УДК 517.9

А. Н. Станжицкий (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
С. Т. Мынбаева (Актюб. регион. гос. ун-т им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан; Ин-т математики и мат. моделирования, Алматы, Казахстан),
Н. А. Марчук (Подол. аграр.-техн. ун-т, Каменец-Подольский)

УСРЕДНЕНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The averaging method is applied to the investigation of the problem of existence of solutions of boundary-value problems for systems of differential and integrodifferential equations. It is shown that if the averaged boundary-value problem has a solution, then the original problem also has a solution. It is worth noting that, in this case, the system obtained as a result of averaging of a system of integrodifferential equations has the form of a simpler system of ordinary differential equations.

Метод усереднення застосовано до дослідження існування розв'язків крайових задач для систем диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь. Показано, що якщо усереднена крайова задача має розв'язок, то початкова задача також має розв'язок. При цьому усередненою для системи інтегро-диференціальних рівнянь є більш проста система звичайних диференціальних рівнянь.

Введение. Рассматриваются краевые задачи для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), \quad F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{1}$$

и

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds\right), \quad F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, X, F — d-мерные вектор-функции, φ — m-мерная вектор-функция.

При условии существования интегрального среднего

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x)dt \tag{3}$$

задаче (1) ставится в соответствие усредненная краевая задача

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y), \quad F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{4}$$

или в „медленном времени" $\tau = \varepsilon t$

$$\frac{dy}{d\tau} = X_0(y), \quad F\big(y(0), y(T)\big) = 0. \tag{5}$$

Аналогично для задачи (2), если $\varphi_1(t,x) = \int_0^t \varphi\big(t,s,x\big)ds$, то интегральное среднее имеет вид

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x,\varphi_1(t,x))dt, \tag{6}$$

а усредненная краевая задача — вид (4) или (5).

Целью работы является доказательство того факта, что если усредненные краевые задачи имеют решения, то и исходные краевые задачи (1), (2) при малых значениях параметра ε имеют решения, при этом устанавливается близость между соответствующими решениями точных и усредненных задач. Точная постановка задач и формулировки результатов приведены во втором пункте.

Интегро-дифференциальные уравнения являются математическими моделями многих реальных процессов, возникающих в различных областях естествознания, например в флуидной динамике, кинетической химии (см. [1 – 3] и приведенную в них библиографию). Такие уравнения появляются при изучении мультиволатильных популяций [4], при пространственно-временном развитии эпидемий [5] и др.

В данных моделях, как правило, возникают краевые задачи. Изучению краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений посвящено много работ (см. [6 – 12]).

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию краевых задач успешно применялся метод усреднения [13], позволяющий свести решение краевой задачи для неавтономной системы к исследованию аналогичной задачи для автономной усредненной системы. Метод усреднения разработан и для интегро-дифференциальных уравнений с последующим его применением к решению краевых задач (см., например, [14] и приведенную в ней библиографию). При этом для решения краевых задач он имеет еще большее значение, так как позволяет свести краевую задачу для интегро-дифференциальных уравнений к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе мы рассматриваем аналогичные вопросы как для обыкновенных, так и для интегро-дифференциальных уравнений. При этом для обыкновенных уравнений, в отличие от работы [13], где рассмотрена система с быстрыми и медленными переменными, мы рассматриваем систему только с медленными переменными. Однако сужение класса систем позволило нам ослабить некоторые условия работы [13], в частности опустить требование дважды гладкости функции $F(x,y)$ из краевого условия (1), заменив его равномерной непрерывностью первых производных, а также ослабить условие на матрицу Якоби $\dfrac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0}$ из (3).

Что касается применения метода усреднения к решению краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений, то, например, в работе [14] доказана только близость решений краевых задач для точных и усредненных уравнений при условии их существования. Само же существование решения краевой задачи (2) не доказывалось, в отличие от аналогичного результата из [13] для обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной статье мы доказываем существование и единственность решения краевой задачи (2), как это сделано в [13] для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы используем аналог первой теоремы

Боголюбова метода усреднения [15]. Однако эта теорема доказана в предположении существования глобального решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Этот вопрос для таких систем нетривиален, так как для них, в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не всегда возможно продолжение решения. В [15, 16] этот вопрос рассмотрен частично, однако при весьма жестких ограничениях. В связи с этим в данной работе мы доказываем теорему о существовании и единственности глобального решения задачи Коши до момента его выхода из области как для уравнений вольтерровского, так и фредгольмовского типов.

Заметим, что для существования решения краевой задачи (2) нам нужно использовать гладкость решения (2) по начальным данным. В связи с этим для систем интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа мы доказываем теоремы о непрерывной и непрерывно-дифференцируемой зависимости решений от начальных данных и параметров, а также записываем соответствующую систему в вариациях.

Работа состоит из введения и четырех пунктов. В первом пункте приведена постановка задач и сформулированы основные результаты. Второй и третий пункты имеют вспомогательный характер и касаются свойств решения задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений и усреднения уравнений в вариациях. В четвертом пункте доказаны основные результаты работы.

1. Постановка задач и основные результаты. Для задачи (1) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1.1) *функция $X(t,x)$ непрерывна в области $Q = \big\{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^d\big\}$ (D — область в $\mathbb{R}^d$) и имеет равномерно непрерывные по x из ρ-окрестности $y(\tau)$ частные производные, равномерно по $t \geq 0$, а $\dfrac{\partial X_0}{\partial x}$ непрерывна в ρ-окрестности $y(\tau)$;*

1.2) *в области Q функция $X(t,x)$ ограничена постоянной $M > 0$ и удовлетворяет по переменной x условию Липшица с постоянной $L > 0$;*

1.3) *равномерно по $x \in D$ существуют предел* (3), *а также предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)dt = \frac{\partial X_0}{\partial x};$$

1.4) *усредненная задача* (5) *имеет решение $y = y(\tau) = y(\varepsilon t)$, лежащее в области D с некоторой ρ-окрестностью, и в этой окрестности функция F имеет равномерно непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, при этом*

$$\det \frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0} \neq 0, \tag{7}$$

где $x_0 = y(0),\ F_0(x_0) = F(x_0, y(T, x_0))$.

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ можно указать функцию $\xi = \xi(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, такую, что краевая задача (1) *имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$, лежащее в $\xi(\varepsilon)$-окрестности $y(\varepsilon t)$, т. е.*

$$\big|x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)\big| < \xi(\varepsilon), \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{8}$$

В дальнейшем через $|\cdot|$ будем обозначать норму вектора, а через $\|\cdot\|$ — норму матрицы, согласованную с нормой вектора.

Относительно задачи (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1.5) *функция $X(t,x,y)$ непрерывна вместо со своими частными производными $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ в области $Q = \{t \geq 0, x \in D, y \in \mathbb{R}^m\}$, D — область в $\mathbb{R}^d$;*

1.6) *в области Q функция $X(t,x,y)$ ограничена постоянной $M > 0$ и удовлетворяет вместе с $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial X_0}{\partial x}$ по переменным x и y условию Липшица с постоянной $L > 0$;*

1.7) *функция $\varphi(t,s,z)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ в области $Q_1 = \{t \geq 0, s \geq 0, z \in D\}$, $\varphi\colon Q_1 \to \mathbb{R}^m$;*

1.8) *функция φ ограничена в Q_1 постоянной M и удовлетворяет вместе с $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ по z условию Липшица в форме*

$$\big|\varphi(t,s,z_1) - \varphi(t,s,z_2)\big| \leq \mu(t,s)\big|z_1 - z_2\big|,$$

при этом

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \mu(\tau,s)ds \to 0, \quad t \to \infty,$$

и интеграл $\displaystyle\int_0^s \mu(s,\tau)d\tau$ ограничен при $s \geq 0$ некоторой постоянной μ_0;

1.9) *равномерно по $x \in D$ существуют предел* (6), *а также предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial X(t,x,\varphi_1(t,x))}{\partial x} + \frac{\partial X(t,x,\varphi_1(t,x))}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi_1(t,x)}{\partial x}\right) dt = \frac{\partial X_0}{\partial x};$$

1.10) *выполнено условие* 1.4 *теоремы* 1.

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ можно указать функцию $\xi = \xi(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, такую, что краевая задача (2) *имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$, лежащее в $\xi(\varepsilon)$-окрестности $y(\varepsilon t)$, т. е.*

$$\big|x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)\big| < \xi(\varepsilon), \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

2. Задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. В этом пункте рассмотрим задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi(t,s,x(s))ds\right), \quad x(0) = x_0. \tag{9}$$

Будут изучены вопросы нелокального существования и единственность решения задачи Коши (9), а также его зависимость от начальных данных и параметров. Относительно задачи (9) имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

2.1) *функция* $X(t,x,y)$ *определена и непрерывна в области* $t \in [0,T]$, $x \in D$, D — *область в* $\mathbb{R}^d$, ∂D — *ее граница,* $\overline{D} = D \cup \partial D$, $y \in D_1$, D_1 — *область в* $\mathbb{R}^m$;

2.2) $\varphi(t,s,z)$ *определена и непрерывна в* $Q_1 = \big\{[0,T]\times[0,T]\times D\big\}$ *и* $\varphi\colon Q_1 \to D_1$;

2.3) X *удовлетворяет по* x, y *условию линейного роста и условию Липшица, т. е. существуют такие постоянные* $M>0$ *и* $L>0$, *что для* $t \in [0,T]$, $x, x_1 \in D$, $y, y_1 \in D_1$

$$\big|X(t,x,y)\big| \le M\big(1+|x|+|y|\big), \tag{10}$$

$$\big|X(t,x,y) - X(t,x_1,y_1)\big| \le L\big(|x-x_1|+|y-y_1|\big), \tag{11}$$

где через $|\cdot|$ *обозначена евклидова норма в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\mathbb{R}^m$;

2.4) φ *удовлетворяет по* z *условию Липшица с постоянной* L, *для всех* $t,s \in [0,T]$ *и* $z, z_1 \in D$ *имеем*

$$\big|\varphi(t,s,z) - \varphi(t,s,z_1)\big| \le L\big|z-z_1\big|, \tag{12}$$

и ограничена в Q_1 *постоянной* M.

Пусть также область D_1 *содержит шар радиуса* TM.

Тогда если отрезок $|x-x_0| \le b$ *содержится в* D, *то решение задачи Коши* (9) *существует и единственно на интервале* $0 \le t \le h$, *где*

$$h = \min\left\{T, \frac{b}{N}\right\}, \quad N = \max_{|x-x_0|\le b, |y| \le TM, t\in[0,T]} |X(t,x,y)|.$$

При этом оно однозначно продолжается до момента его выхода на ∂D.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $x_0(t) \equiv 0$, а $x_n(t)$ — решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_n(t) = X\left(t, x_n, \int\limits_0^t \varphi(t,s,x_{n-1}(s))ds\right), \quad x_n(0) = x_0. \tag{13}$$

Поскольку функция φ ограничена постоянной M, а область D_1 содержит шар радиуса TM, то при каждом n для системы (13) справедливы условия теоремы Пикара. Поэтому последовательность функций $\{x_n(t)\}$ определена на отрезке $[0,a_n]$, где $a_n = \min\left\{T, \dfrac{b}{M_n}\right\}$, $M_n = \max_{t\in[0,T], |x-x_0|\le b} \left|X\left(t,x,\int_0^t \varphi(t,s,x_{n-1}(s))ds\right)\right|$, но

$$M_n \le \max_{t\in[0,T], |x-x_0|\le b, y\in B_{TM}(0)} \big|X\big(t,x,y\big)\big|. \tag{14}$$

Здесь $B_{TM}(0)$ — шар в R^m с центром в нуле радиуса TM. Так что $a_n \ge \min\left\{T, \dfrac{b}{M_n}\right\} = a$ для любого n. Поэтому для каждого n последовательность $x_n(t)$ определена на общем отрезке $[0,a]$. Выберем теперь $h_0 \le a$ так, чтобы

$$\frac{L^2 h_0^2}{1-Lh_0} < 1. \tag{15}$$

Покажем равномерную на $[0,h_0]$ сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$. Действительно, на $[0,h_0]$ имеем

$$\left|x_n(t) - x_{n-1}(t)\right| \le L \int\limits_0^t \left|x_n(s) - x_{n-1}(s)\right| ds + L^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \left|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\right| ds.$$

Отсюда

$$\sup_{t\in[0,h_0]} \left|x_n(t) - x_{n-1}(t)\right| \le Lh_0 \sup_{t\in[0,h_0]} \left|x_n(t) - x_{n-1}(t)\right| + (Lh_0)^2 \sup_{t\in[0,h_0]} \left|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\right|.$$

Так,

$$\sup_{t\in[0,h_0]} \left|x_n(t) - x_{n-1}(t)\right| \le \frac{(Lh_0)^2}{1 - Lh_0} \sup_{t\in[0,h_0]} \left|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\right|. \tag{16}$$

Из (15) следует равномерная на $[0, h_0]$ сходимость последовательности $x_n(t) \rightrightarrows x^{(0)}(t)$. Предельным переходом в интегральном равенстве

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{n-1}(s)) ds\right) d\tau \tag{17}$$

убеждаемся, что $x^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x^{(0)}(t) = x_0 + \int\limits_0^t X\left(\tau, x^{(0)}(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi\big(\tau, s, x^{(0)}(s)\big) ds\right) d\tau, \tag{18}$$

т. е. является решением задачи Коши для системы

$$\dot{x} = X\left(\tau, x, \int\limits_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big) ds\right), \quad x(0) = x_0, \tag{19}$$

на $[0, h_0]$.

Покажем теперь, что это решение можно продолжить вправо, до момента его выхода на ∂D. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого компакта* K, *целиком содержащегося в области* $Q = \{(0, T) \times \times D\}$, *решение* $x(t)$ *задачи* (19) *можно продолжить до точки* t_+ *так, что* $(t_+, x(t_+))$ *не принадлежит* K.

Доказательство. Действительно, если точка $\big(h_0, x^{(0)}(h_0)\big)$ принадлежит K, то утверждение доказано. Пусть $\big(h_0, x^{(0)}(h_0)\big)$ не принадлежит K. Тогда применим проведенные выше рассуждения. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n(t)\}$ таких, что $x_n(t) \equiv x^{(0)}(t)$ при $t \in [0, h_0]$, а для $t > h_0$ определим их, как решения задач Коши систем (13) с начальными данными $x_n(h_0) = x^{(0)}(h_0)$.

Покажем теперь, что все они определены на общем отрезке $[h_0, h_0 + h_1]$, где h_1 не зависит от выбора n и точки $\big(h_0, x^{(0)}(h_0)\big)$.

Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для каждой точки $\big(t', x'\big) \in K$ квадрат

$$\Pi_\varepsilon\big(t', x'\big) = \big\{(t, x) \in D \colon \left|t - t'\right| \le \varepsilon, \left|x - x'\right| \le \varepsilon\big\}$$

целиком лежал в D. Тогда

$$K_\varepsilon = \overline{\bigcup_{(t',x')\in K} \Pi_\varepsilon(t',x')} \subset D$$

и $\Pi_\varepsilon(t',x') \subset K_\varepsilon$, если $(t',x') \in K_\varepsilon$. И, как следствие, отсюда получаем

$$\max_{(t,x)\in\Pi_\varepsilon(t',x'),y\in B_{TM}(0)} \leq M_\varepsilon = \max_{(t,x)\in K_\varepsilon,y\in B_{TM}(0)} \big|X(t,x,y)\big|.$$

Из теоремы Пеано, примененной к квадрату $\Pi_\varepsilon(t',x')$, следует, что решения $x_n(t)$ системы (13) с начальными данными $\big(h_0, x^{(0)}(h_0)\big)$ существуют на отрезке $[h_0, h_0+h_1]$, где $h_1 = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{M_\varepsilon}\right\}$. Далее выберем h_1 так, чтобы для него выполнялось условие

$$\frac{(Lh_1)^2}{1-Lh_1} < 1.$$

Тогда при $t \in [h_0, h_0+h_1]$ получим

$$\sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big| \leq$$

$$\leq L \int_{h_0}^{h_0+h_1} \big|x_n(s) - x_{n-1}(s)\big| ds + \int_{h_0}^{h_0+h_1} L^2 \left(\int_0^\tau \big|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\big| ds\right) d\tau. \tag{20}$$

Но в силу построения $x_n(t)$

$$\int_0^{h_0} \big|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\big| ds = 0.$$

Поэтому (20) можно записать в виде

$$\sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big| \leq Lh_1 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big| +$$

$$+L^2 \int_{h_0}^{h_0+h_1} d\tau \left(\int_0^\tau \big|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\big| ds\right) \leq Lh_1 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big| +$$

$$+(Lh_1)^2 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\big|.$$

Отсюда получим неравенство

$$\sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big| \leq \frac{(Lh_1)^2}{1-Lh_1} \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} \big|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)\big|,$$

из которого и следует равномерная на $[h_0, h_0+h_1]$ сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ к предельной функций $x^{(1)}(t)$. Предельным переходом в равенстве

$$x_n(t) = x^{(0)}(h) + \int\limits_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi\big(\tau, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)d\tau$$

убеждаемся, что $x^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x^{(1)}(t) = x^{(0)}(h) + \int\limits_h^t X\left(\tau, x^{(1)}(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi\big(\tau, s, x^{(1)}(s)\big)ds\right)d\tau.$$

Теперь функция

$$x(t) = \begin{cases} x^{(0)}(t), & t \in [0, h_0], \\ x^{(1)}(t), & t \in [h_0, h_0 + h_1], \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (19) как на интервалах $[0, h_0]$, так и на $[h_0, h_0 + h_1]$. При этом левая и правая производные функции $x(t)$ в точке h_0 существуют и равны соответственно $X\left(h_0, x^{(0)}(h_0), \int_0^{h_0} \varphi\big(h_0, s, x^{(0)}(s)\big)ds\right)$ и $X\left(h_0, x^{(1)}(h_0), \int_0^{h_0} \varphi\big(h_0, s, x^{(1)}(s)\big)ds\right)$. Но по построению $x^{(1)}(t)$ эти значения совпадают. Таким образом, $x(t)$ является решением задачи Коши (19) на $[0, h + h_1]$.

Если точка $(h_0 + h_1, x(h_0 + h_1))$ не принадлежит K, то лемма доказана. Если же $(h_0 + {} + h_1, x(h_0 + h_1))$ принадлежит K, то повторяем данную процедуру на отрезке $[h_0 + h_1, h_0 + 2h_1]$. Поскольку K ограничено, то за конечное число шагов мы выйдем из компакта K.

Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Поскольку компакт K был выбран произвольно, то решение $x(t)$ достигнет границы области D. Единственность такого решения и его непрерывная зависимость от начальных данных следуют из аналога леммы Гронуолла [15] (теорема 2.1).

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 1.** Условие ограниченности функции φ не является необходимым и взято для технического удобства. Немного изменив доказательство теоремы 3, нетрудно показать, что она остается в силе, если условие ограниченности функции $\varphi(t, s, z)$ заменить условием ее линейного по z роста:

$$\big|\varphi(t, s, z)\big| \leq M\big(1 + |z|\big).$$

Рассмотрим теперь задачу Коши типа (9) с параметром

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi\big(t, s, x(s), \lambda\big)ds, \lambda\right), \quad x(0) = x_0. \tag{21}$$

При этом ее решение уже является функцией от x_0 и λ, $x(t) = x(t, x_0, \lambda)$. Изучим вопрос зависимости решения от начальных данных и параметров. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

2.9) *функция* $X(t, x, y, \lambda)$ *определена и непрерывна в области* $Q = \big\{t \in [0, T],\ x \in D,\ y \in {} \in D_1,\ \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\big\}$, *где* D *и* D_1 *— те же области, что и в теореме* 3;

2.10) $\varphi(t, s, z, \lambda)$ *определена и непрерывна в области* $Q_1 = \big\{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in {} \in D, \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\big\}$ *и* $\varphi\colon Q_1 \to D_1$;

2.11) $X(t,x,y,\lambda)$ *равномерно относительно* λ *удовлетворяет по* $x,\ y$ *условию линейного роста и условию Липшица* (10);

2.12) $\varphi(t,s,z,\lambda)$ *равномерно относительно* λ *удовлетворяет по* z *условию Липшица* (12), *т. е.*

$$\big|\varphi(t,s,z,\lambda)-\varphi(t,s,z_1,\lambda)\big|\leq L\big|z-z_1\big|,$$

и ограничена в Q_1 *постоянной* M.

Пусть также область D_1 *содержит шар* $B_{TM}(0)$.

Тогда при $x_0\in D$ *и* $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]$ *для решения задачи Коши* (21) *справедливо заключение теоремы* 3 *и решение* $x(t,x_0,\lambda)$ *является непрерывной функцией по совокупности аргументов в области* $\big\{t\in[0,h],x_0\in D,\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]\big\}$.

Доказательство. Применим к построению решения задачи Коши (21) теорему 3. В результате получим последовательность функций $\{x_n(t,x_0,\lambda)\}$, которая по построению будет непрерывно зависеть от x_0 и λ. При этом, в силу равномерности по λ условий леммы 2, эта последовательность будет иметь равномерно по $t,\ x_0$ и λ сходящуюся к решению задачи (21) подпоследовательность, что в силу единственности решения задачи (21) и доказывает лемму.

Для дальнейшего важным является вопрос непрерывной дифференцируемости решений задачи (9) по начальным данным.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и при этом частные производные* $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ *непрерывны по совокупности аргументов в указанных областях. Тогда решение задачи Коши* (9) *является непрерывно дифференцируемой функцией параметра* x_0 *и при этом функция* $z(t)=\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t,x_0)$ *удовлетворяет линейному интегро-дифференциальному уравнению*

$$\dot z=\frac{\partial X\left(t,x(t,x_0),\displaystyle\int_0^t\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)ds\right)}{\partial x}\,z(t)+$$

$$+\frac{\partial X\left(t,x(t,x_0),\displaystyle\int_0^t\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)ds\right)}{\partial y}\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)}{\partial z}\,z(s)ds. \tag{22}$$

Замечание **2.** По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями уравнение (22) назовем уравнением в вариациях.

Доказательство. Идейно доказательство похоже на доказательство утверждения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, не вдаваясь в подробности, все выкладки проведем для $d=m=1$. Для многомерного случая рассуждения аналогичны. Обозначим $\widetilde{x}(t)=x(t,x_0+\Delta x_0),\ x(t)=x(t,x_0)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t,x_0+\Delta x_0)-x(t,x_0)}{\Delta x_0}\right)=\frac{\partial X\left(t,x(t)+\theta\big(\widetilde{x}(t)-x(t)\big),\displaystyle\int_0^t\varphi\big(t,s,\widetilde{x}(s)\big)ds\right)}{\partial x}\times$$

$$\times\frac{\widetilde{x}(t)-x(t)}{\Delta x_0}+\frac{\partial X\left(t,x(t),\displaystyle\int_0^t\varphi\big(t,s,x(s)\big)ds+\theta_1\int_0^t\big(\varphi\big(t,s,\widetilde{x}(s)\big)-\varphi\big(t,s,x(s)\big)\big)\,ds\right)}{\partial y}\times$$

$$\times \int_0^t \frac{\partial\varphi\big(t, s, x(s) + \theta_2(\widetilde{x}(s) - x(s))\big)}{\partial z} \frac{\widetilde{x}(s) - x(s)}{\Delta x_0} ds, \tag{23}$$

$$\theta, \theta_1, \theta_2 \in (0, 1).$$

Уравнение (23) является линейным уравнением относительно функции $\dfrac{\widetilde{x}(t) - x(t)}{\Delta x_0}$, при этом его коэффициенты, в силу условий леммы, непрерывно зависят от Δx_0, как от параметра. Следовательно, и решение уравнения (23), в силу леммы 2, непрерывно зависит от Δx_0. Выполнив предельный переход в (23), при $\Delta x_0 \to 0$ получим утверждение леммы.

Замечание **3.** Изучение гладкости решения задачи Коши (21) по параметру сводится к гладкости по начальным данным, следовательно, в предположении гладкости функций $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$, $\dfrac{\partial X}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ и при выполнении условий леммы 3 решение задачи Коши (21) непрерывно дифференцируемо по λ.

3. Леммы об усреднении уравнений в вариациях. Для получения основных результатов нам понадобятся две леммы об усреднении, касающиеся близости производных по начальным данным решений от точных и усредненных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (4) и интегро-дифференциальных уравнений (2), (4).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1.1 – 1.4 *и функции* $\dfrac{\partial X(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X_0(t,x)}{\partial x}$ *равномерно непрерывны по x из ρ-окрестности решения $y(\tau)$ равномерно по $t \geq 0$.*

Тогда для производных по начальным данным решений точных и усредненных задач $\left.\dfrac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=x_0}$ *и* $\left.\dfrac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\right|_{z=x_0}$ *справедливо утверждение: для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство*

$$\left\| \left.\frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=x_0} - \left.\frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\right|_{z=x_0} \right\| \leq \eta$$

при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$.

Для систем интегро-дифференциальных уравнений справедлив аналогичный результат.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1.5 – 1.10, *функции* $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial X_0}{\partial x}$ *липшицевы с постоянной L по $x \in D$ и $y \in \mathbb{R}^m$, а* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ *удовлетворяет по z условию Липшица в форме* 1.8.

Тогда для производных по начальным данным решений точных (2) *и усредненных* (4) *уравнений для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство*

$$\left\| \left.\frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=x_0} - \left.\frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\right|_{z=x_0} \right\| \leq \eta \tag{24}$$

при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$.

Поскольку лемма 4 является следствием леммы 5, проведем доказательство только леммы 5.

Доказательство леммы **5.** Обозначим $\left.\dfrac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=x_0} = z(t)$, а $\left.\dfrac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\right|_{z=x_0} = z_1(t)$. Тогда, согласно лемме 3, $z(t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot z = \varepsilon\left[\frac{\partial X\left(t, x(t,x_0,\varepsilon), \int_0^t \varphi(t,s,x(s,x_0,\varepsilon))ds\right)}{\partial x} z(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X\left(t, x(t,x_0,\varepsilon), \int_0^t \varphi(t,s,x(s,x_0,\varepsilon))ds\right)}{\partial y} \int\limits_0^t \frac{\partial \varphi(t,s,x(s,x_0,\varepsilon))}{\partial z} z(s)ds\right],$$

а $z_1(t)$ — уравнению в вариациях вида

$$\dot z_1 = \varepsilon\,\frac{\partial X_0\big(y(\varepsilon t,x_0)\big)}{\partial x}\,z_1$$

с начальными условиями, равным единичным ортам.

Из аналога первой теоремы Боголюбова для интегро-дифференциальных уравнений следует существование такого $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ решение $x(t,x_0,\varepsilon)$ точной системы (2) принадлежит области D при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$. Следовательно, для него выполнена оценка

$$\big|x(t,x_0,\varepsilon)\big| \le |x_0| + TM, \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right].$$

Аналогичная оценка справедлива и для решения усредненной задачи. Из липшицевости функций X, X_0, φ следует, что

$$|z(t)| \le |z(0)| + \varepsilon \int\limits_0^t \left(L|z(s)| + \int\limits_0^s \mu(s,\tau)|z(\tau)|d\tau \right) ds.$$

Поэтому в силу аналога неравенства Гронуолла [8, с. 58] имеем

$$|z(t)| \le |z(0)| e^{\varepsilon \int_0^t \left(L + \int_0^s \mu(s,\tau)d\tau\right) ds} \le |z(0)|e^{LK},$$

при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, где $K > 0$ — некоторая константа.

Используя стандартную лемму Гронуолла, аналогичную оценку можно получить и для $z_1(t)$:

$$|z_1(t)| \le |z_1(0)| e^{L}.$$

Зафиксируем $\eta > 0$ и оценим на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ разность $z(t) - z_1(t)$. Далее положим $x(t,x_0,\varepsilon) = x(t)$, $y(\varepsilon t, x_0) = y(t)$. Тогда

$$|z(t) - z_1(t)| =$$

$$= \varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)}{\partial x} - \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial x} \right] z(s)ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)}{\partial y} \int\limits_0^s \frac{\partial\varphi(s,\tau,x(\tau))}{\partial z} z(\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y} \int\limits_0^s \frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z} z(\tau)\, d\tau \right] ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial x} \big(z(s) - z_1(s)\big)\, ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(\tau))\right) d\tau}{\partial x} z_1(s)ds + \varepsilon \int\limits_0^t \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y} \times$$

$$\times \int\limits_0^s \frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial x} z(\tau)d\tau ds - \varepsilon \int\limits_0^t \frac{\partial X_0(y(s))}{\partial x} z_1(s)ds. \qquad (25)$$

Оценим первое слагаемое в (25). Учитывая липшицевость $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ и ограниченность $z(t)$, это слагаемое оцениваем выражением

$$\left(\varepsilon L \int\limits_0^t L|x(s) - y(s)|ds + \varepsilon L \int\limits_0^t ds \int\limits_0^s \mu(s,\tau)|x(\tau) - y(\tau)|d\tau \right) |z(0)|e^{LK}. \qquad (26)$$

Из аналога первой теоремы Боголюбова для интегро-дифференциальных уравнений следует возможность выбора такого $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ выражение (26) не превышает $\dfrac{\eta}{a}$. Здесь $a > 0$ — постоянная, определенная ниже, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a)$.

Второе слагаемое в (25) оценивается выражением

$$\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)}{\partial y} \int\limits_0^s \left(\frac{\partial\varphi(s,\tau,x(\tau))}{\partial z} - \frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z} \right) z(\tau)d\tau \right] ds +$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,x(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z}z(\tau)d\tau\right]ds.$$

В силу условий Липшица последнее выражение по норме не превышает выражения

$$\varepsilon\int\limits_0^t Lds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|x(\tau)-y(\tau)|\,|z(\tau)|d\tau+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t L\left(|x(s)-y(s)|+\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|x(\tau)-y(\tau)|d\tau+\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|z(\tau)|d\tau\right)ds. \tag{27}$$

Выражение (27) не превышает при $\varepsilon\le\varepsilon_2$ выражения

$$\varepsilon\,\frac{\eta L}{a}\,|z(0)|e^{LK}\varepsilon\left(\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau+\frac{T}{\varepsilon}\,L+\mu_0\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau\right).$$

С учетом оценок (26), (27) выражение (25) теперь оценивается выражением

$$\frac{\eta}{a}+\frac{\eta}{a}\,L|z(0)|e^{LK}\big(T+TL+\mu_0T\big)+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial x}\,(z(s)-z_1(s))+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z}\,(z(\tau)-z_1(\tau))d\tau\right]ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial x}z_1(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z}\,z_1(\tau)d\tau-\frac{\partial X_0(y(s))}{\partial x}\,z_1(s)\right]ds. \tag{28}$$

Оценим последнее слагаемое в (28), записав его в виде

$$\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial x}\right]z_1(s)ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z}z_1(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(s))}{\partial z}z_1(s)d\tau\right]ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int\limits_0^s\varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(s))}{\partial z}-\frac{\partial X_0(y(s))}{\partial x}\right]z_1(s)ds. \qquad (29)$$

Первое слагаемое в (29) допускает оценку

$$\varepsilon L\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|y(s)-y(\tau)|d\tau|z_1(0)|e^L\le\varepsilon LMT\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau|z_1(0)|e^L. \qquad (30)$$

В силу условия 1.5 существует монотонно стремящаяся к нулю при $t\to\infty$ функция $\psi_1(t)$ такая, что

$$\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau\le t\psi_1(t).$$

Поэтому (30) не превышает выражения

$$\varepsilon LMT\psi_1(t)|z_1(0)|e^L\le TLM\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\tau\psi_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)|z_1(0)|e^L=\delta(\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon\to 0, \qquad (31)$$

в силу теоремы Дини.

Оценим второе слагаемое в (29), представив его в виде

$$\varepsilon\int\limits_0^t\left(\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)}{\partial y}-\right.\right.$$

$$-\frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial y}\Bigg] \int\limits_0^s \frac{\partial \varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z} z_1(\tau)d\tau ds\Bigg)+$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi(s,\tau,y(s))d\tau\right)}{\partial y}\left(\int\limits_0^s \frac{\partial \varphi(s,\tau,y(\tau))}{\partial z} - \int\limits_0^s \frac{\partial \varphi(s,\tau,y(s))}{\partial z}\right) z_1(s)d\tau\right] ds. \tag{32}$$

Первое слагаемое в (32) не превышает по норме выражения

$$\varepsilon LMT\mu_0 \int\limits_0^t ds \int\limits_0^s \mu(s,\tau)d\tau |z_1(0)| e^L \le \mu_0\delta(\varepsilon).$$

Второе слагаемое в (32) оценивается, аналогично (30), выражением

$$\varepsilon L \int\limits_0^t ds \left(\int\limits_0^s \mu(s,\tau)|y(\tau)-y(s)|d\tau |z_1(s)|\right) = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, второе слагаемое в (29) не превышает выражения

$$(\mu_0+1)\delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{33}$$

Осталось оценить третье слагаемое в (29). Запишем его в виде

$$\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\big(s,y(s),\varphi_1(s,y(s))\big)}{\partial x} + \frac{\partial X\big(s,y(s),\varphi_1(s,y(s))\big)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1(s,y(s))}{\partial z} - \frac{\partial X_0(y(s))}{\partial x}\right] z_1(s)ds. \tag{34}$$

Распространим интегрирование на весь интервал $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, считая, что справа от t подынтегральное выражение равно нулю. Разделим интервал $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ на n равных частей точками $\big\{t_i\big\}_1^n$. Тогда (34) примет вид

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{\partial X\big(s,y(s),\varphi_1(s,y(s))\big)}{\partial x} z_1(s) - \frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x} z_1(t_i)\right) ds+\right.$$

$$+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{\partial X\big(s,y(s),\varphi_1(s,y(s))\big)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1(s,y(s))}{\partial z} z_1(s)-\right.$$

$$-\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}\,z_1(t_i)\Bigg)\,ds+$$

$$+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X_0(y(t_i))}{\partial x}\,z_1(t_i)-\frac{\partial X_0(y(s))}{\partial x}\,z_1(s)\right)ds\Bigg]+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Bigg(\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0(y(t_i))}{\partial x}\Bigg)\,dsz_1(t_i). \tag{35}$$

Оценим каждое слагаемое в (35). Первое слагаемое в первой сумме не превышает выражения

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Bigg[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Bigg\|\left(\frac{\partial X\big(s,y(s),\varphi_1(s,y(s))\big)}{\partial x}-\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x}\right)z_1(s)+$$

$$+\frac{\partial X(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i)))}{\partial x}(z_1(s)-z_1(t_i))\Bigg\|ds\Bigg]\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(L|y(s)-y(t_i)|+L\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|y(s)-y(t_i)|d\tau\right)\right]ds\le$$

$$\le\frac{LMT^2(1+\mu_0)}{n}\,|z_1(0)|e^L. \tag{36}$$

Третье слагаемое в первой сумме оценивается величиной

$$\frac{LMT^2}{n}+\frac{(LT)^2}{n}. \tag{37}$$

С учетом (36) и (37) первое и третье слагаемые в первой сумме в (35) оцениваются выражением

$$\frac{LMT^2}{n}\big((1+\mu_0)|z_1(0)|e^L+1\big)+2\frac{(LT)^2}{n}+\frac{LMT^2}{n}. \tag{38}$$

Аналогично для второго слагаемого получаем с некоторой постоянной $A=A(L,M,T,\mu_0,|z_1(0)|)$ оценку $\dfrac{A}{n}$.

Оценим теперь последнее слагаемое в (35). Очевидно, оно не превышает выражения

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Bigg(\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x}+\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-$$

$$-\frac{\partial X_0(y(t_i))}{\partial x}\Bigg)ds\Bigg\|\,|z_1(t_i)| \leq |z_1(0)|e^L\Bigg(\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg\|\int\limits_0^{t_{i+1}}\Bigg(\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0(y(t_i))}{\partial x}\Bigg)ds\Bigg\|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg\|\int\limits_0^{t_i}\Bigg(\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial X\big(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i))\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0(y(t_i))}{\partial x}\Bigg)ds\Bigg\|\Bigg). \tag{39}$$

В силу условия 1.6 можно указать монотонно стремящуюся к нулю при $t\to\infty$ функцию $\psi(t)$ такую, что

$$\Bigg\|\int\limits_0^t\Bigg(\frac{\partial X\big(s,x,\varphi_1(s,x)\big)}{\partial x}+\frac{\partial X\big(s,x,\varphi_1(s,x)\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_1(s,x)}{\partial x}-\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}\Bigg)\,ds\Bigg\|\leq t\psi(t)$$

равномерно по $x\in D$. Поэтому (39) оценивается выражением

$$|z_1(0)|e^L\left(\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}t_{i+1}\psi(t_{i+1})+\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}t_i\psi(t_i)\right). \tag{40}$$

Если t в (34) принадлежит любому интервалу $[t_i,t_{i+1}]$, $i\geq 1$, то (40) оценивается величиной

$$2|z_1(0)|e^LT\psi\left(\frac{T}{\varepsilon n}\right). \tag{41}$$

Если же $t\in\left[0,\dfrac{T}{\varepsilon_n}\right]$, то выражение (35) оценивается величиной

$$|z_1(0)|e^L\varepsilon t\psi(t)=|z_1(0)|e^L\tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\leq|z_1(0)|e^L\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)=\delta_1(\varepsilon)\to 0,\quad\varepsilon\to 0, \tag{42}$$

в силу теоремы Дини.

Выбором достаточно большого n выражения (38) можно сделать меньше $\dfrac{\eta}{a}$. Зафиксировав теперь n, выберем достаточно малое ε так, чтобы выражения (41) и (42) также сделать меньшими $\dfrac{\eta}{a}$.

Из (28) с учетом оценок (31), (33), (38), (41) и (42) для разности $z(t)-z_1(t)$ имеем оценку

$$|z(t)-z_1(t)|\leq\frac{\eta}{a}+\frac{\eta}{a}L|z(0)|e^{LK}(T+TL+\mu_0T)+\delta(\varepsilon)(2+\mu_0)+\frac{\eta}{a}+\frac{\eta}{a}+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left(L|z(s)-z_1(s)|+L\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|z(\tau)-z_1(\tau)|d\tau\right)ds,$$

откуда с учетом аналога неравенства Гронуолла [15, с. 58] надлежащим выбором $a > 0$ получаем оценку (24).

Лемма 5 доказана.

4. Доказательства теорем. ***Доказательство теоремы* 1.** Согласно условию 1.4 усредненная задача (4) имеет решение $y(\tau) = y(\varepsilon t)$, которое при $\tau \in [0, T]$ или при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ лежит в D вместе с некоторой фиксированной ρ-окрестностью.

Пусть $x_0 = y(0)$ — начальное значение этого решения. Решение краевой задачи (1) будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon), \tag{43}$$

где $\overline{x}$ выбирается из некоторой окрестности нуля. Рассмотрим решение усредненной задачи $y(\tau, x_0 + \overline{x})$. Тогда для разности $y(\tau)$ и $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ справедлива оценка

$$|y(\tau) - y(\tau, x_0 + \overline{x})| \leq |\overline{x}| e^{LT} \tag{44}$$

до момента выхода $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ на границу области D. Следовательно, если

$$|\overline{x}| < \frac{\rho}{2} e^{-LT},$$

то решение $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ существует при $\tau \in [0, T]$ и лежит в $\dfrac{\rho}{2}$-окрестности $y(\tau)$.

Неизвестный параметр $\overline{x}$ в (43) будем определять из уравнения

$$F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right) = 0. \tag{45}$$

Отметим, что в силу первой теоремы Боголюбова метода усреднения решение $x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)$ точной системы при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует на отрезке $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ и при выполнении (3) для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива оценка

$$|x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon) - y(\varepsilon t, x_0 + \overline{x})| < \eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{46}$$

Следовательно, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, если ε_0 достаточно мало, отображение, содержащееся в левой части (45), как отображение по $\overline{x}$, определено корректно в шаре $B_r(0)$, где $r \leq \dfrac{\rho}{2} e^{-LT}$. Отметим также, что поскольку $y(\tau)$ при $\tau \in [0, T]$ является ограниченной функцией, то в силу оценок (44) и (46) $x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon)$ лежит в ограниченной области при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Поэтому отображение $F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right)$ непрерывно по $\overline{x}$ и имеет равномерно непрерывные в $B_r(0)$ частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в силу условия 1.4. Следовательно, существует постоянная $N(r) > 0$ такая, что $\left\|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right\| \leq N(r)$ и $\left\|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right\| \leq N(r)$ при $\overline{x} \in B_r(0)$.

Далее

$$F\left(x_0+\overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x}, \varepsilon\right)\right) = F\left(x_0+\overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x}, \varepsilon\right)\right) -$$

$$-F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big) + F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big) - F(x_0, y(T, x_0)).$$

Обозначим $R_1(\overline{x}, \varepsilon) = F\left(x_0+\overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x}, \varepsilon\right)\right) - F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big)$. Для него справедлива оценка

$$|R_1(\overline{x}, \varepsilon)| \leq N(r)\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x}, \varepsilon\right) - y(T, x_0+\overline{x})\right| \leq N(r)\eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{47}$$

в силу (46). Имеем

$$F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big) - F(x_0, y(T, x_0)) =$$

$$= \left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x} + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial x_0}\right)\overline{x} +$$

$$+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\overline{x}, y(T, x_0+s\overline{x})\big)}{\partial x} - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x}\right)\overline{x}\, ds +$$

$$+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\overline{x}, y(T, x_0+s\overline{x})\big)}{\partial y}\left.\frac{\partial y(T, x_0+s\overline{x})}{\partial z}\right|_{z=x_0+s\overline{x}} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\left.\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\right|_{z=x_0}\right)\overline{x}\, ds =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y(T, x_0)) + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\left.\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\right|_{z=x_0}\right)\overline{x} + R_2(\overline{x})\overline{x} + R_3(\overline{x})\overline{x}. \tag{48}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (48). Для первого получим в силу обозначения $F_0(x_0)$ в (7) следующее представление:

$$\left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x} + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\left.\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\right|_{z=x_0}\right)\overline{x} = \frac{\partial F_0}{\partial x_0}\overline{x}.$$

Для второго слагаемого, в силу равномерной непрерывности частных производных и (44), при $|\overline{x}| \leq r$ имеем оценку

$$|R_2(\overline{x})| \leq \delta(r) \to 0, \quad r \to 0,$$

где $r \leq \frac{\rho}{2}e^{-LT}$.

Для оценки третьего слагаемого заметим, что производная по начальным данным $\frac{\partial y(T, z)}{\partial z}$ удовлетворяет линейному уравнению в вариациях, поэтому является непрерывно дифференцируемой функцией параметра z. Так что, согласно равномерной непрерывности и (44), аналогично предыдущему для $|\overline{x}| \le r$ получаем оценку

$$|R_3(\overline{x})| \le \delta_1(r) \to 0, \quad r \to 0. \tag{49}$$

Теперь уравнение (45) для определения $\overline{x}$ можно записать в виде

$$\overline{x} = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} \big(R_1(\overline{x}, \varepsilon) + \big(R_2(\overline{x}) + R_3(\overline{x})\big)\overline{x}\big), \quad \overline{x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\overline{x}, \varepsilon),$$

где для $M(\overline{x}, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$|M(\overline{x}, \varepsilon)| \le N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)\overline{x}. \tag{50}$$

При этом $\eta(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ \delta_2(r) \to 0,\ r \to 0.$

Теперь оценим $\dfrac{\partial M}{\partial \overline{x}}$. Имеем

$$\frac{\partial R_1(\overline{x}, \varepsilon)}{\partial \overline{x}} = \left.\frac{\partial F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right)}{\partial x}\right|_{x = x_0 + \overline{x}} +$$

$$+\left.\frac{\partial F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right)}{\partial y}\, \frac{\partial x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)}{\partial z}\right|_{z = x_0 + \overline{x}} -$$

$$-\left.\frac{\partial F\left(x_0 + \overline{x}, y\big(\tau, x_0 + \overline{x}\big)\right)}{\partial x}\right|_{x = x_0 + \overline{x}} + \left.\frac{\partial F\left(x_0 + \overline{x}, y\big(\tau, x_0 + \overline{x}\big)\right)}{\partial y}\, \frac{\partial y\big(\tau, x_0 + \overline{x}\big)}{\partial z}\right|_{z = x_0 + \overline{x}}.$$

Заметим, что в силу леммы 4 разность $\dfrac{\partial x\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)}{\partial z} - \dfrac{\partial y\big(\tau, x_0 + \overline{x}\big)}{\partial z}$ можно сделать столь угодно малой путем выбора малого ε, так что из неравенства (46) и равномерной непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в области $|\overline{x}| \le r$ для $\dfrac{\partial R_1}{\partial \overline{x}}$ имеем оценку

$$\left|\frac{\partial R_1(\overline{x}, \varepsilon)}{\partial \overline{x}}\right| \le \delta_3(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad |\overline{x}| \le r. \tag{51}$$

Оценим теперь $\dfrac{\partial R_2}{\partial \overline{x}}$. Имеем

$$R_2 = F(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x})) - \frac{\partial F(x_0, y(T, x_0))}{\partial x}\,\overline{x},$$

$$\left|\frac{\partial R_2}{\partial \overline{x}}\right| = \left|\frac{\partial F(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x}))}{\partial x} - \frac{\partial F(x_0, y(T, x_0))}{\partial x}\right| \le \delta_4(\overline{x}) \to 0, \quad r \to 0, \tag{52}$$

в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и оценки (44).

Аналогично для $\dfrac{\partial R_3}{\partial \overline{x}}$ получаем

$$\left|\frac{\partial R_3}{\partial \overline{x}}\right| \le \left|\frac{\partial F(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x}))}{\partial y}\,\frac{\partial y(T, x_0+\overline{x})}{\partial z}\right|_{z=x_0+\overline{x}} -$$

$$-\frac{\partial F(x_0, y(T, x_0+\overline{x}))}{\partial y}\,\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\Big|_{z=x_0+\overline{x}}\Bigg| \le \delta_5(\overline{x}) \to 0, \quad r \to 0, \tag{53}$$

в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, оценки (44) и равномерной по $|\overline{x}| \le r$ ограниченности $\dfrac{\partial y(T, x_0+\overline{x})}{\partial z}$. Таким образом, для $\dfrac{\partial M(\overline{x}, \varepsilon)}{\partial \overline{x}}$ из (51)–(53) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial M(\overline{x}, \varepsilon)}{\partial \overline{x}}\right| \le \delta_3(\varepsilon) + \delta_4(\overline{x}) + \delta_5(\overline{x}) = \zeta(\varepsilon, \overline{x}) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \overline{x} \to 0.$$

Пусть $C = \left\|\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1}\right\|$. Тогда выберем r так, чтобы

$$\delta_2(r) \le \frac{1}{2}, \tag{54}$$

а затем $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ так, чтобы

$$\eta(\varepsilon) \le \frac{r}{2CN(r)}. \tag{55}$$

Тогда, если $|\overline{x}| \le r$, из (50) получаем

$$C|M(\overline{x}, \varepsilon)| \le C\big(N(r)\eta(r) + \delta_2(r)|\overline{x}|\big) \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Таким образом, отображение $\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\overline{x}, \varepsilon)$ при выполнении (54) и (55) переводит шар $B_0(r)$ в себя. А если выбрать ε и r так, чтобы кроме неравенств (54) и (55) выполнялось неравенство $\zeta(\varepsilon, \overline{x}) < 1$, то отображение (49) будет и сжимающим. Следовательно, оно имеет единственную неподвижную точку $\overline{x}^* = \overline{x}^*(\varepsilon, r)$, которая и является начальным значением решения краевой задачи (1).

Выберем теперь r как функцию параметра ε так, чтобы $r(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, а $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ так, чтобы для функции $\eta(\varepsilon)$ в (47) выполнялось неравенство

$$\frac{\eta(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} \le \frac{1}{2CN(r(\varepsilon))}.$$

Отметим, что такой выбор возможен, поскольку функция $N(r(\varepsilon))$, ограничивающая частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в шаре $B_r(0)$, не растет с уменьшением $r(\varepsilon)$.

Оценка (8) теперь следует из неравенств (44) и (46).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме. При этом неравенство (44) следует из теоремы 2.1 [15], а оценка типа (46) для разности между решениями задач Коши точных и усредненных уравнений — из аналога первой теоремы Боголюбова для систем интегро-дифференциальных уравнений [15] (теорема 3.3). Еще заметим, что вместо стандартных уравнений в вариациях нужно воспользоваться уравнениями (22), а также свойствами решений (леммы 3, 5). В остальном доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Литература

1. A. Alownel, K. Al-Khaled, M. Al-Towiq, *Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications*, Int. J. Comput. Math., **87**, № 7, 1538 – 1554 (2009).
2. P. K. Kythe, P. Puri, *Computational methods for linear integral equations*, Univ. New Orleans, New Orleans (1992).
3. A. M. Wazwaz, *A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations*, Appl. Math. and Comput., **181**, № 2, 1703 – 1712 (2006).
4. J. M. Kean, N. D. Barlow, *A spatial model for the succesful biological control of Sitona discoidens by Microctonus aethiopoides*, J. Appl. Ecology, **38**, 162 – 169 (2001).
5. H. R. Thilme, *A model for the spatio-spread of an epidemic*, J. Math. Biol., **4**, 337 – 351 (1977).
6. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелінійні коливання, **16**, № 3, 314 – 321 (2013).
7. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелінійні коливання, **16**, № 4, 460 – 474 (2013).
8. D. S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem an integro-differential equation*, Comput. Math. and Math. Phys., **50**, 1150 – 1161 (2010).
9. D. S. Dzhumabaev, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integro-differential equations*, Ukr. Math. J., **66**, № 8, 1200 – 1219 (2015).
10. D. S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations*, J. Comput. and Appl. Math., **294**, 342 – 357 (2016).
11. D. S. Dzhumabaev, *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems*, J. Comput. and Appl. Math., **327**, 79 – 108 (2018).
12. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
13. А. М. Самойленко, Р. И. Петришин, *Метод усреднения в некоторых краевых задачах*, Дифференц. уравнения, **25**, № 6, 956 – 964 (1989).
14. Ю. А. Митропольский, Д. Д. Байнов, С. Д. Милушева, *Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений*, Мат. физика, вып. 25, 3 – 22 (1979).
15. А. Н. Филатов, Л. В. Шарова, *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1976).
16. З. Шмарда, *Существование и единственность решения задачи Коши для сингулярных систем интегро-дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **45**, № 12, 1716 – 1720 (1993).

Получено 18.09.19