DOI: 10.37863/umzh.v72i4.2270

УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп, І. І. Волянська (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

УМОВИ РОЗВ’ЯЗНОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ В УТОЧНЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ ПРОСТОРІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

We investigate the solvability of a nonlocal boundary value problem for a differential equation with nonlinearity. Using the Nash – Mozer iteration scheme, we establish conditions of solvability of the problem in the Hörmander spaces of functions of several real variables that form a refined Sobolev scale.

Розглянуто нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння зі слабкою нелінійністю. За допомогою ітераційної схеми Неша – Мозера встановлено умови розв’язності даної задачі у гільбертових просторах Хермандера функцій багатьох дійсних змінних, що утворюють уточнену соболєвську шкалу просторів.

1. Вступ. Останнім часом зростає інтерес до дослідження задач для рівнянь з частинними похідними у різних класах функціональних просторів, як у соболєвських просторах [1, 2], так і у просторах Хермандера [3, 4], та поширення теорії нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними [5], зокрема із класу просторів Соболєва на клас гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену шкалу соболєвських просторів [6, 7].

Особливістю даної роботи є дослідження нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною в уточненій соболєвській шкалі функцій багатьох дійсних змінних. У цих шкалах просторів числовий параметр задає основну гладкість, а функціональний параметр визначає допоміжну. Доведення розв’язності задачі проводиться за ітераційною схемою Неша – Мозера [8, 9]. Найбільш важливим моментом у цій схемі є отримання оцінок норм у відповідних просторах обернених лінеаризованих операторів, які виникають у кожній ітерації. Оцінювання пов’язане з проблемою малих знаменників, яка вирішується за допомогою метричного підходу на множині параметрів задачі. У роботі [10] досліджено умови розв’язності даної нелокальної задачі у соболєвських просторах функцій багатьох дійсних змінних.

2. Основні позначення та постановка задачі. Нехай $\mathbf{X}$ — сепарабельний гільбертів простір; $\hat{A}_i : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $i = 1, \ldots, p$, — лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення, тобто існує повна ортонормована система елементів $x_k \in \mathbf{X}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, що виконуються рівності $\hat{A}_i x_k = \alpha_{ik} x_k$, $i = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{N}$, для деяких комплексних чисел α_{ik}.

Далі будемо використовувати позначення $\alpha_k = (\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{pk})$, $\|\alpha_k\|^2 = |\alpha_{1k}|^2 + \ldots + |\alpha_{pk}|^2$, і припущення $\|\alpha_k\| > Ck^{\beta_0}$, $C > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathcal{M}_1$ множину всіх повільно змінних за Караматою на нескінченності функцій, тобто множину таких функцій θ, для яких виконується рівність $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\theta(\lambda t)}{\theta(t)} = 1$ для кожного $\lambda > 0$, а через $\mathcal{M}$ множину всіх вимірних за Борелем на півосі $[1, \infty)$ функцій $\theta : [1, \infty) \to (0, \infty)$ з $\mathcal{M}_1$ таких, що функції θ і $1/\theta$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$.

Нехай $\mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega)$, $d, r \in \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, — гільбертів простір функцій

$$u(t,\Omega) = \sum_{(k,m)\in\Omega} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}, \qquad \tau(m)=(i2\pi m - \ln\mu)/T,$$

$\ln\mu$ — головне значення логарифма, зі скалярним добутком

$$(u,v)_{d,r,\theta} = \sum_{(k,m)\in\Omega} (1+\|\alpha_k\|^2)^d (1+m^2)^r \theta^2(k,m) u_{k,m} \bar{v}_{k,m},$$

який стандартним чином породжує норму $\|u\|^2_{d,r,\theta} = (u,u)_{d,r,\theta}$, де

$$v(t,\Omega)= \sum_{(k,m)\in\Omega} v_{k,m} x_k e^{\tau(m)t},$$

і, зокрема, $\mathbf{X}_{d,r,\theta}(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}) = \mathbf{X}_{d,r,\theta}$, $u(t,\mathbb{N}\times\mathbb{Z}) = u(t)$, $\|\cdot\|_{d,r,\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} = \|\cdot\|_{d,r,\theta}$. Функція $\theta = \theta(m,k)$ є добутком двох повільно змінних на нескінченності функцій $\varphi = \varphi(k)$ і $\psi = \psi(m)$ із класу $\mathcal{M}$, тобто $\theta(m,k) = \varphi(k)\psi(m)$.

Очевидно, що якщо $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ і $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, то $\mathbf{X}_{d,r,\theta} = \mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega_1) \oplus \mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega_2)$, де $\oplus$ означає пряму суму. Тоді для кожної функції $u(t,\Omega) \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}$ маємо $u(t,\Omega) = u(t,\Omega_1) + u(t,\Omega_2)$, де $u(t,\Omega_1) \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega_1)$, $u(t,\Omega_2) \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega_2)$.

Розглянемо задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною

$$L(d_t,\hat{A})u \equiv d_t^n u + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{|s|\le n-s_0} a_{\hat{s}} \hat{A}^s d_t^{s_0} u = \varepsilon f(u), \tag{1}$$

$$M_m u \equiv \mu d_t^{m-1} u\big|_{t=0} - d_t^{m-1} u\big|_{t=T} = 0, \qquad m = 1,\ldots,n, \quad \mu \ne 0, \tag{2}$$

де $\hat{s} = (s_0, s) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{\hat{s}}$, ε і μ — комплексні параметри, $d_t = d/dt$, $\hat{A}^s = \hat{A}_1^{s_1} \ldots \hat{A}_p^{s_p}$.

Розглянемо задачу на власні значення для оператора L, породженого диференціальним виразом $L(d_t,\hat{A})$ і крайовими умовами (2) з $\mu \ne 0$, тобто

$$L(d_t,\hat{A})u = \lambda u, \qquad M_m u = 0, \quad m = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Для фіксованого $(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ позначимо через $R_{k,m}$ множину таких векторів $(k^*,m^*) \in \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, для яких справджується рівність $L(\tau(m^*),\alpha_{k^*}) = L(\tau(m),\alpha_k)$, де $\tau(m) = (i\,2\pi m - - \ln\mu)/T$.

Власними значеннями задачі (3) є числа $\lambda_{k,m} = L(\tau(m),\alpha_k)$, $(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, а власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{k,m}$, — функції $x_{k^*} e^{\tau(m^*)t}$, $(k^*,m^*) \in R_{k,m}$.

Виберемо функції $\varphi_1 = \varphi_1(k) \in \mathcal{M}$ і $\psi_1 = \psi_1(m) \in \mathcal{M}$ так, щоб $\zeta_1(2) < \infty$ і $\zeta_2(2) < \infty$, де функції $\zeta_1(x)$ і $\zeta_2(x)$ задаються формулами

$$\zeta_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(1+\|\alpha_k\|^2\right)^{\frac12} \varphi_1^{-x}(k), \qquad \zeta_2(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(1+|m|^2\right)^{\frac12} \psi_1^{-x}(m).$$

Із властивостей повільно змінних функцій та означення класу $\mathcal{M}$ випливає існування чисел $K' > 1$ і $K'' > 1$ таких, що для всіх $x \ge 1$ і $j = 1,2$ виконуються нерівності

$$\varphi_1(x) \le K' x^{2\kappa_j}, \qquad \psi_1(x) \le K'' x^{2\alpha_j},$$

де $\kappa_j = \kappa - \dfrac{n}{2}\delta_{1j},\ \alpha_j = \alpha - \dfrac{n}{2}\delta_{2j},\ \kappa = 1/(4\beta_0),\ \alpha = 1/4,\ \delta_{ij}$ — дельта Кронекера. Позначимо $\theta_1 = \theta_1(m,k) = \varphi_1(k)\psi_1(m)$. З властивостей повільно змінних функцій випливає, що функція θ_1 також є повільно змінною функцією з класу $\mathcal{M}$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати, використовуючи ітераційну схему Неша – Мозера, у вигляді границі послідовності гладких (аналітичних) функцій.

Для кожного $N \in \mathbb{N}$ розіб'ємо простір $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ на підпростори: $\mathbf{X}_{d,r,\theta} = \mathbf{W}^{(N)} \oplus \mathbf{W}^{(N)\perp}$, де $\mathbf{W}^{(N)} = \mathbf{X}_{d,r,\theta}(\Omega^N) = \Big\{u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta} : u = \sum_{(k,m)\in\Omega^N} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}\Big\}$ є скінченновимірним (а отже, і аналітичним) підпростором простору $\mathbf{X}_{d,r,\theta},\ \mathbf{W}^{(N)\perp} = \mathbf{X}_{d,r,\theta}((\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\setminus\Omega^N) = \Big\{u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta} : u = \sum_{(k,m)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\setminus\Omega^N} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}\Big\}$, $\Omega^N = \big\{(k,m) : 1 + \|\alpha_k\|^2 \le N, 1 + m^2 \le N\big\}$.

Позначимо через $\mathrm{P}_N : \mathbf{X}_{d,r,\theta} \to \mathbf{W}^{(N)}$ і $\mathrm{P}_N^\perp : \mathbf{X}_{d,r,\theta} \to \mathbf{W}^{(N)\perp}$, $N \in \mathbb{N}$, оператори проектування у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ на підпростори $\mathbf{W}^{(N)}$ і $\mathbf{W}^{(N)\perp}$ відповідно, тоді $\mathbf{W}^{(N)} = \mathrm{P}_N \mathbf{X}_{d,r,\theta}$, $\mathbf{W}^{(N)\perp} = \mathrm{P}_N^\perp \mathbf{X}_{d,r,\theta}$. Для довільного $u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}$ вони визначаються формулами

$$\mathrm{P}_N u = \sum_{(k,m)\in\Omega^N} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}, \qquad \mathrm{P}_N^\perp u = u - \mathrm{P}_N\, u = \sum_{(k,m)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\setminus\Omega^N} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}. \tag{4}$$

З означень простору $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ і проектора P_N випливає, що для будь-яких $N \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$\|\mathrm{P}_N u\|_{d+j_1, r+j_2, \theta\theta_1} \le N^{j_1+j_2}\varphi_1(N)\psi_1(N)\|u\|_{d,r,\theta} \quad \text{для кожної} \quad u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}, \tag{5}$$

$$\|\mathrm{P}_N^\perp u\|_{d,r,\theta} \le \big(N^{j_1+j_2}\varphi_1(N)\psi_1(N)\big)^{-1}\|u\|_{d+j_1,r+j_2,\theta\theta_1} \quad \text{для кожної} \quad u \in \mathbf{X}_{d+j_1,r+j_2,\theta\theta_1}. \tag{6}$$

Існування розв'язку задачі (1), (2) базується на наведених нижче властивостях (P_1) – (P_5) коефіцієнтів рівняння $a_{\hat{s}}$ і функції f, яка, за припущенням, відображає простір $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ в себе для деяких d, r, θ, які зафіксуємо.

Позначимо $\Omega_1 = \big\{(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} : |\tau(m)| < \|\alpha_k\|\big\}$, $\Omega_2 = (\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\setminus\Omega_1$. Нехай невід'ємні числа l, m, C_0, C_1, C_2 є такими, що $l \ge d+2$, $m \ge r+2$, а функція f задовольняє такі умови:

(P_1) $f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{X}_{d,r,\theta}; \mathbf{X}_{d,r,\theta})$;

(P_2) для будь-яких $d' \in [d,l)$, $r' \in [r,m)$ і функції $u \in \mathbf{X}_{d',r',\theta}$ виконується нерівність $\|f(u)\|_{d',r',\theta} \le C_0(1 + \|u\|_{d',r',\theta})$;

(P_3) для довільних функцій $u \in K_1$ і $h \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}$ існують $\bar{\bar{d}} > d + 4\delta$, $\bar{\bar{r}} > r + 4\delta$, де $\delta = \kappa + \alpha - \dfrac{n}{2}$, такі, що $D_u f(u) \in \mathbf{C}^1\big(\mathbf{X}_{d,r,\theta}; \mathbf{X}_{\bar{\bar{d}}_1,\bar{\bar{r}}_1,\theta} \oplus \mathbf{X}_{\bar{\bar{d}}_2,\bar{\bar{r}}_2,\theta}\big)$, $\bar{\bar{d}}_i, \bar{\bar{r}}_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, і $\big\|\mathrm{D}_u f(u)[h]\big\|_{\bar{\bar{d}},\bar{\bar{r}},\theta} \le C_1\|h\|_{d,r,\theta}$;

(P_4) для будь-яких $d' \in [d, l-2]$, $r' \in [r, m-2]$ і функцій $u \in \mathbf{X}_{d',r',\theta}\bigcap K_1$, $h \in \mathbf{X}_{d',r',\theta}$ виконується $\big\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\big\|_{d',r',\theta} \le C_2\big(\|u\|_{d',r',\theta}\|h\|^2_{d,r,\theta} + \|h\|_{d,r,\theta}\|h\|_{d',r',\theta}\big)$.

З (P_1) випливає, що функції f, $\mathrm{D}_u f$, $\mathrm{D}^2_u f$ обмежені на кулі $K_1 = \big\{u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta} : \|u\|_{d,r,\theta} \le 1\big\}$ простору $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$, а з властивості (P_4) — нерівність

$$\big\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\big\|_{d,r,\theta} \le 2C_2\|h\|^2_{d,r,\theta}, \qquad u \in K_1, \quad h \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}.$$

Перші чотири властивості характеризують поведінку функції f у кулі K_1 простору $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$. Множина функцій, які задовольняють умови $(P_1)-(P_4)$, є непорожньою, зокрема містить гладкі функції.

Для формулювання властивості (P_5) введемо такі позначення. Нехай коефіцієнти рівняння (1) належать кругу $\mathcal{O}_{a_0} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < a_0\}$. Введемо позначення векторів

$$\vec{\varepsilon} = (\operatorname{Re}\varepsilon, \operatorname{Im}\varepsilon), \qquad \vec{a} = \big(\operatorname{Re} a_{\hat{s}(j)}, \operatorname{Im} a_{\hat{s}(j)}\big)_{j=0,1,\ldots,p} \tag{7}$$

для $\hat{s}(j) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j}, n, 0, \ldots, 0)$, причому $a_{\hat{s}(j)} = y_{2j+1} + iy_{2j+2}$, де y_{2j+1} і y_{2j+2} — дійсні числа. Тоді для вектора $\vec{a} \in \mathcal{O}_{a_0}^{p+1}$ справедливим є такий запис: $\vec{a} = (y_1, \ldots, y_{2p+2})$.

Введемо послідовність натуральних чисел N_q, де $q \in \mathbb{N}$, за формулою

$$N_q = N_0^{2^q} \tag{8}$$

з $N_0 \geq 2$, зокрема зауважимо, що $N_q = N_{q-1}^2$.

Оператор L розглядатимемо на множині параметрів $\vec{a} \in \mathcal{O}_{a_0}^{p+1}$, всі інші $a_{\hat{s}}$ вважатимемо фіксованими. За умови (P_3) для $\gamma > 0$ та вибраних функцій φ_1 і ψ_1 побудуємо послідовність множин A_0, A_1, $\ldots$, де A_q — множина векторів $\vec{a}$ з рівняння (1), для яких виконується оцінка

$$|\lambda_{k,m}| > \gamma(1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_j}(1 + m^2)^{-\alpha_j}\theta_1^{-1}(k,m) \quad \text{при} \quad (k,m) \in \Omega^{N_q} \cap \Omega_j, \quad j = 1, 2, \tag{9}$$

де $\theta_1(k,m) = \varphi_1(k)\psi_1(m)$.

Із задання множин A_q очевидними є вкладення $\ldots \subseteq A_1 \subseteq A_0 \subset \mathcal{O}_{a_0}^{p+1}$.

Введемо відповідні до множин A_q множини $\mathcal{A}_q = \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times A_q$, де $q \geq 0$, $\mathcal{O}_{\varepsilon_0} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \varepsilon_0\}$,

$$\varepsilon_0 = \gamma \min\left\{\frac{3}{16C_3}, \frac{1}{2C_0 N_0^{4\delta}}, y_1, y_2\right\}, \qquad C_3 = K'K'' \max\{C_0, C_1, 2C_2\}, \tag{10}$$

y_1, y_2 — додатні розв'язки відповідно рівнянь

$$2K'K''C_0N_0^{16\delta}y^3 + y^2 = \frac{1}{24}C_3^{-2}, \qquad 2C_0K'K''\, y^2 + (2 + N_0^{-16\delta})y = \frac{3}{4}C_3^{-1}.$$

Множини $\mathcal{A}_q$, $q \geq 0$, утворюють послідовність вкладених множин $\ldots \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \times \mathcal{O}_{a_0}^{p+1}$.

Для довільних $u \in \mathbf{W}^{(N)}$, $h \in \mathbf{W}^{(N)}$ і $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ позначимо

$$\mathcal{L}_N[h] \equiv \mathcal{L}_N(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)[h] = Lh - \varepsilon \mathrm{P}_N \mathrm{D}_u f(u)h, \quad N \in \mathbb{N},$$

де L — ліва частина рівняння (1), проектор P_N задає формула (4).

Наступна властивість є властивістю неперервності оператора, оберненого до лінійного оператора $\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u) \colon \mathbf{W}^{(N_q)} \to \mathbf{W}^{(N_q)}$, $q \geq 0$:

(P_5) для довільної функції $u \in \mathbf{W}^{(N_q)} \cap K_1$ і $\gamma > 0$ для всіх векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_q$ оператор $\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u) \colon \mathbf{W}^{(N_q)} \to \mathbf{W}^{(N_q)}$ є оборотним, зокрема для $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - 4\delta]$, $\bar{r} \in [r, \bar{\bar{r}} - 4\delta]$ і $h \in \mathbf{W}^{(N_q)}$ виконується нерівність

$$\big\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}(\varepsilon, \vec{a}, u)[h]\big\|_{\bar{d},\bar{r},\theta} \leq \frac{2K'K''}{\gamma} N_q^{4\delta} \|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Доведення властивості (P_5). Для довільного цілого $q \geq 0$ запишемо оператор $\mathcal{L}_{N_q}$ у вигляді $\mathcal{L}_{N_q} = \mathcal{D} - \mathcal{T}_q$, де $\mathcal{D}$ — діагональний оператор, $\mathcal{D} = L$, а $\mathcal{T}_q = \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} \mathrm{D}_u f(u)$, і факторизуємо:

$$\mathcal{L}_{N_q} = |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{U} |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} - \mathcal{T}_q = |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} (\mathcal{U} - \mathcal{R}_1) |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} = |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{U} (\mathcal{I} - \mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1) |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}},$$

причому $\mathcal{U} = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D} |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{R}_1 = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathcal{T}_q |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{I}$ — одиничний оператор.

Діагональний оператор $\mathcal{D}$ та діагональні оператори $|\mathcal{D}|^{\nu}$, $\nu \geq 0$, визначені і діють у шкалі просторів $\{\mathbf{X}_{d,r,\theta}\}_{d,r \in \mathbb{R}}$, зокрема якщо $h = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} h_{k,m} \varphi_{k,m}$, то

$$\mathcal{D} h = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} \lambda_{k,m} h_{k,m} \varphi_{k,m}, \qquad |\mathcal{D}|^{\nu} h = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} |\lambda_{k,m}|^{\nu} h_{k,m} \varphi_{k,m}.$$

Для $\nu < 0$ оператори $|\mathcal{D}|^{\nu}$ існують за умови $\lambda_{k,m} \neq 0$ для всіх $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Оператори $\mathcal{D}$ і $|\mathcal{D}|^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}$, у просторі $\mathbf{W}^{(N_q)}$ представлені діагональними матрицями, мають власні значення $\lambda_{k,m}$ і $|\lambda_{k,m}|^{\nu}$ відповідно і власні функції $\varphi_{k,m} = e^{\tau(m)t} x_k$ при $(k,m) \in \Omega^{N_q}$.

Лема 1. *Для всіх векторів $\vec{a} \in A_q$, $q \geq 0$, оператор $|\mathcal{D}|$ є оборотним у просторі $\mathbf{W}^{(N_q)}$ і для довільних $d^*, r^* \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathcal{M}$ і $h \in \mathbf{W}^{(N_q)}$ виконується оцінка*

$$\left\| |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h \right\|_{d^*, r^*, \theta, \Omega_j} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|h\|_{d^* + \kappa_j, r^* + \alpha_j, \theta \theta_1^{\frac{1}{2}}, \Omega_j}, \quad j = 1, 2.$$

Доведення цієї леми наведено у п. 4.

Розглянемо обернений до $\mathcal{L}_{N_q}$ оператор $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$ і факторизуємо його:

$$\mathcal{L}_{N_q}^{-1} = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{I} - \mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1)^{-1} \mathcal{U}^{-1} |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1} \mathcal{U}^{-1} |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}},$$

де $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1$ і $(\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{I} + \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{R}^r$ за умови збіжності ряду.

Лема 2. *Нехай точковий спектр оператора L не містить нуля. Тоді для будь-яких d^*, $r^* \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathcal{M}$ оператор $\mathcal{U}$ є ізометричним у просторі $\mathbf{X}_{d^*, r^*, \theta}$.*

Лема 3. *Для оператора $\mathcal{R}_1 : \mathbf{W}^{(N_q)} \to \mathbf{W}^{(N_q)}$, $q \geq 0$, для всіх $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - 4\delta]$, $\bar{r} \in [r, \bar{\bar{r}} - 4\delta]$ і $u \in \mathbf{W}^{(N_q)}$ справджується оцінка $\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq C_1 K' K'' \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta}$.*

Доведення лем 2 та 3 див. у п. 4.

З формули $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1$ і лем 2, 3 для всіх $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - 4\delta]$, $\bar{r} \in [r, \bar{\bar{r}} - 4\delta]$ отримаємо нерівність $\|\mathcal{R} h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} = \|\mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} = \|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq C_1 K' K'' \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta}$. Запишемо таку оцінку: $\left\| (I - \mathcal{R})^{-1} h \right\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} + \sum_{r \in \mathbb{N}} \|\mathcal{R}^r h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta}$, де

$$\|\mathcal{R}^r h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} = \left\| \mathcal{R}(\mathcal{R}^{r-1} h) \right\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq C_1 K' K'' \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \|\mathcal{R}^{r-1} h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq \left(C_1 K' K'' \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \right)^r \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta},$$

з якої за умови $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ і рівності (10) маємо $|\varepsilon| < \dfrac{3\gamma}{16 C_3} < \dfrac{\gamma}{C_1}$, а також

$$\left\| (\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1} h \right\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \leq \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{C_1 K' K'' |\varepsilon|}{\gamma} \right)^r =$$

$$= \|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta}\left(1-\frac{C_1K'K''|\varepsilon|}{\gamma}\right)^{-1} = \frac{\gamma}{\gamma - C_1K'K''|\varepsilon|}\|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta}.$$

Повертаючись до оцінки норми оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$, з лем 1, 2 і формул (6), (10) виводимо, що для всіх $\bar{d}\in[d,\bar{\bar{d}}-4\delta]$, $\bar{r}\in[r,\bar{\bar{r}}-4\delta]$ і векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_q$ справджується оцінка

$$\left\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}h\right\|_{\bar{d},\bar{r},\theta,\Omega_j} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma - C_1K'K''|\varepsilon|}\left\||\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}h\right\|_{\bar{d}+\kappa_j,\bar{r}+\alpha_j,\theta\theta_1^{\frac{1}{2}},\Omega_j} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma - C_1K'K''|\varepsilon|}\|h\|_{\bar{d}+2\kappa_j,\bar{r}+2\alpha_j,\theta\theta_1,\Omega_j} \leq$$

$$\leq \frac{K'K''N_q^{4\delta}}{\gamma - C_1K'K''|\varepsilon|}\|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta} = \frac{K'K''N_q^{4\delta}}{\frac{\gamma}{2} - C_1K'K''|\varepsilon| + \frac{\gamma}{2}}\|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta} \leq \frac{2K'K''}{\gamma}N_q^{4\delta}\|h\|_{\bar{d},\bar{r},\theta}.$$

Отже, властивість (P_5) доведено.

За властивістю (P_5) нерівність (11) виконується для всіх $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_q$. Далі для довільного $\gamma>0$ покажемо, що послідовність вкладених множин $\{\mathcal{A}_q\}_{q=0,1,\ldots}$ збігається до множини $\mathcal{A}_\infty$, тобто $\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}_\infty(\gamma)=\lim_{q\to\infty}\mathcal{A}_q$. Саме на цій множині існує розв'язок задачі (1), (2).

3. Встановлення умов розв'язності задачі (1), (2). Рекурентно задамо послідовність $\{u_q\}_{q\geq 0}$ функцій $u_q\in\mathbf{W}^{(N_q)}$, визначених на $\mathcal{A}_q$, яка збігатиметься до розв'язку $u\in\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ задачі (1), (2) для кожного $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_\infty$. Метою побудови цієї послідовності є також дослідження множини параметрів $\mathcal{A}_\infty$, для яких існує розв'язок задачі (1), (2). Покажемо, що $\mathcal{A}_\infty$ є досить великою підмножиною у множині $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\mathcal{O}_{a_0}^{p+1}$, та знайдемо оцінку знизу її міри.

Теорема 1. *Нехай виконуються властивості* $(P_1)-(P_5)$, $\beta=12\delta$, $\delta=\kappa+\alpha-n/2$. *Тоді існує послідовність функцій* $\{u_q\}_{q\geq 0}$, *в якій* $u_q=\sum_{i=0}^{q}h_i$ *належить до простору* $\mathbf{W}^{(N_q)}$ *та є розв'язком рівняння*

$$Lu_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_q}f(u_q)=0, \qquad (P_{N_q})$$

що визначений для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_q$ *і має такі властивості*: (P_{N_q}) $B_q\leq B_0N_{q+1}^{4\delta}$, $q\in\mathbb{N}$, $B_0\leq 1+\frac{|\varepsilon|}{\gamma}2K'K''C_0N_0^{16\delta}$ *та* $\|h_i\|_{d,r,\theta}\leq 4C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-4\delta}$, $i\in\mathbb{N}$, *де* $B_q=1+\|u_q\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}$ *для* $q\geq 0$.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. За умови $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_0$ знайдемо розв'язок рівняння

$$Lu - \varepsilon\mathrm{P}_{N_0}f(u)=0. \qquad (P_{N_0})$$

Оскільки існує $L^{-1}:\mathbf{W}^{(N_0)}\to\mathbf{W}^{(N_0)}$, зокрема

$$L^{-1}w = \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_0}}\lambda_{k,m}^{-1}w_{k,m}\varphi_{k,m} = \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_0}}\frac{w_{k,m}\varphi_{k,m}}{\lambda_{k,m}}$$

для довільних функцій $w=\sum_{(k,m)\in\Omega^{N_0}}w_{k,m}\varphi_{k,m}$, то з оцінки (9) випливає нерівність

$$\left\|L^{-1}w\right\|^2_{d,r,\theta,\Omega_j} = \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_0}\cap\Omega_j}\theta^2(k,m)(1+\|\alpha_k\|^2)^d(1+m^2)^r\frac{|w_{k,m}|^2}{|\lambda_{k,m}|^2}\leq$$

$$\leq \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_0}\cap\Omega_j} \frac{1}{\gamma^2}\theta^2(k,m)\theta_1^2(k,m)\big(1+\|\alpha_k\|^2\big)^{d+2\kappa_j}(1+m^2)^{r+2\alpha_j}|w_{k,m}|^2 =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2}\|w\|^2_{d+2\kappa_j,r+2\alpha_j,\theta\theta_1,\Omega_j}, \quad j=1,2.$$

Тоді (P_{N_0}) зводиться до вигляду $u{=}\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}f(u)$ і для $\omega{\in}\mathbf{W}^{(N_0)}$ за нерівністю (5) справджуються оцінки

$$\big\|L^{-1}w\big\|_{d,r,\theta,\Omega_j}{\leq}\frac{1}{\gamma}\|w\|_{d+2\kappa_j,r+2\alpha_j,\theta\theta_1,\Omega_j} \leq$$

$$\leq \frac{K'K''}{\gamma}N_0^{4\delta}\|w\|_{d,r,\theta,\Omega_j}{\leq}\frac{K'K''}{\gamma}N_0^{4\delta}\|w\|_{d,r,\theta}, \quad j=1,2. \tag{12}$$

Зауваження. Якщо $C_1=0$, то $f(u)=f(0)$ і $u=\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}f(0)$ — єдиний розв'язок рівняння (P_{N_0}) для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a}){\in}\mathcal{A}_0$. Зокрема, якщо $C_0{=}0$, то $C_1{=}0$ і $f(u){=}f(0){=}0$.

Позначимо через $H^0:\mathbf{W}^{(N_0)}\to\mathbf{W}^{(N_0)}$ оператор зі значенням $H^0(u)=\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}f(u)$ на елементі $u\in\mathbf{W}^{(N_0)}$. Тоді знаходження розв'язку рівняння (P_{N_0}) зводиться до відшукання нерухомої точки $u{\in}\mathbf{W}^{(N_0)}$ цього оператора.

Покажемо, що для кожного вектора $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_0$ оператор H^0 є стиском в області $G^0= \left\{u\in\mathbf{W}^{(N_0)}:\|u\|_{d,r,\theta}\leq\rho_0=\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}2C_0K'K''N_0^{4\delta}\right\}$. На основі нерівності (12), властивості (P_2), умови $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ та формули (10) для $u\in G^0$ справедливою є оцінка

$$\big\|H^0(u)\big\|_{d,r,\theta}\leq\frac{|\varepsilon|}{\gamma}K'K''N_0^{4\delta}\big\|f(u)\big\|_{d,r,\theta}\leq\frac{|\varepsilon|}{\gamma}K'K''N_0^{4\delta}C_0(1+\|u\|_{d,r,\theta})\leq$$

$$\leq\frac{|\varepsilon|}{\gamma}K'K''N_0^{4\delta}C_0(1+\rho_0)=\frac{\rho_0}{2}+\frac{|\varepsilon|}{\gamma}K'K''N_0^{4\delta}C_0\rho_0\leq\rho_0,$$

тобто $H^0(G^0)\subset G^0$. Використовуючи нерівність (12), властивість (P_3) і рівність $H^0(u)-H^0(u')=\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}\big(f(u)-f(u')\big)$, записуємо для довільних $u,u'\in G^0$ оцінку

$$\big\|H^0(u)-H^0(u')\big\|_{d,r,\theta}\leq\frac{|\varepsilon|}{\gamma}K'K''N_0^{4\delta}\big\|f(u)-f(u')\big\|_{d,r,\theta}\leq C_1K'K''\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{4\delta}\|u-u'\|_{d,r,\theta}.$$

З умови (10) випливає, що відображення $H^0:\mathbf{W}^{(N_0)}\to\mathbf{W}^{(N_0)}$ є стиском в області G^0, тобто $u=u_0\in G^0\subset\mathbf{W}^{(N_0)}$ є єдиним розв'язком рівняння (P_{N_0}) і $B_0\leq1+N_0^{\beta}\rho_0= =1+\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}2C_0K'K''N_0^{16\delta}$. Нульовий крок індукції зроблено.

Далі за індукцією будуємо елементи послідовності $\{u_q\}_{q>0}$ вигляду $u_q=\sum_{i=0}^{q}h_i$, де $h_0=u_0$, для оцінки норми яких у просторі $\mathbf{X}_{d+\beta,r+\beta,\theta}(\Omega_j)$, $j=1,2$, використовуємо таку лему (доведення леми див. у п. 4).

Лема 4. *Для елементів u_q послідовності $\{u_q\}_{q\geq0}$ справджується оцінка*

$$B_{q+1}\leq\big(1+N_{q+1}^{4\delta}\big)B_q. \tag{13}$$

З нерівності (13) за індукцією отримуємо $B_q \leq B_0 \prod_{i=1}^{q} (1 + N_i^{4\delta}) = B_0 \prod_{i=1}^{q} \Big(1 + \big(N_0^{2^i}\big)^{4\delta}\Big)$. Оскільки $1 + \big(N_0^{2^i}\big)^{4\delta} \leq \big(N_0^{2^i+2^{-i}}\big)^{4\delta}$, то виконується нерівність

$$B_q \leq B_0 \prod_{i=1}^{q} \big(N_0^{2^i+2^{-i}}\big)^{4\delta} = B_0 N_0^{\sum_{i=1}^{q} 4\delta(2^i+2^{-i})} = B_0 N_0^{4\delta 2^{q+1} - 4\delta + \sum_{i=1}^{q} \delta 2^{2-i}} \leq B_0 N_{q+1}^{4\delta}.$$

Вважаючи відомими функції $u_0,\ u_1, \ldots, u_q$, доведемо існування функцій $u_{q+1} \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ — розв'язку рівняння

$$L u_{q+1} - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_{q+1}) = 0. \qquad (P_{N_{q+1}})$$

Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$, то $h_{q+1} \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ і $B_{q+1} = 1 + \|u_{q+1}\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} \leq B_0 N_{q+2}^{4\delta}$. Оцінимо доданок h_{q+1} у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$.

Для кожного $h \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ запишемо процедуру лінеаризації лівої частини рівняння $(P_{N_{q+1}})$:

$$L(u_q + h) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) = L u_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) + Lh - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h +$$
$$+ \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h + \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h -$$
$$- \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h) = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h),$$

де $r_q = L u_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q),\ R_q(h) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \big(f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h\big)$, у підсумку якої h_{q+1} є розв'язком у просторі $\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ лінеаризованого у точці u_q рівняння

$$r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h) = 0.$$

Оскільки u_q є розв'язком рівняння (P_{N_q}), тобто $L u_q = \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} f(u_q)$, то

$$r_q = \varepsilon (\mathrm{P}_{N_q} - \mathrm{P}_{N_{q+1}}) f(u_q) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_q}^{\perp} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) \in \mathbf{W}^{(N_q)\perp} \cap \mathbf{W}^{(N_{q+1})}.$$

Звідси, використовуючи формулу (6) та властивість (P_2), отримуємо

$$\|r_q\|_{d,r,\theta} = |\varepsilon| N_q^{-2\beta} \|\mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} \leq |\varepsilon| C_0 N_q^{-2\beta} B_q \leq |\varepsilon| C_0 B_0 N_q^{-2\beta} N_{q+1}^{4\delta}.$$

Для оцінки норми $\|R_q(h)\|_{d,r,\theta}$ елемента $R_q(h) \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ використаємо властивість (P_4) й одержимо $\|R_q(h)\|_{d,r,\theta} \leq 2C_2 |\varepsilon| \|h\|_{d,r,\theta}^2$. Оскільки для будь-яких $h,\ h' \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$

$$R_q(h) - R_q(h') = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \big(f(u_q + h) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\big) =$$
$$= -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \big(f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\big),$$

то за властивістю (P_4) справджується оцінка

$$\big\|R_q(h) - R_q(h')\big\|_{d,r,\theta} \leq |\varepsilon| \|f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\|_{d,r,\theta} \leq$$
$$\leq |\varepsilon| \big\|f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q + h')(h - h') + \mathrm{D}_u f(u_q + h')(h - h') -$$
$$- \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\big\|_{d,r,\theta} \leq |\varepsilon| \big(2C_2 \|h - h'\|_{d,r,\theta}^2 + C_1 \|h - h'\|_{d,r,\theta} \|h'\|_{d,r,\theta}\big) \leq$$

$$\le |\varepsilon|\big(2C_2\|h-h'\|_{d,r,\theta}(\|h\|_{d,r,\theta}+\|h'\|_{d,r,\theta})+C_1\|h-h'\|_{d,r,\theta}\|h'\|_{d,r,\theta}\big) \le$$

$$\le \frac{C_3}{K'K''}|\varepsilon|\big(\|h\|_{d,r,\theta}+2\|h'\|_{d,r,\theta}\big)\|h-h'\|_{d,r,\theta}.$$

За властивістю (P_5) оператор $\mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)$ є оборотним для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_{q+1}$, $u_q \in \mathbf{W}^{(N_q)}$ і $\big\|\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)[h]\big\|_{d,r,\theta} \le \dfrac{2K'K''}{\gamma}N^{4\delta}_{q+1}\|h\|_{d,r,\theta}$.

Позначимо через $H_{q+1}\colon \mathbf{W}^{(N_{q+1})} \to \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ оператор зі значенням

$$H_{q+1}(h) = -\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)\big(r_q+R_q(h)\big)$$

на елементі $h \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$. Тоді розв'язування рівняння $(\mathrm{P}_{N_{q+1}})$ еквівалентне знаходженню нерухомої точки $h_{q+1}=h \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$.

Лема 5. *Для кожного вектора $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_{q+1}$ оператор H_{q+1}, де $q \ge 0$, є стиском в області* $G_{q+1}=\left\{h \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}\colon \|h\|_{d,r,\theta} \le \rho_{q+1} = 4C_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-4\delta}_{q+1}\right\}$.

З леми 5 випливає існування для $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_{q+1}$ єдиного розв'язку $h_{q+1} \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$, який задовольняє нерівність $\|h_{q+1}\|_{d,r,\theta} \le \rho_{q+1} = 4C_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-4\delta}_{q+1}$.

Функція $u_{q+1}=u_q+h_{q+1}$ є розв'язком у просторі $\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $(P_{N_{q+1}})$, який визначений для всіх $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_{q+1} \subseteq \mathcal{A}_0$ і $u_{q+1}=\sum_{i=0}^{q+1}h_i$, де $h_i \in \mathbf{W}^{(N_i)}$, і виконуються оцінки $\|h_i\|_{d,r,\theta} \le 4C_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-4\delta}$ для будь-якого $i=0,1,\ldots,q+1$.

Теорему 1 доведено.

Міру (Лебега) множини $\mathcal{A}_\infty$, для елементів якої справджується теорема 1, описує така теорема.

Теорема 2. *Множину $\mathcal{A}_\infty$ визначає формула $\mathcal{A}_\infty = \bigcap\limits_{q\ge 0}\mathcal{A}_q$, а для її міри* $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty$ *справедливою є оцінка* $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty \ge \varepsilon_0^2 a_0^{2p+2}\pi^{p+2}\left(1-\gamma^2\dfrac{\tilde{C}p^{2n}\zeta_1(2)\zeta_2(2)}{A^2}\right)$, $\tilde{C}=2^n/\min\big\{1,C^{2n}\big\}>0$.

Доведення. Оскільки $\mathcal{A}_q=\bigcap\limits_{l=0}^{q}\mathcal{A}_l$, то $\mathcal{A}_\infty=\lim_{q\to\infty}\mathcal{A}_q=\bigcap\limits_{q=0}^{\infty}\mathcal{A}_q=\bigcap\limits_{q\ge 0}\mathcal{A}_q$.

Зауважимо, що $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty=\varepsilon_0^2a_0^{2p+2}\pi^{p+2}-\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_\infty}$, де $\overline{\mathcal{A}_\infty}=\bigcup\limits_{q=0}^{\infty}\overline{\mathcal{A}_q}$, $\overline{\mathcal{A}_q}=\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\overline{A_q}$ і $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_\infty}=\lim_{q\to\infty}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_q}$, а горизонтальна риска над множиною означає операцію доповнення цієї множини у множині $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\mathcal{O}^{p+1}_{a_0}$ або у множині $\mathcal{O}^{p+1}_{a_0}$.

Знайдемо міру множини $\overline{\mathcal{A}_\infty}$. Для цього оцінимо міру множини $\overline{A_q}=\bigcup\limits_{(k,m)\in\Omega^{N_q}}\overline{A_q(k,m)}$, де $\overline{A_q(k,m)}$ — множина векторів $\vec{a}$, для яких при фіксованому векторі $(k,m)\in\Omega^{N_q}$ виконується нерівність

$$|\lambda_{k,m}|<\gamma(1+\|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_j}(1+m^2)^{-\alpha_j}\theta_1^{-1}(k,m), \quad j=1,2.$$

Розглянемо випадок, коли $j=1$, тобто $(k,m)\in\Omega_1$. Виберемо число η, найбільше з чисел j, таке, що $|\alpha_{\eta k}|=\max_{j=1,\ldots,n}\big\{|\alpha_{jk}|\big\}$. Тоді $|\tau(m)|<\|\alpha_k\|$ і

$$|\lambda_{k,m}| = |\alpha_{\eta k}|^n \Big| a_{\hat{s}(\eta)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(\eta)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \gamma (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_1} (1 + m^2)^{-\alpha_1} \theta_1^{-1}(k,m),$$

звідки

$$\Big| a_{\hat{s}(\eta)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(\eta)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \frac{\gamma}{|\alpha_{\eta k}|^n} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_1} (1 + m^2)^{-\alpha_1} \theta_1^{-1}(k,m).$$

Оскільки $p|\alpha_{\eta k}|^2 \geq \|\alpha_k\|^2$, звідки $|\alpha_{\eta k}|^n \geq p^{-\frac{n}{2}} \|\alpha_k\|^n$, і

$$\|\alpha_k\|^2 \geq \frac{C^2 + \|\alpha_k\|^2}{2} \geq \frac{\min\{1, C^2\}}{2} (1 + \|\alpha_k\|^2),$$

звідки $\|\alpha_k\|^n \geq \left(\frac{\min\{1, C^2\}}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \|\alpha_k\|^2\right)^{\frac{n}{2}}$, $C > 0$, то виконується нерівність

$$\Big| a_{\hat{s}(\eta)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(\eta)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \gamma p^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\min\{1, C^2\}}{2} \right)^{-\frac{n}{2}} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_1 - \frac{n}{2}} (1 + m^2)^{-\alpha_1} \theta_1^{-1}(k,m).$$

Для міри $\operatorname{meas} \overline{A_q(k,m)}$ множини $\overline{A_q(k,m)}$ для $(k,m) \in \Omega_1$ справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \overline{A_q(k,m)} \leq \pi^{p+1} a_0^{2p} \gamma^2 p^n \left(\frac{\min\{1; C^2\}}{2} \right)^{-n} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-2\kappa_1 - n} (1 + m^2)^{-2\alpha_1} \theta_1^{-2}(k,m). \quad (14)$$

Розглянемо випадок, коли $j = 2$, тобто $(k,m) \in \Omega_2$. Тоді $|\tau(m)| \geq \|\alpha_k\|$ і

$$|\lambda_{k,m}| = |\tau(m)|^n \Big| a_{\hat{s}(0)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(0)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \gamma (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_2} (1 + m^2)^{-\alpha_2} \theta_1^{-1}(k,m),$$

звідки $\Big| a_{\hat{s}(0)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(0)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \dfrac{\gamma}{|\tau(m)|^n} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_2} (1 + m^2)^{-\alpha_2} \theta_1^{-1}(k,m).$

Оскільки $\left|\tau(m)\right|^2 \geq \dfrac{C^2 + m^2}{2} \geq \dfrac{\min\{1, C^2\}}{2} (1 + m^2)$, звідки $|\tau(m)|^n \geq \left(\dfrac{\min\{1, C^2\}}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \big(1 + m^2\big)^{\frac{n}{2}}$, $C > 0$, то виконується нерівність

$$\Big| a_{\hat{s}(0)} + \sum_{\hat{s}\neq\hat{s}(0)} a_{\hat{s}} \tau^{s_0}(m) \alpha_k^s \Big| < \gamma \left(\frac{\min\{1, C^2\}}{2} \right)^{-\frac{n}{2}} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-\kappa_2} (1 + m^2)^{-\alpha_2 - \frac{n}{2}} \theta_1^{-1}(k,m).$$

Для міри $\operatorname{meas} \overline{A_q(k,m)}$ множини $\overline{A_q(k,m)}$ при $(k,m) \in \Omega_2$ справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \overline{A_q(k,m)} \leq \pi^{p+1} a_0^{2p} \gamma^2 \left(\frac{\min\{1, C^2\}}{2} \right)^{-n} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-2\kappa_2} (1 + m^2)^{-2\alpha_2 - n} \theta_1^{-2}(k,m). \quad (15)$$

Запишемо оцінку $\operatorname{meas} \overline{A_q(k,m)} \leq \tilde{C} \pi^{p+1} a_0^{2p} p^n \gamma^2 (1 + \|\alpha_k\|^2)^{-2\kappa} (1 + m^2)^{-2\alpha} \theta_1^{-2}(k,m)$, де $\tilde{C} = (\min\{1, C^2\}/2)^{-n}$, для міри множини $\overline{A_q(k,m)}$ при довільному векторі (k,m), врахувавши нерівності (14), (15):

$$\operatorname{meas}\overline{A_q} \leq \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_q}} \operatorname{meas}\overline{A_q(k,m)} \leq$$

$$\leq \tilde{C}p^{2n}\pi^{p+1}a_0^{2p}\gamma^2 \sum_{(k,m)\in\Omega^{N_q}} (1+\|\alpha_k\|^2)^{-2\kappa}(1+m^2)^{-2\alpha}\theta_1^{-2}(k,m) \leq$$

$$\leq \tilde{C}p^{2n}\pi^{p+1}a_0^{2p}\gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{N}}(1+\|\alpha_k\|^2)^{-2\kappa}\varphi_1^2(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+m^2)^{-2\alpha}\psi_1^2(m) \leq \tilde{C}p^{2n}\pi^{p+1}a_0^{2p}\gamma^2\zeta_1(2)\zeta_2(2).$$

Тоді для міри $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_q}$ множини $\overline{\mathcal{A}_q}$ справедливою є оцінка

$$\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_q} \leq \pi\varepsilon_0^2 \operatorname{meas}\overline{A_q} \leq \tilde{C}\pi^{p+2}\varepsilon_0^2 p^{2n}a_0^{2p}\gamma^2\zeta_1(2)\zeta_2(2).$$

Знайдемо міру $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_\infty} = \lim_{q\to\infty}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_q}$, а саме $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}_\infty} \leq \tilde{C}\pi^{p+2}\varepsilon_0^2 p^{2n}a_0^{2p}\gamma^2\zeta_1(2)\zeta_2(2)$. Міра множини $\mathcal{A}_\infty$ має асимптотику $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty \underset{\gamma\to 0}{=} \operatorname{meas}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\mathcal{O}_{a_0}^{p+1}\right) + O(\gamma^2)$, зокрема

$$\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty \geq \varepsilon_0^2 a_0^{2p+2}\pi^{p+2} - \tilde{C}\pi^{p+2}\varepsilon_0^2 p^{2n}a_0^{2p}\zeta_1(2)\zeta_2(2)\gamma^2 =$$

$$= \varepsilon_0^2 a_0^{2p+2}\pi^{p+2}\left(1-\gamma^2\frac{\tilde{C}p^{2n}\zeta_1(2)\zeta_2(2)}{a_0^2}\right).$$

Теорему 2 доведено.

Доведемо теорему існування розв'язку u задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$.

Теорема 3. *Для всіх векторів* $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty$, *довільного* $\gamma > 0$ *і натурального* $N_0 \geq 2$ *ряд* $\sum_{i\geq 0} h_i$ *є збіжним у просторі* $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ *до розв'язку* u *задачі* (1), (2), *норма якого визначається нерівністю* $\|u\|_{d,r,\theta} \leq \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}\dfrac{8C_3B_0}{N_0^{4\delta}}$.

Доведення. За теоремою 1 для всіх $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty$ для мажорантного ряду $\sum_{i\geq 0}\|h_i\|_{d,r,\theta}$ виконується оцінка

$$\sum_{i\geq 0}\|h_i\|_{d,r,\theta} \leq \sum_{i\geq 0} 4C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-4\delta}.$$

Тому ряд $\sum_{i\geq 0} h_i$ збігається у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ до деякої функції $u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}$, оскільки

$$\|u\|_{d,r,\theta}\leq \sum_{i\geq 0}\|h_i\|_{d,r,\theta}\leq \sum_{i\geq 0} 4C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-4\delta} = 4C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\sum_{i\geq 0}\left(N_0^{2^i}\right)^{-4\delta} \leq 4C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\frac{2}{N_0^{4\delta}} = \frac{8C_3B_0}{N_0^{4\delta}}\frac{|\varepsilon|}{\gamma}.$$

Покажемо, що $Lu = \varepsilon f(u)$. Функція u_q є розв'язком рівняння (P_{N_q}), тоді

$$Lu_q = \varepsilon P_{N_q} f(u_q) = \varepsilon f(u_q) - \varepsilon P_{N_q}^{\perp} f(u_q). \tag{16}$$

З властивості (6) проектора $P_{N_q}^{\perp}$, (P_2) і оцінки для B_q у доведенні теореми 1 знаходимо

$$\left\|P_{N_q}^{\perp} f(u_q)\right\|_{d,r,\theta} \leq N_q^{-2\beta}\|f(u_q)\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq C_0 N_q^{-2\beta}B_q \leq C_0B_0N_q^{-24\delta}N_{q+1}^{4\delta} =$$

$$= C_0B_0N_q^{-24\delta}N_q^{8\delta} = C_0B_0N_q^{-16\delta} = C_0B_0N_0^{-16\delta 2^q}.$$

Звідси випливає, що $P^{\perp}_{N_q} f(u_q) \to 0$ при $q \to \infty$. За властивістю (P_1) права частина (16) є збіжною до $\varepsilon f(u)$ у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$, а з неперервності оператора L випливає, що ліва частина (16) Lu_q при $q \to \infty$ збігається до Lu у сенсі розподілів.

Теорему 3 доведено.

Отже, за допомогою ітераційної схеми Неша – Мозера для довільного числа $\gamma > 0$ за умови (10) доведено існування розв'язку $u \in \mathbf{X}_{d,r,\theta}$ задачі (1), (2) для всіх векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty(\gamma) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}^{p+1}_{a_0}$, причому $\operatorname{meas} \mathcal{A}_\infty(\gamma) \geq (1 - \Gamma_1 \gamma^2) \operatorname{meas}(\mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}^{p+1}_{a_0})$, $\Gamma_1 = \dfrac{\tilde{C} p^{2n} \zeta_1(2) \zeta_2(2)}{a_0^2}$.

4. Доведення допоміжних лем. ***Доведення леми* 1.** Для всіх векторів $\vec{a} \in A_q$ оператор $|\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$ існує, оскільки $\mathcal{D}$ не має нульового власного значення. Якщо $h = \sum_{(k,m) \in \Omega^{N_q}} e^{\tau(m)t} x_k h_{k,m}$, то $|\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h = \sum_{(k,m) \in \Omega^{N_q}} \dfrac{h_{k,m} \varphi_{k,m}}{\sqrt{|\lambda_{k,m}|}}$, а з нерівності (9) випливає оцінка

$$\big\| |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h \big\|^2_{d^*, r^*, \theta, \Omega_j} = \sum_{(k,m) \in \Omega^{N_q}} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{d^*} (1 + m^2)^{r^*} \theta^2(k,m) \frac{|h_{k,m}|^2}{|\lambda_{k,m}|} \leq$$

$$\leq \sum_{(k,m) \in \Omega^{N_q}} \frac{1}{\gamma} (1 + \|\alpha_k\|^2)^{d^* + \kappa_j} (1 + m^2)^{r^* + \alpha_j} \theta^2(k,m) \theta_1(k,m) |h_{k,m}|^2 = \frac{1}{\gamma} \|h\|^2_{d^* + \kappa_j, r^* + \alpha_j, \theta\theta_1^{\frac{1}{2}}, \Omega_j},$$

що й доводить лему 1.

***Доведення леми* 2.** Оскільки $\mathcal{U} = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D} |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$, то його дію на $h \in \mathbf{X}_{d^*, r^*, \theta}$ задає формула $\mathcal{U}h = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} \dfrac{\lambda_{k,m}}{|\lambda_{k,m}|} h_{k,m} \varphi_{k,m}$, де $\lambda_{k,m}$ — власні значення оператора $\mathcal{D}$. Використовуючи означення простору $\mathbf{X}_{d^*, r^*}$ і норми у цьому просторі, отримуємо $\|\mathcal{U}^{-1} h\|_{d^*, r^*, \theta} = \|h\|_{d^*, r^*, \theta}$.

Лему 2 доведено.

***Доведення леми* 3.** Оскільки $\mathcal{R}_1 h = \varepsilon |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_{N_q} \big(D_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h \big)$, то, використовуючи лему 1, умову (P_3) і нерівність (5), одержуємо

$$\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta, \Omega_j} \leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \big\| \mathrm{P}_{N_q} \mathrm{D}_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h \big\|_{\bar{d} + \kappa_j, \bar{r} + \alpha_j, \theta\theta_1^{\frac{1}{2}}, \Omega_j} \leq$$

$$\leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} N_q^{-3\delta} \|\mathrm{D}_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\|_{\bar{d} + 4\kappa_j, \bar{r} + 4\alpha_j, \theta\theta_1^{\frac{1}{2}}, \Omega_j} \leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} N_q^{-3\delta} C_1 \| |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta\theta_1^{\frac{1}{2}}, \Omega_j} \leq$$

$$\leq C_1 |\varepsilon| \frac{1}{\gamma} N_q^{-3\delta} \|h\|_{\bar{d} + \kappa_j, \bar{r} + \alpha_j, \theta\theta_1, \Omega_j} \leq C_1 |\varepsilon| \frac{K' K''}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta, \Omega_j} \leq C_1 |\varepsilon| \frac{K' K''}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}, \bar{r}, \theta}.$$

Лему 3 доведено.

***Доведення леми* 4.** Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$ і $h_{q+1} \in G_{q+1}$, то

$$B_{q+1} = 1 + \|u_{q+1}\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} \leq 1 + \|u_q\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} + \|h_{q+1}\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} = B_q + \|h_{q+1}\|_{d+\beta, r+\beta, \theta}.$$

Для норми розв'язку h_{q+1} рівняння $h_{q+1} = -\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) \big(r_q + R_q(h_{q+1}) \big)$ у просторі $\mathbf{X}_{d+\beta, r+\beta, \theta}$ справджується оцінка

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} \leq \frac{2K'K''}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} \big(\|r_q\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} + \|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta, r+\beta, \theta} \big). \tag{17}$$

Оскільки $r_q = -\varepsilon \mathrm{P}^{\perp}_{N_q} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)$, то, використовуючи властивість (P_2), записуємо оцінку для $\|r_q\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}$:

$$\|r_q\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq |\varepsilon| \|f(u_q)\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq |\varepsilon| C_0 (1 + \|u_q\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}) = |\varepsilon| C_0 B_q. \tag{18}$$

Для оцінки величини $\|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}$ застосуємо лему 5 і властивість (P_4):

$$\|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq |\varepsilon| C_2 \big(\|u_q\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \|h_{q+1}\|^2_{d,r,\theta} + \|h_{q+1}\|_{d,r,\theta} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}\big) \leq$$
$$\leq |\varepsilon| C_2 \big(B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}\big). \tag{19}$$

Підставляючи оцінки (18), (19) у нерівність (17), отримуємо

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq \frac{2K'K''}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} \Big(|\varepsilon| C_0 B_q + |\varepsilon| C_2 \big(B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}\big)\Big) =$$
$$= 2K'K'' \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} (C_0 B_q + C_2 \rho^2_{q+1} B_q + C_2 \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}) <$$
$$< C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} (2B_q + \rho^2_{q+1} B_q + \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}).$$

Враховуючи лему 5 і рівність (10) при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, з нерівності $4C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} \rho_{q+1} < 4C_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} \rho_{q+1} < 1$ одержуємо для $q \geq 2$ оцінку

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq 2C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} B_q + \frac{\rho_{q+1}}{4} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} < 2C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} B_q +$$
$$+ C_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{-4\delta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} = 2C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} B_q \Big(N^{4\delta}_{q+1} + \frac{1}{2} B_0 N^{-4\delta}_{q+1}\Big) + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq$$
$$\leq 4C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta}.$$

Тоді $\frac{3}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq 4C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} B_q$ для $q \geq 2$, звідки, враховуючи (10) при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, маємо

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq \frac{16}{3} C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{4\delta}_{q+1} B_q \leq N^{4\delta}_{q+1} B_q, \quad q \geq 2,$$

$$\|h_1\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq \frac{8}{3} C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} (1 + \alpha_1) N^{4\delta}_1 B_0, \qquad \|h_2\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq \frac{8}{3} C_3 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} (1 + \alpha_2) N^{4\delta}_2 B_1,$$

де $\alpha_1 = \frac{1}{2} B_0 N^{-16\delta}_0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} B_0 N^{-32\delta}_0$.

З (10) випливає, що $|\varepsilon| < y_1$ і, отже, $|\varepsilon| < 3\gamma \Big(8C_3 \Big(1 + \frac{1}{2} N^{-16\delta}_0 \Big(1 + \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2C_0 K'K'' N^{16\delta}_0\Big)\Big)\Big)^{-1}$, звідки $|\varepsilon| < 3\gamma \Big(8C_3 (1 + \alpha_1)\Big)^{-1}$. Тоді виконується нерівність $\|h_1\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq N^{4\delta}_1 B_0$. Аналогічно за умовою (10) справджується нерівність $|\varepsilon| < y_2$ і, отже, $|\varepsilon| < 3\gamma \Big(8C_3 \Big(1 + \frac{1}{2} N^{-32\delta}_0 \Big(1 + \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2C_0 K'K'' N^{16\delta}_0\Big)\Big)\Big)^{-1}$. Тоді $|\varepsilon| < 3\gamma \Big(8C_3 (1 + \alpha_2)\Big)^{-1}$ і $\|h_2\|_{d+\beta,r+\beta,\theta} \leq N^{4\delta}_2 B_1$.

Отже, $B_{q+1}\leq B_q + N_{q+1}^{4\delta}B_q=(1+N_{q+1}^{4\delta})B_q$, що і потрібно було довести.

Лему 4 доведено.

***Доведення леми* 5.** За властивістю (P_5) для $h\in G_{q+1}$ маємо

$$\|H_{q+1}(h)\|_{d,r,\theta}\leq \frac{2K'K''}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}\big(\|r_q\|_{d,r,\theta}+\|R_q(h)\|_{d,r,\theta}\big)\leq$$

$$\leq 2C_0K'K''B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}N_q^{-2\beta}N_{q+1}^{4\delta}+4C_2K'K''\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}\|h\|_{d,r,\theta}^2.$$

Враховуючи значення β, рівність $N_{q+1}=N_q^2$, формулу (10) і умову $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, отримуємо нерівність

$$\|H_{q+1}(h)\|_{d,r,\theta}\leq 2C_0K'K''B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-4\delta}+4C_2K'K''\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}\rho_{q+1}^2\leq$$

$$\leq 2C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-4\delta}+2C_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}\rho_{q+1}^2\leq\frac{\rho_{q+1}}{2}+8B_0\left(C_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\right)^2\rho_{q+1}\leq\rho_{q+1},$$

тому оператор H_{q+1} відображає G_{q+1} в себе.

Для довільних $h,\ h'\in G_{q+1}$ виконується $H_{q+1}(h)-H_{q+1}(h')=-\mathcal{L}_{N_{q+1}}^{-1}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)\big(R_q(h)-R_q(h')\big)$, тому для норми цієї різниці у просторі $\mathbf{X}_{d,r,\theta}$ справедливою є оцінка

$$\|H_{q+1}(h)-H_{q+1}(h')\|_{d,r,\theta}\leq\frac{2K'K''}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}\big\|R_q(h)-R_q(h')\big\|_{d,r,\theta}\leq$$

$$\leq 2C_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}(\|h\|_{d,r,\theta}+2\|h'\|_{d,r,\theta})\|h-h'\|_{d,r,\theta}\leq$$

$$\leq 2C_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{4\delta}12C_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-4\delta}\|h-h'\|_{d,r,\theta}\leq 24B_0\left(C_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\right)^2\|h-h'\|_{d,r,\theta}.$$

З (10) випливає, що $|\varepsilon|<y_1$ і $|\varepsilon|<\gamma\left(2\sqrt{6}C_3\sqrt{1+\frac{|\varepsilon|}{\gamma}2C_0K'K''N_0^{16\delta}}\right)^{-1}$, звідки одержуємо нерівність $|\varepsilon|<\dfrac{\gamma}{2C_3\sqrt{6B_0}}$. Отже, оператор H_{q+1} є стиском.

Лему 5 доведено.

5. Висновки. У роботі досліджено нелокальну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння зі слабко нелінійною правою частиною у гільбертових просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу просторів функцій багатьох дійсних змінних. Знаходження умов розв'язності проведено за допомогою ітераційної схеми Неша – Мозера. Отримано оцінки норм у відповідних функціональних просторах обернених лінеаризованих операторів, які виникають на кожному кроці цієї схеми; побудовано послідовність наближених розв'язків. При цьому виникає проблема малих знаменників, яку вирішено за допомогою метричного підходу.

Література

1. Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними*, Наук. думка, Київ (2002).

2. P. W. Eloea, B. Ahmadb, *Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions*, J. Appl. Math. Lett., **18**, № 5, 521 – 527 (2005).
3. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Extended Sobolev scale and elliptic operators*, Ukr. Math. J., **65**, № 3, 435 – 447 (2013).
4. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems*, De Gruyter, Berlin; Boston (2014).
5. V. S. Il'kiv, Z. M. Nytrebych, P. Y. Pukach, *Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Different. Equat., **2017**, № 265, 1 – 9 (2017).
6. В. С. Ільків, Н. І. Страп, *Розв'язність нелокальної крайової задачі для системи диференціально-операторних рівнянь у шкалі просторів Соболєва та уточненій шкалі*, Укр. мат. журн., **67**, № 5, 611 – 624 (2014).
7. В. С. Ільків, Н. І. Страп, *Про розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння в уточненій соболєвській шкалі*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **10**, № 2, 1 – 23 (2013).
8. M. Berti, P. Bolle, *Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations*, Duke Math. J., **134**, № 2, 359 – 419 (2006).
9. M. Berti, P. Bolle, *Cantor families of periodic solutions of wave equations with C^k nonlinearities*, Nonlinear Different. Equat. and Appl., **15**, 247 – 276 (2008).
10. I. Volyanska, V. Il'kiv, N. Strap, *Solvability conditions of nonlocal boundary value problem for the differential-operator equation with weak nonlinearity*, Mat. Stud., **50**, № 1, 44 – 59 (2018).

Одержано 15.12.19