УДК 517.9; 519.63

І. П. Гаврилюк (Дуальна вища школа Гера-Айзенах, ФРН),
В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОД ФІКТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ ТА ГОМОТОПІЯ ЯК НОВА АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В ОБЛАСТЯХ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

The ideas of the fictitious domain method and homotopy are combined with an aim to reduce the solution of boundary-value problems for multidimensional partial differential equations (PDE) in domains of any shape to an exponentially convergent sequence of PDEs in a parallelepiped (in a rectangle, in the 2D case). This allows us to reduce the computational costs due to the elimination of the necessity of triangulation of the domain by a grid with N inner nodes (e.g., the Delaunay algorithm in the 2D case requires $\mathcal{O}(N\log N)$ operations).

У роботі поєднано ідеї методу фіктивних областей та гомотопії з метою звести розв'язування багатовимірних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в областях довільної форми до експоненційно збіжної послідовності цих задач у паралелепіпеді (або в прямокутнику для двовимірного випадку). Це, зокрема, надає можливість зменшувати об'єм обчислень за рахунок того, що немає необхідності триангуляції області сіткою з N внутрішніми вузлами (наприклад, алгоритм Delaunay у двовимірному випадку потребує для цього $\mathcal{O}(N\log N)$ операцій).

Вступ. У процесі розв'язання багатовимірного диференціального рівняння з частинними похідними у деякій області довільної форми внаслідок геометрії цієї області можуть виникати певні труднощі, які потребують свого подолання. Якщо використовувати метод скінченних елементів, таку область спочатку необхідно триангулювати, а це ускладнює весь алгоритм розв'язання. Наприклад, застосувавши у двовимірному випадку алгоритм Delaunay для генерації сітки з N внутрішніми вузлами, отримаємо додатково кількість обчислювальних операцій, пропорційну $\mathcal{O}(N\log N)$.

У зв'язку з вказаними геометричними труднощами виник метод фіктивних областей, в якому вихідна область довільної форми занурюється в паралелепіпед, що легко покривається багатовимірною прямокутною сіткою, яку також при потребі можна легко, навіть тривіально, подрібнити. Цей підхід дає можливість використовувати регулярні сітки, а отже, і спеціальні алгоритми розв'язку (солвери) та передобумовлювачі для задач із складною геометрією [1]. Метод фіктивних областей в комбінації з методом скінченних різниць дозволяє, зокрема, суттєво підвищити степінь автоматизації програмування, значно полегшує перехід від однієї прикладної задачі до іншої. Ці фактори технологічності вказаного методу в поєднанні з методом скінченних різниць є особливо цінними для створення пакетів прикладних програм [1].

Метод фіктивних областей для довільної області Ω вперше було застосовано до задачі типу

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u = f(x), \quad x = (x_1,\ldots,x_n)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

з умовою $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad c(x)\ge 0$ та умовою еліптичності

$$\inf_{x\in\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

з додатною і незалежною від довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сталою μ, де область Ω довільної форми було вкладено в паралелепіпед R і сформульовано іншу задачу для нової області R з розв'язком, що апроксимував $u(x)$ в Ω [2].

Нехай Ω_1 — доповнення Ω до R, S — спільна межа областей Ω та Ω_1. У паралелепіпеді R було розглянуто задачу

$$L_\varepsilon v(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + C(x)v = F(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R,$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial R,$$

$$[v(x)]_S = 0, \qquad \left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]_S = 0,$$

де ν є нормаллю до межі S, $[\cdot]_S$ позначає стрибок функції на S. Коефіцієнти диференціального рівняння з частинними похідними визначаються як продовження коефіцієнтів початкового рівняння на паралелепіпед:

$$A_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1, \quad i \neq j, \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega_1, \quad i = j, \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} c(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

У [3] було з'ясовано, що за певних умов гладкості розв'язку u задачі (1) має місце оцінка точності

$$\|u - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\varepsilon. \tag{2}$$

Більш тонкий аналіз у [4] показав, що оптимальною за порядком степеня ε оцінкою є

$$\|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\varepsilon^2. \tag{3}$$

Ідею методу фіктивних областей для диференціального рівняння з частинними похідними в подальшому було розвинено в багатьох публікаціях (див., наприклад, [1, 5 – 11]). Однією з перешкод для практичної реалізації описаного підходу є те, що коефіцієнти нової диференціальної задачі в паралелепіпеді змінюються у діапазоні, що стає необмеженим при $\varepsilon \to 0$. Цю складність було подолано в роботах [12 – 14].

Оскільки оцінки (2), (3) вказують на низьку точність такого підходу, основною метою даної роботи є усунення цього недоліку та побудова експоненційно збіжного алгоритму. Ми розглядаємо задачу (1) в деякій області довільної форми. Щоб перейти до швидко (експоненційно) збіжної послідовності задач у канонічній області (паралелепіпеді), використаємо дві ідеї. Перша — це ідея методу фіктивних областей, коли початкова задача наближено апроксимується деякою іншою задачею в канонічній області (паралелепіпеді чи прямокутнику). Друга — ідея гомотопії в сенсі алгебраїчної топології, що формалізує поняття неперервної деформації одного об'єкта в інший. У розглядуваному випадку це перехід від простого об'єкта (крайової задачі в паралелепіпеді) до складнішого (крайової задачі в області довільної форми) через деякий штучно введений неперервний параметр t з подальшим застосуванням алгоритму, що отримав назву FD-метод і був запропонований у [15].

У даній роботі перший пункт присвячено одновимірній моделі, на якій продемонстровано поєднання методу фіктивних областей та гомотопії. Доведено, що послідовність розв'язків задач у канонічній області експоненційно збігається до розв'язку початкової задачі. Показано, що умов узгодження в канонічній області можна позбутися, вводячи дельта-функції Дірака в правій частині диференціального рівняння, що в результаті дає певні алгоритмічні переваги. У другому пункті запропонований нами метод проаналізовано для диференціального рівняння з частинними похідними у L-подібній області (як приклад полігональної області). Доведено, що послідовність розв'язків такого методу експоненційно збігається до розв'язку задачі з початковою областю. Для того щоб продемонструвати можливість застосування вказаного методу для ще одного класу задач — задач на власні значення, в останньому пункті даної роботи ми обмежимося одновимірною модельною задачею і також доведемо експоненційну збіжність для запропонованого підходу. Багатовимірний випадок буде розглянуто в окремій публікації.

1. Метод фіктивних областей та гомотопії для модельної задачі в одновимірному випадку. Продемонструємо запропонований нами підхід на такій модельній задачі з [3] в області $\Omega = [0, 1/2]$:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -2, \qquad x \in \Omega = (0, 1/2), \quad u(0) = 0, \quad u(1/2) = 0. \tag{4}$$

Її точним розв'язком є

$$u(x) = x(1/2 - x).$$

Означимо гомотопію в такий спосіб через іншу задачу з „канонічною" областю [0, 1]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - (1-t)u(x,t) = F(x),\ x \in (0,1), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$F(x) = \begin{cases} -2, & x \in [0, 1/2], \\ 0, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \tag{5}$$

$$u(1/2+0,t) = u(1/2-0,t),$$

$$(1-t)\frac{\partial u(1/2-0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1/2+0,t)}{\partial x}.$$

Іншими словами, ми занурюємо початкову задачу в задачу для канонічної області $R = [0, 1]$, яка залежить від параметра гомотопії t таким чином, що для $t = 1$ отримуємо початкову задачу. Розв'язком задачі (5) буде

$$u(x,t) = \begin{cases} a(t)\sinh(\sqrt{1-t}\quad x) + 2\dfrac{\cosh(\sqrt{1-t}\quad x) - 1}{t-1}, & x \in [0, 1/2], \\ b(t)\sinh(\sqrt{1-t}(1-x)), & x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

де

$$a(t)=\frac{(-2t+4)\cosh^2\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)-2\cosh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)+2t-2}{(2-t)(1-t)\sinh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)},$$
$$b(t)=\frac{2}{2-t}\frac{\cosh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)-1}{\sinh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2}\right)}. \qquad (6)$$

При цьому точний розв'язок початкової задачі одержуємо застосуванням граничного переходу до (6) при $t\to 1$, і він має вигляд

$$u(x)=u(x,1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-x^2, & x\in[0,1/2],\\ 0, & x\in[1/2,1].\end{cases}$$

Згідно з ідеєю гомотопії та FD-методу шукаємо розв'язок задачі гомотопії (5) у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}(x)t^j. \qquad (7)$$

Підставляючи (7) у (5) та прирівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями t, отримуємо таку рекурентну послідовність задач у канонічній області:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u^{(j+1)}(x)}{dx^2}-u^{(j+1)}(x)=-u^{(j)}(x),\quad x\in(0,1),\\ u^{(j+1)}(0)=0,\quad u^{(j+1)}(1)=0,\\ u^{(j+1)}(1/2+0)=u^{(j+1)}(1/2-0),\\ \frac{du^{(j+1)}(1/2-0)}{dx}=\frac{du^{(j+1)}(1/2+0)}{dx}+\frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx},\\ j=0,1,\ldots.\end{gathered} \qquad (8)$$

Покладаючи $t=1$, вибираємо за наближений розв'язок рангу N початкової задачі (4) скінченну суму

$$\overset{N}{u}(x)=\sum_{j=0}^{N}u^{(j)}(x). \qquad (9)$$

Члени цієї суми $u^{(j)}(x)$ будемо називати поправками методу. Тут $u^{(0)}(x)$ є розв'язком так званої базової задачі

$$\frac{d^2u^{(0)}(x)}{dx^2}-u^{(0)}(x)=F(x),\quad x\in(0,1),$$

$$u^{(0)}(0) = 0, \qquad u^{(0)}(1) = 0,$$

який має вигляд

$$u^{(0)}(x) = u(x, 0).$$

Більш зручною з алгоритмічної точки зору є еквівалентна форма задач (8) з дельта-функцією Дірака:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u^{(j+1)}(x)}{dx^2} - u^{(j+1)}(x) = -u^{(j)}(x) - \delta(x - 1/2)\frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx}, \\ x \in (0,1), \qquad u^{(j+1)}(0) = 0, \quad u^{(j+1)}(1) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Наслідком задачі (8) є рекурентна система рівнянь

$$u^{(j+1)}(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) u^{(j)}(\xi)\, d\xi + G(x, 1/2)\frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx},$$

$$\frac{du^{(j+1)}(1/2-0)}{dx} = \frac{\cosh(1/2)}{\sinh(1)} \int\limits_{1/2}^1 \sinh(1-\xi) u^{(j)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

де $G(x,\xi)$ — функція Гріна диференціального оператора задачі (10), для якої одержуємо

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\sinh(1)} \begin{cases} \sinh(x)\sinh(1-\xi), & x \le \xi, \\ \sinh(\xi)\sinh(1-x), & \xi \le x, \end{cases}$$

$$\max_{0 \le x \le 1} \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, d\xi = \frac{1}{8}.$$

Звідси випливає система нерівностей

$$\begin{gathered} \left\| u^{(j+1)} \right\|_{C[0,1]} \le \frac{1}{8} \left\| u^{(j)} \right\|_{C[0,1]} + \frac{1}{2} \left| \frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx} \right|, \quad j = 0, 1, \ldots, \\ \left| \frac{du^{(j+1)}(1/2-0)}{dx} \right| \le \frac{1}{2} \left\| u^{(j)} \right\|_{C[0,1]} + \frac{1}{2} \left| \frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx} \right|. \end{gathered} \tag{11}$$

Введемо мажорантні величини u_j, v_j за допомогою нерівностей

$$\left\| u^{(j)} \right\|_{C[0,1]} \le u_j, \qquad \left| \frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx} \right| \le v_j$$

і перейдемо до мажорантної системи рівнянь у матрично-векторній формі

$$\vec{w}_{j+1} = A\vec{w}_j, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

де

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_j = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^{(j)} \right\|_{C[0,1]} \le u_j, \qquad \left| \frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx} \right| \le v_j,$$

$$u_0 = \left\| u^{(0)} \right\|_{C[0,1]} < 0{,}13, \qquad v_0 = \left| \frac{du^{(0)}(1/2-0)}{dx} \right| < 0{,}25.$$

Матриця A симетрична, її власними значеннями є

$$\lambda_1 = 5/16 + (1/16)\sqrt{73} = 0{,}8465002341\ldots,$$

$$\lambda_2 = 5/16 - (1/16)\sqrt{73} = -0{,}2215002341\ldots.$$

Тепер оцінки розв'язку системи (11) можна записати у вигляді

$$\left\| u^{(j)} \right\|_{C[0,1]} \le M(\lambda_1)^j,$$

$$\left| \frac{du^{(j)}(1/2-0)}{dx} \right| \le M(\lambda_1)^j,$$

$$M = \sqrt{u_0^2 + v_0^2} = 0{,}29.$$

Звідси випливає, що запропонований нами метод збігається зі швидкістю, не повільнішою за геометричну прогресію із знаменником

$$r = \lambda_1 = 0{,}8465002341\ldots,$$

причому має місце така оцінка абсолютної похибки методу:

$$\left\| u - \overset{N}{u} \right\|_{C[0,1]} \le 0{,}29\,\frac{r^N}{1-r}. \tag{12}$$

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 1. *Наближений розв'язок* (9) *збігається до точного розв'язку задачі* (4) *не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* r, *причому має місце оцінка* (12).

2. Метод фіктивних областей та гомотопії для полігональної області у двовимірному випадку. Нехай область D_1 є полігональною зі сторонами, паралельними координатним осям. За розширену канонічну область R з межею ∂R, що містить D_1, виберемо найменший прямокутник, який охоплює D_1. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що D_1 є L-подібною областю з межею ∂D_1. У загальному випадку додаються лише суто технічні ускладнення.

Розглянемо задачу

$$Lu = -\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in D_1,$$

$$u(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial D_1.$$

Вона міститься в такій гомотопії для $t=1$:

$$-\Delta u(t,x,y)+(1-t)cu(x,y)=F(x,y), \quad (x,y)\in R,$$
$$u(t,x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial R,$$
$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D_1,\\ 0, & (x,y)\in D_2=R\backslash D_1,\end{cases}$$

з умовами узгодження

$$u(t,1/2+0,y)-u(t,1/2-0,y)=0, \quad y\in(1/2,1),$$
$$u(t,x,1/2+0)-u(t,x,1/2-0)=0, \quad x\in(1/2,1),$$
$$\frac{\partial u(t,1/2+0,y)}{\partial x}-(1-t)\frac{\partial u(t,1/2-0,y)}{\partial x}=0, \quad y\in(1/2,1),$$
$$\frac{\partial u(t,x,1/2+0)}{\partial y}-(1-t)\frac{\partial u(t,x,1/2-0)}{\partial y}=0, \quad x\in(1/2,1).$$

Тут c — деяка додатна стала, яку в подальшому буде вибрано таким чином, щоб даний метод був збіжним.

Далі аналогічно до одновимірного випадку для поправок $u^{(j)}$ з (9), які тепер залежать від двох просторових змінних x,y, отримуємо рекурентну систему

$$-\Delta u^{(j+1)}(x,y)+cu^{(j+1)}(x,y)=cu^{(j)}(x,y), \quad (x,y)\in R,$$
$$u^{(j+1)}(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial R,$$
$$u^{(j+1)}(1/2+0,y)-u^{(j+1)}(1/2-0,y)=0, \quad y\in(1/2,1),$$
$$u^{(j+1)}(x,1/2+0)-u^{(j+1)}(x,1/2-0)=0, \quad x\in(1/2,1),$$
$$\frac{\partial u^{(j+1)}(1/2+0,y)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(j+1)}(1/2-0,y)}{\partial x}= \tag{13}$$
$$=-\frac{\partial u^{(j)}(1/2-0,y)}{\partial x}, \quad y\in(1/2,1),$$
$$\frac{\partial u^{(j+1)}(x,1/2+0)}{\partial y}-\frac{\partial u^{(j+1)}(x,1/2-0)}{\partial y}=$$
$$=-\frac{\partial u^{(j)}(x,1/2-0)}{\partial y}, \quad x\in(1/2,1).$$

Для неї маємо інтегральний наслідок

$$-\iint\limits_R \Delta u^{(j+1)}(x,y)u^{(j+1)}(x,y)\,dydx + c\iint\limits_R [u^{(j+1)}(x,y)]^2 dydx =$$

$$= c\iint\limits_R u^{(j+1)}(x,y)u^{(j)}(x,y)\,dydx,$$

$$R = [0,1]\times[0,1], \quad D_2 = [1/2,1]\times[1/2,1], \quad D_1 = R\backslash D_2.$$

Після інтегрування частинами і врахування умов узгодження з (13) отримаємо

$$\iint\limits_R \left[\nabla u^{(j+1)}(x,y)\right]^2 dydx + c\iint\limits_R \left[u^{(j+1)}(x,y)\right]^2 dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\partial u^{(j)}(1/2-0,y)}{\partial x} u^{(j+1)}(1/2,y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\partial u^{(j)}(x,1/2-0)}{\partial y} u^{(j+1)}(x,1/2)\,dx +$$

$$+c\iint\limits_R u^{(j+1)}(x,y)u^{(j)}(x,y)\,dy\,dx. \tag{14}$$

Перш ніж перейти до оцінок, наведемо допоміжні викладки

$$J_1 = \left|\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\partial u^{(j)}(1/2+0,y)}{\partial x} u^{(j+1)}(1/2,y)\,dy\right| \le$$

$$\le 2\left|\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{1}\left[\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\partial^2 u^{(j)}(\xi,y)}{\partial \xi^2}d\xi\right]dx\, u^{(j+1)}(1/2,y)\,dy\right| +$$

$$+2\left|\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\partial u^{(j)}(x,y)}{\partial x}dx\, u^{(j+1)}(1/2,y)\,dy\right| \le$$

$$\le 4\left|\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{1}\left[\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\partial^2 u^{(j)}(\xi,y)}{\partial \xi^2}d\xi\right]dx \int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\partial u^{(j+1)}(\xi,y)}{\partial \xi}\,d\xi\,dx\,dy\right| +$$

$$+4\left|\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{1}\left[\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\partial^2 u^{(j)}(\xi,y)}{\partial \xi^2}d\xi\right]dx \int\limits_{1/2}^{1} u^{(j+1)}(x,y)\,dx\,dy\right| \le$$

$$\le \frac{2}{3}\left\|\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2}\right\|_{D_2}\left(\frac{1}{3}\left\|\frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial x}\right\|_{D_2} + \|u^{(j+1)}\|_{D_2}\right). \tag{15}$$

За аналогією

$$J_2 = \left| \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\partial u^{(j)}\,(x,1/2+0)}{\partial y} u^{(j+1)}(x,1/2)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{3} \left\| \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} \right\|_{D_2} \left(\frac{1}{3} \left\| \frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial y} \right\|_{D_2} + \left\| u^{(j+1)} \right\|_{D_2} \right). \tag{16}$$

Із (15), (16) одержуємо

$$J_1 + J_2 \leq \frac{2}{3} \left\| \Delta u^{(j)} \right\|_{D_2} \left(\frac{1}{3} \left\| \frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial y} \right\|_{D_2} + \frac{1}{3} \left\| \frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial x} \right\|_{D_2} + \left\| u^{(j+1)} \right\|_{D_2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{2c}{3} \left(\left\| u^{(j)} \right\|_{D_2} + \left\| u^{(j-1)} \right\|_{R} \right) \left(\frac{1}{3} \left\| \nabla u^{(j+1)} \right\|_{D_2} + 2 \left\| u^{(j+1)} \right\|_{D_2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{2c}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \left\| \nabla u^{(j)} \right\|_{D_2} + \frac{1}{2\pi^2} \left\| \nabla u^{(j-1)} \right\|_{R} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left\| \nabla u^{(j+1)} \right\|_{D_2} \leq$$

$$\leq \frac{2c}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\left\| \nabla u^{(j+1)} \right\|_{D_2}^2 + \frac{1}{16} \left\| \nabla u^{(j)} \right\|_{D_2}^2 + \frac{1}{8\pi^4} \left\| \nabla u^{(j-1)} \right\|_{R}^2 \right). \tag{17}$$

Тут ми використали нерівності

$$\left\| u^{(j+1)} \right\|_{D_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial x} \right\|_{D_2}, \qquad \left\| u^{(j)} \right\|_{D_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} \right\|_{D_2},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} \right\|_{D_2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} \right\|_{D_2}^2 \leq \left\| \Delta u^{(j)} \right\|_{R}^2.$$

Враховуючи (17), із (14) отримуємо

$$\left\| \nabla u^{(j+1)} \right\|_{R}^2 \leq \mu(A) \left\| \nabla u^{(j)} \right\|_{R}^2 + \nu(A) \left\| \nabla u^{(j-1)} \right\|_{R}^2,$$

$$j = 0, 1, \ldots, \quad \left\| \nabla u^{(-1)} \right\|_{R} = 0,$$

$$\left\| \nabla u^{(1)} \right\|_{R} \leq \frac{c}{8\left(1 - \dfrac{c}{8}\right)} \left\| \nabla u^{(0)} \right\|_{R} \leq \frac{c}{7} \left\| \nabla u^{(0)} \right\|_{R}, \quad c < 1,$$

$$\mu(A) = \left[1 - c\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \right) \right]^{-1} \left(\frac{1}{72} + \frac{1}{24\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \right) c, \tag{18}$$

$$\nu(A) = \left[1 - c\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \right) \right]^{-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{12\pi^4} c,$$

$$\lim_{c \to 0} \mu(A)/c = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = 0{,}1058516714\ldots,$$

$$\lim_{c \to 0} \nu(A)/c = \frac{1}{12\pi^4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0{,}8900949783\ldots \cdot 10^{-3}.$$

З рекурентної послідовності нерівностей (18) випливає оцінка

$$\left\|\nabla u^{(j)}\right\|_R^2 \leq \mu(A) \frac{\left\|\nabla u^{(0)}\right\|_R^2}{7\sqrt{\mu(A)^2+4\nu(A)}} \times$$

$$\times \left\{ \left[-\frac{7}{2}\mu(A) + c + \frac{7}{2}\sqrt{\mu(A)^2+4\nu(A)} \right] \kappa^j - \right.$$

$$\left. - \left[-\frac{7}{2}\mu(A) + c - \frac{7}{2}\sqrt{\mu(A)^2+4\nu(A)} \right] (-\kappa_1)^j \right\},$$

$$\kappa = \frac{2\nu(A)}{-\mu(A)+\sqrt{\mu(A)^2+4\nu(A)}},$$

$$\kappa_1 = \frac{2\nu(A)}{\mu(A)+\sqrt{\mu(A)^2+4\nu(A)}},$$

і якщо $c \to 0$, то

$$|\kappa| = \left| \frac{\mu(A)+\sqrt{\mu^2(A)+4\nu(A)}}{2} \right| \to 0,$$

$$|\kappa_1| = \left| \frac{-\mu(A)+\sqrt{\mu^2(A)+4\nu(A)}}{2} \right| \to 0.$$

Звідси робимо висновок, що існує таке додатне достатньо мале c, для якого запропонований нами метод буде експоненційно збіжним, тобто доведено наступне твердження.

Теорема 2. *Для достатньо малого c, для якого виконується нерівність*

$$r = r(c) = \left| \frac{\mu(A)+\sqrt{\mu^2(A)+4\nu(A)}}{2} \right| < 1,$$

метод фіктивних областей у L-подібній області збігається експоненційно, а саме, із швидкістю геометричної прогресії із знаменником r, при цьому має місце оцінка похибки

$$\left\| \nabla (u - \overset{N}{u}) \right\|_{D_1} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \left\| \nabla u^{(0)} \right\|_{D_1}.$$

Використовуючи дельта-функцію Дірака, можна запропонувати такий варіант описаного методу:

$$-\Delta u^{(j+1)}(x,y) + c u^{(j+1)}(x,y) = F^{(j+1)}(x,y), \quad (x,y) \in R,$$

$$u^{(j+1)}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial R,$$

$$F^{(j+1)}(x,y) = c u^{(j)}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial u^{(j)}(1/2-0,y)}{\partial x} \delta(x-1/2) + \frac{\partial u^{(j)}(x,1/2-0)}{\partial y} \delta(y-1/2), \quad (x,y) \in R,$$

що не містить умови узгодження і тому має алгоритмічні переваги. Для такого підходу інтегральний наслідок (14) не змінюється, а всі викладки, пов’язані з доведенням збіжності методу та оцінкою його точності, залишаються правильними.

3. Метод фіктивних областей та гомотопії для спектральних задач. У цьому пункті ми проілюструємо метод фіктивних областей та гомотопії на модельній одновимірній задачі на власні значення.

Розглянемо задачу

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$
$$u(0) = 0, \qquad u\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{19}$$

Занурим її у більш загальну задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (\lambda(t) - 1 + t - tq(x))u(x,t) = 0 \quad \forall t \in [0,1], \quad x \in (0,1)\,,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0,$$

з умовами узгодження

$$u(1/2+0,t) = u(1/2-0,t),$$
$$(1-t)\frac{\partial u(1/2-0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1/2+0,t)}{\partial x},$$

яка є означенням гомотопії. Тут $q(x)$ — неперервна невід'ємна функція на $[0,1]$.

Аналогічно до випадку крайової задачі шукаємо наближений розв'язок у вигляді (9), при цьому для поправок отримуємо таку послідовність рекурентних задач:

$$\frac{d^2u_l^{(j+1)}(x)}{dx^2} + [\lambda^{(0)} - 1]u_l^{(j+1)}(x) = f_l^{(j+1)}(x), \quad x \in (0, 1/2)\,,$$
$$u_l^{(j+1)}(0) = 0, \tag{20}$$
$$f_l^{(j+1)}(x) = -\sum_{p=0}^{j} \lambda^{(j+1-p)} u_l^{(p)}(x) + [q(x) - 1]u_l^{(j)}(x),$$

$$\frac{d^2u_p^{(j+1)}(x)}{dx^2} + [\lambda^{(0)} - 1]u_p^{(j+1)}(x) = f_p^{(j+1)}(x), \quad x \in (1/2, 1),$$
$$u_p^{(j+1)}(1) = 0, \tag{21}$$
$$f_p^{(j+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{j} \lambda^{(j+1-k)} u_p^{(k)}(x) + [q(x) - 1]u_p^{(j)}(x),$$

з умовами узгодження

$$u_p^{(j+1)}(1/2) = u_l^{(j+1)}(1/2),$$
$$\frac{du_p^{(j+1)}(1/2)}{dx} = \frac{du_l^{(j+1)}(1/2)}{dx} - \frac{du_l^{(j)}(1/2)}{dx} \tag{22}$$

та умовою однозначної розв'язності

$$\int\limits_0^1 u^{(j+1)}(x)u^{(0)}(x)\,dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{23}$$

де

$$u^{(j+1)}(x) = \begin{cases} u_l^{(j+1)}(x), & x \in [0, 1/2], \\ u_p^{(j+1)}(x), & x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

$$j = -1, 0, 1, \ldots .$$

Верхньому індексу $j = 0$ відповідає базова задача

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_l{}^{(0)}(x)}{dx^2} + [\lambda^{(0)} - 1]u_l{}^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (0, 1/2), \\ u_l^{(0)}(0) = 0, \\ \frac{d^2 u_p^{(0)}(x)}{dx^2} + [\lambda^{(0)} - 1]u_p^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (1/2, 1), \\ u_p^{(0)}(1) = 0, \end{gathered} \tag{24}$$

та умови узгодження

$$\begin{gathered} u_p^{(0)}(1/2) = u_l^{(0)}(1/2), \\ \frac{du_p^{(0)}(1/2)}{dx} = \frac{du_l^{(0)}(1/2)}{dx}. \end{gathered} \tag{25}$$

Наближений алгоритм, що пропонується, полягає в обчисленні апроксимації рангу N до n-ї власної пари (λ_n, u_n) для заданого n (там, де це не викликає непорозумінь, номер власної пари будемо пропускати):

$$\begin{gathered} \overset{N}{\lambda} = \sum_{j=0}^{N} \lambda^{(j)}, \\ \overset{N}{u} = \sum_{j=0}^{N} u^{(j)}. \end{gathered} \tag{26}$$

Рівняння (24) мають такі розв'язки:

$$u_l^{(0)}(x) = a_0 \sin\Big(\sqrt{\lambda^{(0)} - 1}\, x\Big), \qquad u_p{}^{(0)}(x) = b_0 \sin\Big(\sqrt{\lambda^{(0)} - 1}\,(1 - x)\Big).$$

Довільні сталі a_0, b_0 знаходимо з умов узгодження (25), що приводять до однорідної системи

$$\begin{gathered} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda^{(0)} - 1}}{2}\right)(a_0 - b_0) = 0, \\ \sqrt{\lambda^{(0)} - 1}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda^{(0)} - 1}}{2}\right)(a_0 + b_0) = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Наведена однорідна лінійна алгебраїчна система буде мати нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто коли λ_0 є коренем рівняння

$$\Delta(\lambda^{(0)}) = 2\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda^{(0)}-1}}{2}\right)\sqrt{\lambda^{(0)}-1}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda^{(0)}-1}}{2}\right) = 0. \tag{28}$$

На основі (27), (28) знаходимо один із розв'язків, який є найближчим до найменшого власного значення початкової задачі (19):

$$b_0 = -a_0, \qquad \lambda^{(0)} = 4\pi^2 + 1, \qquad u^{(0)}(x) = a_0\sin(2\pi x).$$

Довільну сталу a_0 знаходимо з умови нормування

$$\left\|u^{(0)}(x)\right\| = 1$$

і в результаті отримуємо

$$a_0 = \sqrt{2}.$$

З першої з умов (22) одержимо $\lambda^{(j+1)}$ таким чином. Спочатку знайдемо розв'язки задач (20), (21):

$$\begin{gathered} u_l^{(j+1)}(x) = a_{j+1}\sin(2\pi x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^x \sin\left(2\pi(x-\xi)\right) f_l^{(j+1)}(\xi)\,d\xi = \\ = a_{j+1}\sin(2\pi x) - \lambda^{(j+1)}\frac{\sqrt{2}}{8\pi^2}\big[-2\pi x\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)\big] + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^x \sin\left(2\pi(x-\xi)\right)\Bigg\{-\sum_{p=1}^{j}\lambda^{(j+1-p)}u_l^{(p)}(\xi) + \\ + [q(\xi)-1]u_l^{(j)}(\xi)\Bigg\}\,d\xi, \\ u_p{}^{(j+1)}(x) = b_{j+1}\sin\left(2\pi(1-x)\right) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_x^1 \sin\left(2\pi(x-\xi)\right) f_p{}^{(j+1)}(\xi)\,d\xi = \\ = b_{j+1}\sin\left(2\pi(1-x)\right) - \lambda^{(j+1)}\frac{\sqrt{2}}{8\pi^2}\big[2\pi(1-x)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)\big] - \\ - \frac{1}{2\pi}\int\limits_x^1 \sin\left(2\pi(x-\xi)\right)\Bigg\{-\sum_{k=1}^{j}\lambda^{(j+1-k)}u_p^{(k)}(\xi) + \\ + [q(\xi)-1]u_p^{(j)}(\xi)\Bigg\}\,d\xi. \end{gathered} \tag{29}$$

Перша з умов узгодження (22) приводить до співвідношення

$$\int\limits_0^{1/2} \sin(2\pi\xi) f_l{}^{(j+1)}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{1/2}^{1} \sin(2\pi\xi) f_p{}^{(j+1)}(\xi)\, d\xi = 0,$$

звідки й отримуємо $\lambda^{(j+1)}$:

$$\lambda^{(j+1)} = \int\limits_0^1 q(\xi) u^{(j)}(\xi) u^{(0)}(\xi)\, d\xi. \tag{30}$$

Друга умова узгодження приводить до співвідношення

$$b_{j+1} + a_{j+1} = \varphi^{(j+1)},$$
$$\varphi^{(j+1)} = -\frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_0^{1/2} \cos(2\pi\xi) f_l^{(j+1)}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{1/2}^{1} \cos(2\pi\xi) f_p{}^{(j+1)}(\xi)\, d\xi \right], \tag{31}$$

яке доповнюємо наслідком з умови ортогональності (23):

$$a_{j+1} \int\limits_0^{1/2} \sin(2\pi x) u_l^{(0)}(x)\, dx +$$
$$+ \int\limits_0^{1/2} \int\limits_0^{x} \frac{\sin(2\pi(x-\xi))}{2\pi} f_l^{(j+1)}(\xi)\, d\xi u_l^{(0)}(x)\, dx -$$
$$- b_{j+1} \int\limits_{1/2}^{1} \sin(2\pi x) u_p^{(0)}(x)\, dx -$$
$$- \int\limits_{1/2}^{1} \int\limits_x^{1} \frac{\sin(2\pi(x-\xi))}{2\pi} f_p^{(j+1)}(\xi)\, d\xi u_p^{(0)}(x)\, dx = 0$$

або

$$-b_{j+1} + a_{j+1} = \psi^{(j+1)},$$
$$\psi^{(j+1)} = -\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos^2(\pi\xi)\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2} f_l^{(j+1)}(\xi)\, d\xi - \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\cos^2(\pi\xi)\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2} f_p^{(j+1)}(\xi)\, d\xi. \tag{32}$$

Враховуючи (31), (32), одержуємо

$$a_{j+1} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{(j+1)} + \psi^{(j+1)}\right), \qquad b_{j+1} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{(j+1)} - \psi^{(j+1)}\right),$$
$$|a_{j+1}|,\ |b_{j+1}| \leq |\varphi_{j+1}| + |\psi_{j+1}| \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left(\left\|f_l^{(j+1)}\right\| + \left\|f_p^{(j+1)}\right\|\right). \tag{33}$$

З (29) та (33) маємо такі оцінки:

$$\left\|u_l^{(j+1)}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a_{j+1}| + \frac{1}{4\pi}\left\|f_l^{(j+1)}\right\|\right] \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\right)\left\|f_l^{(j+1)}\right\| + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left\|f_p^{(j+1)}\right\|,$$
$$\left\|u_p^{(j+1)}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|b_{j+1}| + \frac{1}{4\pi}\left\|f_p^{(j+1)}\right\|\right] \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\right)\left\|f_p^{(j+1)}\right\| + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left\|f_l^{(j+1)}\right\|.$$

Тепер ми можемо отримати оцінку

$$\left\|u^{(j+1)}\right\| = \left\|u_l{}^{(j+1)}\right\| + \left\|u_p^{(j+1)}\right\| \leq A\left\|f^{(j+1)}\right\|,$$
$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} < 1{,}1. \tag{34}$$

З огляду на (30), (34) робимо висновок, що

$$|\lambda^{(j+1)}| \leq \max_{x\in[0,1]}\left|q(x)\right|\left\|u^{(j)}\right\|,$$

$$\left\|f^{(j+1)}\right\| \leq \sqrt{2}\sum_{p=1}^{j}\left|\lambda^{(j+1-p)}\right|\left\|u^{(p)}\right\| + \sqrt{2}\max_{x\in[0,1]}\left|q(x)\right|\left\|u^{(j)}\right\|.$$

Звідси випливає рекурентна система нерівностей

$$\left\|u^{(j+1)}\right\| \leq \rho\sum_{p=0}^{j}\left\|u^{(j-p)}\right\|\left\|u^{(p)}\right\|,$$
$$\rho = \sqrt{2}A\max_{x\in[0,1]}\left|q(x)\right|, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad \left\|u^{(0)}\right\| = 1.$$

Щоб розв'язати цю систему, перейдемо до рекурентної мажорантної системи рівнянь

$$U_{j+1} = \rho\left\{\sum_{p=0}^{j} U_{j-p}U_p\right\}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

і застосуємо метод твірних функцій. Використовуючи позначення

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j U_j$$

і попередню систему, отримуємо рівняння

$$\rho z f(z)^2 - f(z) + 1 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння, який задовольняє умову $f(0) = 1$, визначається за формулою

$$f(z) = \frac{1}{2\rho z}\left\{1 - \sqrt{1 - 4\rho z}\right\}. \tag{35}$$

Функція (35) матиме дійсні значення для будь-якого $z \in [0, 1]$, якщо буде виконуватись нерівність

$$1 - 4\rho z \geq 0 \quad \forall z \in [0, 1],$$

тобто якщо

$$\rho \leq 1/4.$$

Отже, за цієї умови запропонований нами метод буде збіжним. Використовуючи відомі результати щодо розв'язку рівнянь та нерівностей типу згортки [16, 17], одержуємо оцінку

$$\left\|u^{(j+1)}\right\| \leq U_{j+1} \leq \frac{r^{j+1}}{(j+2)\sqrt{\pi(j+1)}}, \quad r = 4\sqrt{2}A \max_{x\in[0,1]} \left|q(x)\right|,$$

а також співвідношення

$$\begin{aligned} \left|\lambda - \overset{N}{\lambda}\right| &= \left|\lambda - \sum_{j=0}^{N} \lambda^{(j)}\right| \leq \frac{\max_{x\in[0,1]}\left|q(x)\right|}{1-r} \frac{r^N}{(N+1)\sqrt{\pi N}}, \\ \left\|u - \overset{N}{u}\right\| &= \left\|u - \sum_{j=0}^{N} u^{(j)}\right\| \leq \frac{1}{1-r} \frac{r^{N+1}}{(N+2)\sqrt{\pi(N+1)}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Для того щоб оцінки (36) були змістовними, необхідно, щоб виконувалась умова

$$r = 4\sqrt{2}A \max_{x\in[0,1]} \left|q(x)\right| < 1. \tag{37}$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $r < 1$, тоді для $N \to \infty$ алгоритм* (26) *збігається експоненційно, тобто не повільніше за геометричну прогресію із знаменником r, до найменшого власного значення і відповідної власної функції та мають місце оцінки похибки* (36).

Якщо серед коренів рівняння (28) вибрати такий, що є найближчим до власного значення початкової задачі λ_n, то алгоритм експоненційно збігатиметься до відповідної власної пари з цим номером.

Наведемо результати кількох кроків даного методу для випадку $q(x) = x$. Хоча в цьому випадку умова (37) не виконується, проте цей метод на практиці виявився збіжним, і ми одержали такі значення:

$$\lambda^{(0)} = 4\pi^2, \qquad {u_l}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x), \quad {u_p}^{(0)}(x) = -\sqrt{2}\sin\big(2\pi(1-x)\big),$$

$$u^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x),$$

$$u_l{}^{(1)}(x) = a_1\sin(2\pi x) + \frac{\sqrt{2}x}{16\pi^2}\left[\sin(2\pi x) - 2\pi(x - 2\lambda^{(1)} - 2)\cos(2\pi x)\right],$$

$$u_p{}^{(1)}(x) = b_1\sin(2\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{16\pi^2}\left[x\sin(2\pi x) - 2\pi(x-1)(x - 2\lambda^{(1)} - 1)\cos(2\pi x)\right],$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{1}{2} = -0{,}5, \qquad a_1 = \frac{(16\pi^2-1)\sqrt{2}}{16\pi^2}, \qquad b_1 = a_1 + \sqrt{2},$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{96\pi^4 - 4\pi^2 + 15}{768\pi^4} = -0{,}1246727929\ldots,$$

$$\lambda^{(3)} = -\frac{1}{16} = -0{,}0625,$$

$$\lambda^{(4)} = -0{,}032350327908\ldots,$$

$$\lambda^{(5)} = -0{,}01571982369888400\ldots,$$

$$\lambda^{(6)} = -0{,}007886670771005869\ldots,$$

$$\lambda^{(7)} = -0{,}003957745287358167\ldots,$$

$$\lambda^{(8)} = -0{,}001986600928603473\ldots,$$

$$\lambda^{(9)} = -0{,}0009974305456536042\ldots,$$

$$\lambda^{(10)} = -0{,}0005009155266200468\ldots,$$

$$\lambda^{(11)} = -0{,}0002516266739425218\ldots.$$

Звідси видно, що

$$\frac{\lambda^{(j+1)}}{\lambda^{(j)}} \simeq \frac{1}{2},$$

і, отже, метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником $r \simeq \dfrac{1}{2}$. В результаті отримуємо

$$\lambda_{\text{exact}} - \overset{11}{\lambda} =$$

$$= 39{,}72834902553775\ldots - 39{,}72860327552081\ldots = -0{,}00025424998311\ldots.$$

Література

1. П. Н. Вабищевич, *Метод фиктивных областей в задачах математической физики*, Изд-во Моск. ун-та, Москва (1991).
2. В. К. Саульев, *О решении некоторых краевых задач на на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей*, Сиб. мат. журн., **4**, № 1, 912 – 925 (1963).
3. Г. И. Марчук, *Методы вычислительной математики*, Наука, Москва (1989).
4. В. Д. Копченов, *Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей*, Дифференц. уравнения, **4**, № 1, 151 – 164 (1968).

5. В. Д. Копченов, *Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **131**, 119 – 127 (1974).
6. В. И. Лебедев, *Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **4**, № 3, 449 – 465 (1964).
7. А. Н. Коновалов, *Метод фиктивных областей в задачах кручения*, Численные методы механики сплошной среды, **4**, № 2, 109 – 115 (1973).
8. К. Ю. Богачев, *Обоснование метода фиктивных областей решения смешанных краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений*, Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, № 3, 16 – 23 (1996).
9. Л. А. Руховец, *Замечание к методу фиктивных областей*, Дифференц. уравнения, **3**, № 4, 698 – 701 (1967).
10. С. А. Войцеховский, И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Сходимость разностных решений к обобщенным решениям задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в произвольной области*, Докл. АН СССР, **267**, № 1, 34 – 37 (1982).
11. R. Glowinski, T. W. Pan, J. Periaux, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg., **111**, № 3-4, 283 – 303 (1994).
12. G. M. Kobel'kov, *Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients*, Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling, **2**, Issue 6, 407 – 420 (1987).
13. М. Б. Брусникин, *Об эффективных алгоритмах решения задач метода фиктивных областей в многосвязном случае*, Докл. РАН, **387**, № 2, 151 – 155 (2002).
14. Н. С. Бахвалов, К. Ю. Богачев, Ж. Ф. Мэтр, *Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приложениями к методу фиктивных областей*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **39**, № 6, 919 – 931 (1999).
15. В. Л. Макаров, *О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма – Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами*, Докл. АН СССР, **320**, № 1, 34 – 39 (1991).
16. Б. Й. Бандирський, В. Л. Макаров, О. Л. Уханьов, *FD-метод для задач Штурма – Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності*, Журн. обчислюв. та прикл. математики, **39**, № 1(85), 1 – 60 (2000).
17. E. M. Reingold, *Combinatorial algorithms. Theory and practice*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1977).

Одержано 20.10.19