0)$ отличается от поведения достаточно гладких решений в [14].

***Пример* 2.** Пусть $a^{-1}b = -1$, $c = 1$. Тогда для $t \in \left[q^{-n}t_0, q^{-n-1}t_0\right]$, $n = 0, 1, \ldots$, получаем следующую формулу фундаментального решения:

$$G(t,t_0) = e^{a(t-t_0)}$$

уравнения

$$x'(t) = ax(t) - ax(qt) + x'(qt).$$

Это уравнение имеет частное решение $x_1(t) \equiv 1$. Данный пример показывает сложности, которые возникают при выводе аналога формулы вариации произвольных постоянных на основе непрерывного фундаментального решения $G(t, t_0)$.

Формула вариации произвольных постоянных для уравнения

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f(t), \tag{5}$$

где $f \in C(0, +\infty)$, имеет вид

$$x(t; t_0, \varphi, f) = \varphi(t_0)Y(t, t_0) + \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs)\big) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, s\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(s) - \varphi(t_0)c\left(q^{-1} - 1\right) Y'(qs, t_0)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t, s)\, ds, \tag{6}$$

где $Y(t, t_0)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи (2), и

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + \frac{c}{q}x'(qt), \quad t \geq t_0 > 0.$$

Чтобы в этом убедиться, необходимо учесть тождества, вытекающие из последнего уравнения:

$$Y'(t, t_0) = a\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, t_0\right) + b\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\Big(q^{l+1} t, t_0\Big),$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t, t_0) - \frac{c}{q^2}Y(qt, t_0)\right) = Y'(t, t_0) - \frac{c}{q}Y'(qt, t_0) = aY(t, t_0) + bY(qt, t_0).$$

Первое из этих равенств, согласно начальному условию (2), для каждого значения t содержит в правой части лишь конечное число ненулевых слагаемых. Тогда, дифференцируя равенство

$$x(t) - \frac{c}{q}x(qt) = \varphi(t_0)\left(Y(t, t_0) - \frac{c}{q^2}Y(qt, t_0)\right) + \varphi(t_0)\frac{c}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)Y(qt, t_0) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs)\ \big)Y(t, s)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} \big(f(s) - \varphi(t_0)c(q^{-1} - 1)Y'(qs, t_0)\big)\, Y(t, s)\, ds$$

при $t \geq q^{-1}t_0,\ t \neq q^{-k}t_0,\ k = 1, 2, \ldots,$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \frac{c}{q}x(qt)\right) = ax(t) + bx(qt) + f(t).$$

На отрезке $t \in \left[t_0, q^{-1}t_0\right]$ выполняется равенство

$$x(t) = \varphi(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}\big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs) + f(s)\big)\, ds,$$

т. е. функция $x(t; t_0, \varphi, f)$ является непрерывным решением уравнения (5) для $t \geq q^{-1}t_0$, $t \neq q^{-k}t_0,\ k = 1, 2, \ldots,$ и совпадает с решением начальной задачи (5); $x(t) = \varphi(t),\ t \in [qt_0, t_0]$, $\varphi \in C^1[qt_0, t_0]$ на отрезке $t \in \left[t_0, q^{-1}t_0\right]$, а значит, и на всей полуоси $t \geq t_0$.

В случае $q > 1$ формула (6) сохраняется со следующими изменениями: функция $Y(t, t_0)$ — это непрерывное фундаментальное решение начальной задачи

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + \frac{c}{q}x'(qt), \quad 0 < t \le t_0,$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t > t_0, \\ 1, & t = t_0; \end{cases} \tag{7}$$

в равенстве (4) независимая переменная принадлежит отрезку $t \in \left[q^{-n-1}t_0, q^{-n}t_0\right]$.

При условии $\varphi(t_0) = 0$ формула вариации произвольных постоянных (6) упрощается. Это условие можно выполнить, если построить решение уравнения (1), которое в точке $t = t_0$ будет принимать значение 1, обозначим его символом $x_0(t)$. Тогда разность $y(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x(t; t_0, \varphi, f) - \varphi(t_0)x_0(t)$ будет решением неоднородного уравнения, которое равно нулю в точке $t = t_0$. Поэтому для него выполняется тождество

$$y(t) = x(t; t_0, y, f) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(by(qs) + cy'(qs)\big) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, s\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} f(s) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t, s)\, ds. \tag{8}$$

Производная $x^{(p)}(t)$ решения уравнения (1) является в свою очередь решением уравнения

$$z'(t) = az(t) + bq^p z(qt) + cq^p z'(qt), \tag{9}$$

которое так же имеет почти периодическое решение

$$h_p(t) = e^{at} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(b + ac)(b + acq) \ldots \left(b + acq^{n-1}\right)}{a^n(1 - q)\left(1 - q^2\right) \ldots (1 - q^n)} q^{pn} e^{aq^n t},$$

если $|b|q^p < |a|$.

Теорема 1. *Если выполняются условия*:

а) $\operatorname{Re} a = 0,\ abc \ne 0,\ 0 < q < 1$;

б) *величина* $v_1 \in \mathrm{C}$ *определяется из равенства* $a + bq^{v_1} = 0$,

то в случае $\operatorname{Re} bc^{-1} < 0$ *справедливы утверждения*:

1) *существует* $m \in \mathrm{N} \bigcup 0$ *такое, что для произвольной* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (1)

$$x_f(t; a, b, c) =$$

$$= t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1 - 1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1 - m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t), \quad t > 0,$$

где $f_j(u)$, $1 \le j \le m$, *— периодические функции с периодом* 1, *определяемые рекуррентной формулой*

$$f_{j+1}(u) = \frac{bq^{j+1} + ac}{ba\big(q^{j+1} - 1\big)} \left((v_1 - j) f_j(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_j'(u) \right), \quad 0 \le j \le m-1,$$

$$z_1(t) = \big(bc^{-2} q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\big) e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} \left[u^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) \right] e^{bc^{-1}u} du,$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1} q z_n\big(q^{-1}t\big) + \big(ac^{-1} + qbc^{-2}\big) e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} z_n\big(q^{-1}u\big) e^{bc^{-1}u} du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ *непрерывно дифференцируемый и имеет асимптотическое свойство* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\big(t^{v_1-m-1}\big)$, $t \to +\infty$;

2) *существует* $p_0 \in \mathrm{N} \bigcup 0$ *такое, что для каждого достаточно гладкого решения* $x(t)$ *уравнения* (1) *выполняется равенство* $x^{(p_0)}(t) = Lh_{p_0}(t) + x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\big)$, *где* L *— некоторая постоянная,* $x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\big)$ *— решение из предыдущего пункта, построенное на основе некоторой* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1;

в случае $\operatorname{Re} bc^{-1} > 0$ *имеют место утверждения*:

1) *существует* $m \in \mathrm{N} \bigcup 0$ *такое, что для произвольной* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (1)

$$x_f(t; a, b, c, \gamma) =$$
$$= t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) + \gamma x_*(t), \quad t \ge \rho > 0,$$

где ρ *— достаточно большая и не зависящая от функции* $f_0(u)$ *константа*; $f_j(u)$, $1 \le j \le$ $\le m$, *— периодические функции с периодом* 1, *определяемые рекуррентной формулой*

$$f_{j+1}(u) = \frac{bq^{j+1} + ac}{ba\big(q^{j+1} - 1\big)} \left((v_1 - j) f_j(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_j'(u) \right), \quad 0 \le j \le m-1,$$

$$z_1(t) = \big(c^{-1} q^{-v_1+m+1} - 1\big) \Bigg[e^{-bc^{-1}(t-\rho)} t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) -$$

$$- bc^{-1} \int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)} \left\{ u^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) \right\} du \Bigg],$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\big(q^{-1}t\big) - \big(qbc^{-2} + ac^{-1}\big)\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}z_n\big(q^{-1}u\big)du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ *непрерывно дифференцируемый и имеет асимптотическое свойство* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\big(t^{v_1-m-1}\big)$, $t \to +\infty$; *функция* $x_*(t)$ *является частным решением уравнения* (1) *и определяется формулой* $x_*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-\frac{b}{c}q^{-k}t}$, *где* $x_k = \dfrac{ac + bq^{-k+1}}{bc\,(q^{-k} - 1)}x_{k-1}$, $k \geq 1$, $x_0 = 1$; γ — *произвольная постоянная*;

2) *существует* $p_0 \in \mathrm{N}\bigcup 0$ *такое, что для каждого достаточно гладкого решения* $x(t)$ *уравнения* (1) *выполняется равенство* $x^{(p_0)}(t) = Lh_{p_0}(t) + x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}, \gamma\big)$, *где* L — *некоторая постоянная*, $x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}, \gamma\big)$ — *решение из предыдущего пункта, построенное на основе некоторой* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1, *и с некоторой постоянной* γ;

в случае $\operatorname{Re} bc^{-1} = 0$ *справедливы утверждения*:

1) *существует* $m \in \mathrm{N}\bigcup 0$ *такое, что для произвольной* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (1)

$$x_f(t; a, b, c) = t^{v_1}f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1}f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z(t), \quad t > 0,$$

где $f_j(u)$, $1 \leq j \leq m$, — *периодические функции с периодом* 1, *определяемые рекуррентной формулой*

$$f_{j+1}(u) = \frac{bq^{j+1} + ac}{ba\big(q^{j+1} - 1\big)}\left((v_1 - j)f_j(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}f_j'(u)\right), \quad 0 \leq j \leq m-1,$$

$$z(t) = \big(1 - c^{-1}q^{-v_1+m+1}\big)\int\limits_{t}^{+\infty}\frac{d}{ds}\left(s^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c^{-1}}{q^{-1}}\right)^l H_0(q^{-l}t, s)\,ds,$$

$H_0(t, t_0)$ — *непрерывное фундаментальное решение начальной задачи* (7) *и*

$$x'(t) = -bc^{-1}x(t) - ac^{-1}x\big(q^{-1}t\big) + \frac{c^{-1}}{q^{-1}}x'\big(q^{-1}t\big), \quad 0 < t \leq t_0;$$

функция $z(t)$ *непрерывно дифференцируема и имеет асимптотическое свойство* $z(t) = O(t^{v_1-m})$, $t \to +\infty$;

2) *существует* $p_0 \in \mathrm{N}\bigcup 0$ *такое, что для каждого достаточно гладкого решения* $x(t)$ *уравнения* (1) *выполняется равенство* $x^{(p_0)}(t) = Lh_{p_0}(t) + x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\big)$, *где* L — *некоторая постоянная*, $x_f\big(t; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\big)$ — *решение из предыдущего пункта, построенное на основе некоторой* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1.

Доказательство. Формула вариации произвольных постоянных (6) для уравнения (9) имеет вид

$$z\,(t;t_0,\varphi)=\varphi(t_0)Y_p(t,t_0)+\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^p\varphi(qs)+cq^p\varphi'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\big(q^lt,s\big)\,ds-$$

$$-\varphi(t_0)cq^p(q^{-1}-1)\int\limits_{t_0}^{t}Y_p'(qs,t_0)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p(q^lt,s)\,ds, \tag{10}$$

где $Y_p(t,t_0)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи

$$z'(t)=az(t)+bq^pz(qt)+\frac{cq^p}{q}z'(qt),\quad t\geq t_0>0, \tag{11}$$

$$z(t)=\begin{cases}0, & 0<t<t_0,\\ 1, & t=t_0.\end{cases}$$

С помощью тождества (4) на основе формулы непрерывного фундаментального решения $Y_p(t,t_0)$ определим функцию

$$Y_{p,\infty}(t,t_0)\overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}bq^p+q^{k-l-j}cq^{p-1}}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{cq^{p-1}+q^{l-j}a^{-1}bq^p}{1-q^j}\right)e^{q^{-l}a(q^kt-t_0)}. \tag{12}$$

В дальнейшем числа M_j — это неотрицательные постоянные, и символы $O(\ldots)$ нужно понимать при $t\to+\infty$. Если $M_1\overset{\mathrm{df}}{=}\max\big\{|a^{-1}bq^p|,|cq^{p-1}|\big\}<1$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ выполняется оценка

$$|Y_{p,\infty}(t,t_0)|\leq\left(\prod_{j=1}^{+\infty}\frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)^2\sum_{k=0}^{+\infty}M_1^k(k+1)\leq\left(\prod_{j=1}^{+\infty}\frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)^2M_2\sum_{k=0}^{+\infty}e^{k(\ln M_1+\varepsilon)}. \tag{13}$$

Аналогичная оценка имеет место для производной $Y_{p,\infty}'(t,t_0)$, поэтому функция $Y_{p,\infty}(t,t_0)$ является решением уравнения (11). Отсюда, учитывая ограниченность почти периодической функции, в пределе получаем равенство

$$Y_{p,\infty}'(t,t_0)=a\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^lY_{p,\infty}\big(q^lt,t_0\big)+bq^p\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^lY_{p,\infty}\big(q^{l+1}t,t_0\big). \tag{14}$$

Определим функцию

$$g(t;t_0,\varphi)\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^p\varphi(qs)+cq^p\varphi'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^lY_{p,\infty}\big(q^lt,s\big)\,ds.$$

Тогда

$$g(t;t_0,\varphi)-\frac{cq^p}{q}g(qt;t_0,\varphi)=\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^p\varphi(qs)+cq^p\varphi'(qs)\big)Y_{p,\infty}(t,s)\,ds,$$

и, принимая во внимание (14), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(g(t;t_0,\varphi)-\frac{cq^p}{q}g(qt;t_0,\varphi)\right)=\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^p\varphi(qs)+cq^p\varphi'(qs)\big)Y'_{p,\infty}(t,s)\,ds=$$

$$=ag(t;t_0,\varphi)+bq^pg(qt;t_0,\varphi),$$

т. е. функция $g(t;t_0,\varphi)$ является решением уравнения (9). Учитывая абсолютную и равномерную сходимость соответствующих рядов, для решения $g(t;t_0,\varphi)$ с помощью формулы (12) получаем тождество

$$g(t;t_0,\varphi)=\sum_{w=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^w\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}bq^p+q^{k-l-j}cq^{p-1}}{1-q^j}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{cq^{p-1}+q^{l-j}a^{-1}bq^p}{1-q^j}\right)e^{aq^{k+w-l}t}\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^p\varphi(qs)+cq^p\varphi'(qs)\big)e^{-aq^{-l}s}\,ds.$$

Поэтому решение $g(t;t_0,\varphi)$ уравнения (9) является абсолютно и равномерно сходящимся рядом из экспонент e^{aq^nt}, $n\geq 0$, с некоторыми коэффициентами. Последние однозначно определяются подстановкой ряда в уравнение. Следовательно, выполняется тождество

$$g(t;t_0,\varphi)=L_p\left(t_0,\varphi\right)h_p(t) \tag{15}$$

для некоторой постоянной $L_p\left(t_0,\varphi\right)$.

Предположим, что t_0 выбрано так, что $h_p(t_0)\neq 0$. Тогда разность $y(t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}z(t;t_0,\varphi)-$ $-\varphi(t_0)\dfrac{h_p(t)}{h_p(t_0)}$ будет решением уравнения (9), которое равно нулю в точке $t=t_0$. Поэтому согласно формуле (10) для него выполняется тождество, аналогичное равенству (8):

$$y(t)=z\left(t;t_0,y\right)=\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^py(qs)+cq^py'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^lY_p\big(q^lt,s\big)\,ds.$$

Оценим разность решений

$$y(t)-g\left(t;t_0,y\right)=\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(bq^py(qs)+cq^py'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l\Big(Y_p(q^lt,s)-Y_{p,\infty}(q^lt,s)\Big)\,ds.$$

Предположим, что $t\geq q^{-1}t_0$ и $t\in\left[q^{-n}s,q^{-n-1}s\right]$, $n=0,1,\ldots$, тогда для $0\leq l\leq n$ находим

$$Y_p\big(q^l t, s\big) - Y_{p,\infty}\big(q^l t, s\big) =$$

$$= -\sum_{k=n-l+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{k-l} \frac{a^{-1}bq^p + q^{k-l-j}cq^{p-1}}{1-q^j} \right) \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{cq^{p-1} + q^{l-j}a^{-1}bq^p}{1-q^j} \right) e^{q^{-l}a\left(q^k t - s\right)}.$$

Отсюда так же, как и при выводе оценки (13), получаем

$$\Big| Y_p(q^l t, s) - Y_{p,\infty}(q^l t, s) \Big| \leq \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}}{1-q^j} \right)^2 M_2 \sum_{k=n-l+1}^{+\infty} e^{k(\ln M_1 + \varepsilon)} = M_3 e^{(n-l+1)(\ln M_1 + \varepsilon)}.$$

Поэтому ряд под знаком интеграла можно оценить следующим образом:

$$\left| \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q} \right)^l \Big(Y_p(q^l t, s) - Y_{p,\infty}(q^l t, s) \Big) \right| \leq \sum_{l=0}^{n} M_1^l M_3 e^{(n-l+1)(\ln M_1 + \varepsilon)} + \sum_{l=n+1}^{+\infty} M_1^l M_4 \leq$$

$$\leq M_3 e^{(n+1)(\ln M_1 + \varepsilon)} \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon}} + M_4 e^{(n+1)\ln M_1} \frac{1}{1 - M_1}.$$

Поскольку $(\ln q^{-1})^{-1} \ln\left(\dfrac{t}{q^{-1}t_0} \right) \leq (\ln q^{-1})^{-1} \ln\left(\dfrac{t}{s} \right) \leq n+1$, то оценку ряда можно продолжить

$$\left| \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q} \right)^l \Big(Y_p(q^l t, s) - Y_{p,\infty}(q^l t, s) \Big) \right| \leq M_5 t^{\frac{\ln M_1 + \varepsilon}{\ln q^{-1}}}.$$

Тогда

$$\big| y(t) - g(t; t_0, y) \big| \leq M_6 t^{\frac{\ln M_1 + \varepsilon}{\ln q^{-1}}}, \quad t \geq t_0.$$

Пусть $x^{(p)}(t) = z(t; t_0, \varphi)$. Отсюда, принимая во внимание определение функции $y(t)$ и равенство (15), получаем, что разность решений

$$\mu_p(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} y(t) - g(t; t_0, y) = z(t; t_0, \varphi) - \varphi(t_0) \frac{h_p(t)}{h_p(t_0)} - L_p(t_0, y) h_p(t) =$$

$$= x^{(p)}(t) - L_{p,h} h_p(t),$$

где $L_{p,h}$ — некоторая постоянная, будет решением уравнения (9), которое имеет в качестве первообразной решение

$$\mu_{p-1}(t) = x^{(p-1)}(t) - L_{p,h} \frac{h_{p-1}(t)}{a}$$

уравнения

$$z'(t) = az(t) + bq^{p-1} z(qt) + cq^{p-1} z'(qt). \tag{16}$$

Предположим, что $p \geq p_0 + m + 4$, где числа $\{p_0, m\} \subset \mathrm{N} \bigcup 0$ будут определены в дальнейшем. Если $|b|q^{p_0} < |a|$, то этот процесс можно продолжить и получить зависимость

$$\mu_{p_0}^{(j)}(t) = \mu_{p_0+j}(t) = x^{(p_0+j)}(t) - L_{p,h}\frac{h_{p_0+j}(t)}{a^{p-p_0-j}}$$

для $0 \le j \le p - p_0$. Таким образом,

$$\mu_{p_0}^{(p-p_0)}(t) = \mu_p(t) = O\left(t^{\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}}}\right).$$

При этом функция $\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(t) = \mu_{p-1}(t)$ — решение уравнения (16):

$$\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(t) = -a^{-1}bq^{p-1}\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(qt) + a^{-1}\mu_{p_0}^{(p-p_0)}(t) - a^{-1}cq^{p-1}\mu_{p_0}^{(p-p_0)}(qt) \stackrel{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} -a^{-1}bq^{p-1}\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(qt) + f(t).$$

Выполним замену переменных $\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(t) = t^{v_*}\eta(t)$, где $v_* \ge \dfrac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}} \stackrel{\text{df}}{=} v_{\min}$ и $v_* >$ $> (\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(|a^{-1}bq^{p-1}|\right) \stackrel{\text{df}}{=} v_0 - (p-1)$:

$$\eta(t) = -a^{-1}bq^{p-1}q^{v_*}\eta(qt) + t^{-v_*}f(t).$$

Поскольку $\left|a^{-1}bq^{p-1}q^{v_*}\right| < 1$ и неоднородность $t^{-v_*}f(t)$ ограничена, то функция $\eta(t)$ также ограничена. Поэтому $\mu_{p_0}^{(p-p_0-1)}(t) = O\big(t^{v_*}\big) = O\big(t^{\max\{v_{\min}, v_0-(p-1)+\varepsilon\}}\big)$. Повторяя этот процесс, убеждаемся, что

$$\mu_{p_0}^{(p-p_0-2)}(t) = O\Big(t^{\max\{v_0-(p-2)+\varepsilon; \max\{v_{\min}, v_0-(p-1)+\varepsilon\}\}}\Big) = O\Big(t^{\max\{v_0-(p-2)+\varepsilon, v_{\min}\}}\Big).$$

Действуя так несколько раз, получаем

$$\mu_{p_0}^{(j)}(t) = O\Big(t^{\max\{v_0-(p_0+j)+\varepsilon, v_{\min}\}}\Big), \quad 0 \le j \le p - p_0 - 1.$$

Предположим, что для $j = m + 3 \le p - p_0 - 1$ выполняется неравенство $v_0 - (p_0 + m + 3) >$ $> \dfrac{\ln M_1}{\ln q^{-1}}$, тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для $0 \le j \le m + 3$ получаем оценку $\mu_{p_0}^{(j)}(t) =$ $= O\Big(t^{v_0-(p_0+j)+\varepsilon}\Big)$.

Запишем уравнение для функции $\mu_{p_0}(t)$ в виде

$$\mu_{p_0}(t) = -a^{-1}bq^{p_0}\mu_{p_0}(qt) + a^{-1}\mu'_{p_0}(t) - a^{-1}cq^{p_0}\mu'_{p_0}(qt) \stackrel{\text{df}}{=} -a^{-1}bq^{p_0}\mu_{p_0}(qt) + f(t)$$

и выполним замену $\mu_{p_0}(t) = t^{v_1-p_0-\varepsilon}y(t)$:

$$y(t) = q^{-\varepsilon}y(qt) + t^{-(v_1-p_0-\varepsilon)}f(t).$$

Так как неоднородность $t^{-(v_1-p_0-\varepsilon)}f(t) = t^{-(v_1-p_0-\varepsilon)}O\left(t^{v_0-(p_0+1)+\varepsilon}\right) = O\big(t^{-1+2\varepsilon}\big)$ ограничена при малом $\varepsilon > 0$, то $y(t) = O\big(t^{\varepsilon}\big)$, $\mu_{p_0}(t) = O\left(t^{v_1-p_0}\right)$.

Аналогично для $0 \le j \le m + 2$ получаем оценки $\mu_{p_0}^{(j)}(t) = O\big(t^{v_0-(p_0+j)}\big)$.

Далее, применяя стандартные рассуждения (см., например, [1, 11]), получаем асимптотические формулы

$$\mu_{p_0}^{(j)}(t) = t^{v_1-p_0-j}\left\{f_{j,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\big(t^{-1}\big)\right\},$$

где $0 \le j \le m + 1$, а $f_{j,0}(u)$ — непрерывные периодические функции с периодом 1.

Затем, используя рассуждения из доказательства теоремы 5 из [11], получаем представление

$$\mu_{p_0}(t) = t^{v_1-p_0} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-p_0-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+t^{v_1-p_0-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-p_0-m+1} f_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+t^{v_1-p_0-m-1} d_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq 1, \tag{17}$$

где $f_j(u),\ 0 \leq j \leq m,$ — непрерывные периодические функции с периодом 1 такие, что $f_0(u) \in C^{m+1}(\mathrm{R})$ и

$$f_{j+1}(u) = \frac{bq^{j+1} + ac}{ba\big(q^{j+1} - 1\big)}\left((v_1 - p_0 - j) f_j(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_j'(u)\right), \quad 0 \leq j \leq m-1;$$

$d_{m+1}(u)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная вместе с производной функция.

После этого, записывая уравнение для функции $\mu_{p_0}(t)$ как уравнение с опережением

$$\mu_{p_0}'(t) = -bc^{-1}\mu_{p_0}(t) - ac^{-1}q^{-p_0}\mu_{p_0}\big(q^{-1}t\big) + c^{-1}q^{-p_0}\mu_{p_0}'\big(q^{-1}t\big)$$

и применяя к нему рассуждения из доказательства теоремы из [14], получаем в случае $\operatorname{Re} bc^{-1} \neq$ $\neq 0$ равенства $\mu_{p_0}(t) = x_f(t)$, где функции $x_f(t)$ определены в условии теоремы.

В случае $\operatorname{Re} bc^{-1} = 0$ в уравнении для функции $\mu_{p_0}(t)$ выполним замену переменных

$$\mu_{p_0}(t) = t^{v_1-p_0} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-p_0-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-p_0-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + t^{v_1-p_0-m+1} f_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z(t), \tag{18}$$

тогда

$$z'(t) = -bc^{-1}z(t) - ac^{-1}q^{-p_0}z\big(q^{-1}t\big) + c^{-1}q^{-p_0}z'\big(q^{-1}t\big) +$$

$$+\big(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\big)\frac{d}{dt}\left(t^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right). \tag{19}$$

Запишем решение уравнения (19) с помощью формулы вариации произвольных постоянных:

$$z(t) = z(t_0)H(t, t_0) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{qt_0}\left(-ac^{-1}q^{-p_0}z\left(q^{-1}s\right) + c^{-1}q^{-p_0}z'\left(q^{-1}s\right)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s)\, ds +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\frac{d}{ds}\left(s^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right) -\right.$$

$$-z(t_0)c^{-1}q^{-p_0}(q-1)H'\left(q^{-1}s,t_0\right)\Bigg)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t,s)\,ds, \tag{20}$$

где $H(t,t_0)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи (7) и

$$x'(t)=-bc^{-1}x(t)-ac^{-1}q^{-p_0}x\bigl(q^{-1}t\bigr)+\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}x'\bigl(q^{-1}t\bigr),\quad 0<t\le t_0.$$

Согласно (4) получаем следующую формулу для функции $H(t,t_0)$:

$$H(t,t_0)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{ab^{-1}q^{-p_0}+q^{-k+l+j}c^{-1}q^{-p_0+1}}{1-q^{-j}}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{c^{-1}q^{-p_0+1}+q^{-l+j}ab^{-1}q^{-p_0}}{1-q^{-j}}\right)e^{-q^l bc^{-1}(q^{-k}t-t_0)},\qquad t\in\bigl[q^{n+1}t_0,q^n t_0\bigr],\quad n=0,1,\ldots.$$

Определим число $M_7\overset{\mathrm{df}}{=}\max\left\{|ab^{-1}q^{-p_0}|,|c^{-1}q^{-p_0+1}|\right\}$ и оценим функцию $H(t,t_0)$:

$$\bigl|H(t,t_0)\bigr|\le\sum_{k=0}^{n}M_7^k\sum_{l=0}^{k}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{1+q^{-j+1}}{|1-q^{-j}|}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{1+q^{-j+1}}{|1-q^{-j}|}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(M_7q)^k\sum_{l=0}^{k}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)\le$$

$$\le\left(\prod_{j=1}^{+\infty}\frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)^2 M_8\sum_{k=0}^{n}e^{k(\ln(M_7q)+\varepsilon)}.$$

Предположим, что $\ln(M_7q)+\varepsilon>0$. Поскольку $t\in\bigl[q^{n+1}t_0,q^n t_0\bigr]$ и $(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\dfrac{t_0}{t}\right)\ge n$, то

$$|H(t,t_0)|\le M_9e^{(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\frac{t_0}{t}\right)(\ln(M_7q)+\varepsilon)}=M_9\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{\ln(M_7q)+\varepsilon}{\ln q^{-1}}}.$$

Для простоты определим число $w\overset{\mathrm{df}}{=}\max\left\{\dfrac{\ln(M_7q)+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\varepsilon\right\}>0$, тогда для всех значений суммы $\ln(M_7q)+\varepsilon$ получаем оценку

$$\bigl|H(t,t_0)\bigr|\le M_{10}\left(\frac{t_0}{t}\right)^w,\quad 0<t\le t_0.$$

Аналогично получаем оценку для производной

$$\bigl|H'(t,t_0)\bigr|\le M_{11}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{w+1},\quad 0<t\le t_0.$$

В силу представления (17) для функции $z(t)$ выполняются оценки

$$z(t) = O\big(t^{v_1 - p_0 - m - 1}\big), \qquad z'(t) = O\big(t^{v_1 - p_0 - m - 2}\big).$$

Оценим первое слагаемое в формуле (20):

$$\big|z(t_0)H(t,t_0)\big| \leq M_{12}\frac{1}{t^w} t_0^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m - 1 + w},$$

поэтому если $m > \operatorname{Re} v_1 - p_0 - 1 + w$, то $z(t_0)H(t,t_0) \to 0,\ t_0 \to +\infty$.

Чтобы функция $H(q^{-l}t, s)$ принимала ненулевые значения, необходимо выполнение условия $q^{-l}t \leq s$ или $l \leq (\ln q^{-1})^{-1} \ln\left(\dfrac{s}{t}\right)$. Поэтому для суммы под знаком интеграла в (20) выполняется равенство

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s) = \sum_{l=0}^{\left[(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]} \left(c^{-1}q^{-p_0+1}\right)^l H(q^{-l}t, s).$$

Оценим ее:

$$\left|\sum_{l=0}^{\left[(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]} \left(c^{-1}q^{-p_0+1}\right)^l H(q^{-l}t, s)\right| \leq M_{10}\left(\frac{s}{t}\right)^w \sum_{l=0}^{\left[(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]} e^{l\ln(M_7 q^w)}.$$

Предположим, что $\ln(M_7 q^w) > 0$, тогда

$$\sum_{l=0}^{\left[(\ln q^{-1})^{-1}\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]} \left|c^{-1}q^{-p_0+1}\right|^l \left|H(q^{-l}t, s)\right| \leq M_{13}\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{\ln M_7}{\ln q^{-1}}}.$$

Отсюда с учетом неравенства $w + 1 \geq \dfrac{\ln M_7}{\ln q^{-1}}$ для всех значений $\ln\left(M_7 q^w\right)$ получаем простую оценку

$$\left|\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{+\infty} \left|c^{-1}q^{-p_0+1}\right|^l \left|H(q^{-l}t, s)\right| \leq M_{14}\left(\frac{s}{t}\right)^{w+1}, \quad 0 < t \leq s. \tag{21}$$

Предположим, что $t \leq qt_0$, и оценим второе слагаемое в формуле (20):

$$\left|\int_{t_0}^{qt_0} \left(-ac^{-1}q^{-p_0} z\left(q^{-1}s\right) + c^{-1}q^{-p_0} z'\left(q^{-1}s\right)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s)\, ds\right| \leq$$

$$\leq M_{15}\int_{qt_0}^{t_0} s^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m - 1}\left(\frac{s}{t}\right)^{w+1} ds = M_{15}\frac{1}{t^{w+1}}\frac{t_0^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m + w + 1} - (qt_0)^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m + w + 1}}{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m + w + 1}.$$

Если $m > \operatorname{Re} v_1 - p_0 + w + 1$, то второе слагаемое стремится к нулю при $t_0 \to +\infty$.

Оценим теперь интеграл

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} \left(-z(t_0)c^{-1}q^{-p_0}(q-1)H'\left(q^{-1}s, t_0\right)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s)\, ds \right| \le$$

$$\le M_{16} \int\limits_{t}^{t_0} t_0^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m - 1} \left(\frac{t_0}{s}\right)^{w+1} \left(\frac{s}{t}\right)^{w+1} ds \le M_{16} \frac{1}{t^{w+1}} t_0^{\operatorname{Re} v_1 - p_0 - m + w + 1}.$$

Если $m > \operatorname{Re} v_1 - p_0 + w + 1$, то этот интеграл стремится к нулю при $t_0 \to +\infty$.

Таким образом, если выполняется условие $m > \operatorname{Re} v_1 - p_0 + w + 1$, то, устремляя t_0 к ∞ в тождестве (20), в пределе получаем

$$z(t) = \left(1 - c^{-1}q^{-v_1+m+1}\right) \int\limits_{t}^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(s^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l H(q^{-l}t, s)\, ds.$$

Оценка (21) позволяет проинтегрировать ряд в последней формуле почленно:

$$z(t) = \left(1 - c^{-1}q^{-v_1+m+1}\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}}\right)^l \int\limits_{q^{-l}t}^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(s^{v_1-p_0-m} f_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right) H(q^{-l}t, s)\, ds.$$

Последнее тождество показывает, что при достаточно большом m функция $z(t)$ непрерывно дифференцируема. Следовательно, правая часть в равенстве (18) будет непрерывно дифференцируемым решением уравнения (9) при $p = p_0$ для любой функции $f_0(u) \in C^{m+1}(\mathrm{R})$.

Теорема доказана.

Процесс интегрирования решений в случае $c = 0$ детально изучен в [5]. Все свойства функции $h(x)$ из [5] сохраняются и в случае $c \neq 0$. Мы только схематически отметим некоторые отличительные особенности. Для этого периодические функции в определении решений $x_f(t)$ удобнее записать в виде

$$w_0 = f_0, \qquad w_{p+1}(u) = (v_1 - p)\, w_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} w_p'(u),$$

$$f_{p+1}(u) = \frac{bq^{p+1} + ac}{ba\left(q^{p+1} - 1\right)} \cdots \frac{bq + ac}{ba(q-1)} w_{p+1}(u), \quad 0 \le p \le m - 1.$$

Тогда

$$x_f(t) = t^{v_1} w_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{bq + ac}{ba(q-1)} t^{v_1 - 1} w_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{bq^m + ac}{ba\left(q^m - 1\right)} \cdots \frac{bq + ac}{ba(q-1)} t^{v_1 - m} w_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots =$$

$$= t^{v_1} w_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{bq + ac}{ba(q-1)} \frac{d}{dt}\left\{t^{v_1} w_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\} + \ldots$$

$$\ldots+\frac{bq^m+ac}{ba\,(q^m-1)}\cdots\frac{bq+ac}{ba(q-1)}\frac{d}{dt}\left\{t^{v_1-m+1}w_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\}+\ldots.$$

Коэффициенты перед периодическими функциями одинаковые для всех производных решения уравнения (1).

Рассмотрим случай $\operatorname{Re} bc^{-1}<0$. Тогда

$$z_1(t;a,b,c)=\left(bc^{-2}q^{-v_1+m+1}-bc^{-1}\right)\frac{bq^m+ac}{ba\,(q^m-1)}\cdots\frac{bq+ac}{ba(q-1)}\times$$

$$\times e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}\left[u^{v_1-m}w_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right)-t^{v_1-m}w_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]e^{bc^{-1}u}du.$$

Постоянный множитель в последней формуле тоже одинаковый для всех производных решения уравнения (1). Можно показать, что имеет место равенство

$$\int\limits_t^{+\infty}e^{-bc^{-1}s}\int\limits_s^{+\infty}\left[u^{v_1-m}w_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right)-s^{v_1-m}w_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right]e^{bc^{-1}u}du\,ds=$$

$$=\int\limits_t^{+\infty}e^{-bc^{-1}s}\int\limits_s^{+\infty}\left[\frac{d}{du}\left\{u^{v_1-m+1}w_{m-1}\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{ds}\left\{s^{v_1-m+1}w_{m-1}\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)\right\}\right]e^{bc^{-1}u}du\,ds=$$

$$=-e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}\left[u^{v_1-m+1}w_{m-1}\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right)-t^{v_1-m+1}w_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]e^{bc^{-1}u}du,$$

т. е. между слагаемым $z_1(t;a,b,c)$ в разложении решения $x_f\,(t;a,b,c)$ уравнения (1) и аналогичным слагаемым в разложении решения $x_f\big(t;a,bq^{-1},cq^{-1}\big)\overset{\mathrm{df}}{=}\int_\tau^t x_f\,(u;a,b,c)\,du+h$ уравнения

$$y'(t)=ay(t)+bq^{-1}y(qt)+cq^{-1}y'(qt),$$

где $h,\ \tau$ — некоторые постоянные [5] (обозначим его символом $z_1(t;a,bq^{-1},cq^{-1})$), существует связь

$$z_1\big(t;a,bq^{-1},cq^{-1}\big)=-\int\limits_t^{+\infty}z_1(s;a,b,c)\,ds$$

или

$$\frac{d}{dt}z_1\big(t;a,bq^{-1},cq^{-1}\big)=z_1(t;a,b,c).$$

Для функций $z_n(t;a,b,c)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{t}^{+\infty} z_{n+1}(s)\,ds = c^{-1}q^2 \int\limits_{q^{-1}t}^{+\infty} z_n\,(w)\,dw + \left(aqc^{-1} + bc^{-2}q^2\right) e^{-bc^{-1}t} \int\limits_{t}^{+\infty} e^{bc^{-1}u} \int\limits_{q^{-1}u}^{+\infty} z_n\,(w)\,dw\,du,$$

следовательно,

$$z_n\big(t; a, bq^{-1}, cq^{-1}\big) = -\int\limits_{t}^{+\infty} z_n(s; a, b, c)\,ds, \quad n \geq 1. \tag{22}$$

В случае $\operatorname{Re} bc^{-1} > 0$ соотношение, аналогичное (22), выполняется с точностью до слагаемых типа $e^{-bc^{-1}q^{-k}t}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тем не менее в разности

$$\hat{x}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dt} x_f\big(t; a, bq^{-1}, cq^{-1}\big) - x_f(t; a, b, c)$$

сократятся все слагаемые, кроме $\dfrac{d}{dt} z_n(t; a, bq^{-1}, cq^{-1})$ и $z_n(t; a, b, c)$, $n \geq 1$, для которых выполняется оценка $\hat{x}(t) = O(t^{v_1 - m})$, $t \to +\infty$. Так как $\hat{x}(t)$ — решение уравнения (1), то согласно [14] при достаточно большом m выполняется тождество $\hat{x}(t) = \gamma x_*(t)$, где γ — некоторая постоянная. Интегрирование решения $x_*(t)$ не составляет труда.

В случае $\operatorname{Re} bc^{-1} = 0$ обозначим функцию $H(t, t_0)$ в формуле (20) символом $H\big(t, t_0; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\big)$. Тогда для интегрирования решений уравнения (1) получаем соотношения

$$H'_s\,(t, s; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}) = -H'_t\,\big(t, s; a, bq^{p_0 - 1}, cq^{p_0 - 1}\big),$$

$$\frac{d}{dt}\!\left(\left(\frac{c^{-1}q^{-p_0+1}}{q^{-1}} \right)^{l} \int\limits_{q^{-l}t}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left(s^{v_1 - p_0 - (m-1)} w_{m-1} \left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}} \right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times H\Big(q^{-l}t, s; a, bq^{p_0-1}, cq^{p_0-1}\Big)\,ds \right) =$$

$$= \left(\frac{c^{-1}q^{-p_0}}{q^{-1}} \right)^{l} \int\limits_{q^{-l}t}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left(s^{v_1 - p_0 - m} w_m \left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}} \right) \right) H\Big(q^{-l}t, s; a, bq^{p_0}, cq^{p_0}\Big)\,ds.$$

Отметим, что в случае $\operatorname{Re} bc^{-1} = 0$ почти периодическая функция $x_*(t)$ определена при условии $|c| > q$.

Примененный в данной статье метод для исследования дифференциальных уравнений с линейным отклонением аргумента через фундаментальное решение с небольшими неточностями был впервые предложен в работе [12]. Его нельзя обобщить на системы таких уравнений без дополнительных весьма ограничивающих условий коммутируемости матриц. Тем не менее в [9] для систем уравнений вида (1) (но с бесконечным числом линейных запаздываний) был получен результат, подобный полученному в этой статье, который позволяет оценить аналитическое решение указанной системы. Полученная в [9] оценка близка к точной (в скалярном случае с одним опаздыванием), в то же время ее доказательство можно упростить при других предположениях, если проинтегрировать почти периодическое (ограниченное) решение, которое существует для системы уравнений вида (9) при достаточно большом p.

Литература

1. T. Kato, J. B. McLeod, *The functional-differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc., **77**, 891 – 937 (1971).
2. T. Kato, *Asymptotic behaviour of solutions of the functional-differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf. P. C. Utah, 1972), Ed. K. Schmitt, Academic, New York (1972).
3. N. G. de Bruijn, *The difference-differential equation* $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$, I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math., **15**, 449 – 464 (1953).
4. P. O. Frederickson, *Series solutions for certain functional-differential equations*, Lect. Notes. Math., **243**, 249 – 254 (1971).
5. J. Carr, J. Dyson, *The functional differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **74**, 165 – 174 (1976).
6. K. Mahler, *On a special functional equation,* J. London Math. Soc., **15**, 115 – 123 (1940).
7. N. G. de Bruijn, *The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations*, Amer. J. Math., **71**, № 2, 313 – 330 (1949).
8. N. G. de Bruijn, *On some linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen, **1**, 129 – 134 (1950).
9. Y. Liu, *Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays*, Eur. J. Appl. Math., **7**, № 1, 11 – 30 (1996).
10. V. Spiridonov, *Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials*, Phys. Rev. A, **52**, 1909 – 1935 (1995).
11. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений*, Нелінійні коливання, **19**, № 3, 311 – 348 (2016).
12. H. Lehninger, Y. Liu, *The functional-differential equation* $y'(t) = Ay(t) + By(qt) + Cy'(qt) + f(t)$, Eur. J. Appl. Math. **9**, 81 – 91 (1998).
13. A. Iserles, *On the generalized pantograph functional-differential equation*, Eur. J. Appl. Math. **4**, 1 – 38 (1993).
14. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом*, Нелінійні коливання, **15**, № 4, 466 – 493 (2012).
15. Е. Ю. Романенко, *Асимптотика решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений*, Укр. мат. журн., **41**, № 11, 1526 – 1532 (1989).
16. Е. Ю. Романенко, Т. С. Фещенко, *Об асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в окрестности критической точки*, Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1980), с. 107 – 121.
17. Е. Ю. Романенко, Т. С. Фещенко, *Оценка роста в окрестности критической точки решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений*, Динамические системы и дифференц. уравнения, Ин-т математики АН УССР, Киев (1986), с. 69 – 74.
18. Е. Ю. Романенко, *Представление локального общего решения одного класса дифференциально-функциональных уравнений*, Укр. мат. журн., **42**, № 2, 206 – 210 (1990).
19. Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский, *Асимптотика решений линейных дифференциально-функциональных уравнений*, Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1978), с. 5 – 39.
20. D. Derfel, P. J. Grabner, R. F. Tichy, *On the asymptotic behavior of the zeros of the solutions of a functional-differential equation with rescaling*, Indefinite Inner Product Spaces, Schur Analysis and Differential Equations, Eds D. Alpay, B. Kirstein, Springer, Int. Publ. (2018), p. 281 – 295.

Получено 10.03.19