DOI: 10.37863/umzh.v72i4.963

УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА – РЕМЕЗА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

In the case of either $r = 2, k = 1$ or $r = 3, k = 1, 2,$ for any $q, p \geq 1,$ $\beta \in [0, 2\pi),$ and arbitrary measurable set $B \subset I_{2\pi} := [-\pi/2, 3\pi/2],$ $\mu B \leq \beta,$ we prove the sharp Kolmogorov – Remez type inequality

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}} \|f\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \big\|f^{(r)}\big\|^{1-\alpha}_{\infty}, \quad f \in L^r_{\infty},$$

with $\alpha = \min\{1 - k/r, (r - k + 1/q)/(r + 1/p)\}$, where φ_r is the perfect Euler's spline of order $r,$ $E_0(f)_{L_p(G)}$ is the best approximation of f by the constants in $L_p(G),$ $B_{2m} = \left[\dfrac{\pi - 2m}{2}, \dfrac{\pi + 2m}{2}\right]$, and $m = m(\beta) \in [0, \pi)$ is uniquely defined by β.

In addition, we obtain a sharp Kolmogorov – Remez type inequality in the case where the number of sign changes of derivatives is also taken into account.

Для $r = 2, k = 1$ або $r = 3, k = 1, 2$ та довільних $q, p \geq 1,$ $\beta \in [0, 2\pi)$ і вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi} := [-\pi/2, 3\pi/2],$ $\mu B \leq \beta,$ доведено точну нерівність типу Колмогорова – Ремеза

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}} \|f\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \big\|f^{(r)}\big\|^{1-\alpha}_{\infty}, \quad f \in L^r_{\infty},$$

із показником $\alpha = \min\{1-k/r, (r-k+1/q)/(r+1/p)\}$, де φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку $r,$ $E_0(f)_{L_p(G)}$ — найкраще наближення константами функції f у просторі $L_p(G),$ $B_{2m} = \left[\dfrac{\pi - 2m}{2}, \dfrac{\pi + 2m}{2}\right]$, а число $m = m(\beta) \in [0, \pi)$ однозначно визначене числом β.

Також отримано точну нерівність типу Колмогорова – Ремеза, що враховує число змін знаку похідних.

1. Введение. Пусть G — измеримое подмножество числовой оси, а $L_p(G)$ — пространство измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ с конечной нормой (квазинормой)

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G \big|x(t)\big|^p\, dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vraisup}_{t\in G} |x(t)|\,, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через I_d окружность, реализованную в виде подходящего отрезка длины d с отождествленными концами. Вместо $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$ и $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ для краткости будем писать $\|x\|_p$ и $\|x\|_\infty$ соответственно.

Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$.

Символом $\varphi_r(t),$ $r \in \mathbf{N},$ обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t,$ удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, *а функция* $f \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *такова, что для любого отрезка* $I = [a, b]$, *удовлетворяющего условиям*

$$f'(a) = f'(b) = 0, \qquad f'(t) \neq 0, \quad t \in (a, b),$$

существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ *такая, что*

$$f_I(t) = f(t), \quad t \in (a, b),$$

а

$$E_0(f_I)_\infty \leq E_0(f)_{L_\infty[a,b]}$$

и

$$\left\|f_I^{(r)}\right\|_\infty \leq \left\|f^{(r)}\right\|_\infty.$$

Тогда для любых $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \geq 1$, $p \in (0, \infty]$ *при* $k = 1$, $p \in [1 - k/r, \infty]$ *при* $k > 1$ *выполнено точное на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|f\|_p^\alpha \left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

с максимально возможным показателем

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r},\ \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}\right\},$$

где $E_0(f)_p := \inf_{c \in \mathbf{R}} \|f - c\|_p$.

В частности, неравенство (1.1) доказано в работе [1] для функций малой гладкости (т. е. при $r = 2,\ k = 1$ и при $r = 3,\ k = 1, 2$).

Отметим, что в [2] исследован вопрос о совпадении точных констант в неравенствах типа (1.1) для периодических и непериодических функций на оси.

В настоящей работе получено обобщение неравенства (1.1), в котором присутствует „эффект Ремеза”. Приведем необходимые определения.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если существует такое $c \in \mathbf{R}$, что

$$\min_{t \in \mathbf{R}} f(t) + c \leq x(t) \leq \max_{t \in \mathbf{R}} f(t) + c, \quad t \in \mathbf{R},$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + c$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)| \leq |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она имеет следующие свойства: φ четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций $x \in L^1_\infty(I_d)$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [3, 4]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы $\left\{f \in L^r_\infty(I_d) \colon \left\|f^{(r)}\right\|_\infty \leq 1\right\}$, а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n,\ k \in \mathbf{Z}$).

В теории приближения важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n,\beta)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.2}$$

на классе T_n, где B — произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \le \beta$.

Начало этой тематике положила работа [5] Е. Ремеза, в которой найдена точная константа $C(n,\beta)$ в неравенстве вида (1.2) для алгебраических многочленов. Для точной константы $C(n,\beta)$ в неравенстве (1.2) для тригонометрических полиномов в ряде работ получены двусторонние оценки. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n,\beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [6] и $\beta \to 0$ [7]. Библиографию работ по данной тематике можно найти в [6 – 9]. В работе [7] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.3}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \le \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (1.3) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Недавно была найдена [10] точная константа в неравенстве (1.2) для тригонометрических полиномов.

Результат работы [7] был обобщен в [11] на классы $S_\varphi(\omega)$. Как следствие получен аналог неравенства (1.3) для полиномиальных сплайнов и функций классов $L^r_\infty(I_{2\pi})$.

В работах [12, 13] доказаны точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах $S_\varphi(\omega)$, в частности, для дифференцируемых периодических функций, тригонометрических полиномов и сплайнов.

В настоящей работе получено точное неравенство типа Колмогорова – Ремеза (теорема 2) для функций, удовлетворяющих условию теоремы 1, с произвольными $q, p \ge 1$. Как следствие неравенства такого типа доказаны для функций малой гладкости с любыми $q, p \ge 1$ (следствие 1). Кроме того, доказано точное неравенство типа Колмогорова – Ремеза (теорема 3 и следствие 2 из нее), учитывающее число перемен знака производных.

2. Необходимые сведения. Пусть $\alpha,\ y > 0$. Для 2ω-периодической S-функции φ положим

$$E^\alpha_y(\varphi) := \big\{t \in I_{2\omega} : |\varphi(t) + \alpha| > y\big\}. \tag{2.1}$$

Ясно, что для любого $\beta \in (0, 2\omega)$ существует единственное число $y = y(\beta)$, для которого

$$\mu E^\alpha_{y(\beta)}(\varphi) = \beta, \tag{2.2}$$

где μ — мера Лебега.

Лемма 1 [13]. *Пусть $p \in [1,\infty]$. Для произвольной 2ω-периодической S-функции φ и любого $\beta \in (0, 2\omega)$ справедливо соотношение*

$$\min_{\alpha\in\mathbf{R}}\left\{\int\limits_{I_{2\omega}\setminus E^{\alpha}_{y(\beta)}(\varphi)}|\varphi(t)+\alpha|^p\,dt\right\}^{1/p}=E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_\beta)},$$

где $B_\beta:=\left[\dfrac{\omega-\beta}{2},\dfrac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Для функции $f\in L_1[a,b]$ через $m(f,y),\ y>0$, обозначим ее функцию распределения, определяемую равенством

$$m(f,y):=\mu\big\{t\in[a,b]\colon|f(t)|>y\big\},\tag{2.3}$$

а символом $r(f,t)$ — убывающую перестановку (см., например, [14], § 1.3) функции $|f|$. Положим $r(f,t)=0$ для $t>b-a$.

Для $f\in L_\infty(G)$ введем обозначение $E_0(f)_{L_\infty(G)}:=\inf_{c\in\mathbf{R}}\|f-c\|_{L_\infty(G)}$, а для $\lambda>0$ и $r\in\mathbf{N}$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t):=\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t),\ t\in\mathbf{R}$, и пусть $K_r:=\|\varphi_r\|_\infty$ — константа Фавара.

Лемма 2. *Пусть $r\in\mathbf{N}$, а функция $f\in L^r_\infty(I_{2\pi})$ и отрезок $I=[a,b]$ удовлетворяют условиям*

$$\big\|f^{(r)}\big\|_\infty=1,\tag{2.4}$$

$$f'(a)=f'(b)=0,\qquad f'(t)\neq0,\quad t\in(a,b).\tag{2.5}$$

Если существует функция $f_I\in L^r_\infty(\mathbf{R})$ такая, что

$$f_I(t)=f(t),\qquad t\in(a,b),\tag{2.6}$$

$$E_0(f_I)_\infty\leq E_0(f)_{L_\infty(I)}\tag{2.7}$$

и

$$\big\|f_I^{(r)}\big\|_\infty\leq\big\|f^{(r)}\big\|_\infty=1,\tag{2.8}$$

а λ выбрано из условия

$$E_0(f)_{L_\infty(I)}=\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty,\tag{2.9}$$

то для любых $q,p\geq1,\ \beta\in[0,b-a)$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset[a,b],\ \mu B\leq\beta$, выполнено неравенство

$$\|f\|_{L_p(I\setminus B)}\geq2^{-1/p}\lambda^{-(r+1/p)}E_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2\gamma})},\tag{2.10}$$

где $B_{2\gamma}=\left[\dfrac{\pi-2\gamma}{2},\dfrac{\pi+2\gamma}{2}\right]$, *а число $\gamma=\gamma(\beta)$ однозначно определено условием*

$$r(\overline{\varphi},\gamma/\lambda)=r(\overline{f},\beta),\tag{2.11}$$

причем $\gamma<\min\{\pi,\ \beta\lambda\}$. Также имеет место неравенство [15]

$$\|f'\|_q\leq2^{-1/q}\lambda^{-(r-1+1/q)}\|\varphi_{r-1}\|_q.\tag{2.12}$$

Доказательство. Докажем неравенство (2.10). В силу условия (2.9) существует такое $\alpha \in \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in I} f(t) = \max_{t\in \mathbf{R}}[\varphi_{\lambda,r}(t) + \lambda^{-r}\alpha] = \lambda^{-r}[K_r + \alpha]$$

и

$$\min_{t\in I} f(t) = \min_{t\in \mathbf{R}}[\varphi_{\lambda,r}(t) + \lambda^{-r}\alpha] = \lambda^{-r}[\alpha - K_r].$$

Согласно (2.7) – (2.9) для функции f_I выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [16]. По этой теореме сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t) + \lambda^{-r}\alpha$ является функцией сравнения для функции f_I. Для определенности будем считать, что f возрастает на $I = [a, b]$. Переходя, если нужно, к сдвигу функции $\varphi(t) := \varphi_{\lambda,r}(t) + \lambda^{-r}\alpha$, можем считать, что $\varphi(t)$ также возрастает на $[-\omega/2,\ \omega/2]$, где $\omega := \pi/\lambda$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $f_\tau(t) := f(t+\tau)$ и выберем $\tau_1,\ \tau_2$ так, чтобы

$$f_{\tau_1}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \max_{t\in I} f(t), \qquad f_{\tau_2}\Big(-\frac{\omega}{2}\Big) = \min_{t\in I} f(t).$$

Тогда по теореме сравнения Колмогорова выполнены неравенства

$$\big(f_{\tau_1}(t)\big)_+ \ge \varphi_+(t), \quad t \in \Big[-\frac{\omega}{2},\ \frac{\omega}{2}\Big], \tag{2.13}$$

и

$$\big(f_{\tau_2}(t)\big)_- \ge \varphi_-(t), \quad t \in \Big[-\frac{\omega}{2},\ \frac{\omega}{2}\Big], \tag{2.14}$$

где $u_\pm := \max\{\pm\, u, 0\}$.

Через $\overline{f}$ обозначим сужение f на $[a, b]$, а символом $\overline{\varphi}$ — сужение φ на $[-\omega/2,\ \omega/2]$, где $\omega := \pi/\lambda$. Из неравенств (2.13) и (2.14) следует, что $b - a \ge \pi/\lambda$ и

$$m\big(\overline{f}_\pm, y\big) \ge m(\overline{\varphi}_\pm, y), \quad y \ge 0,$$

где функция $m(f, y)$ определена соотношением (2.3). Поэтому

$$m\big(\overline{f}, y\big) \ge m(\overline{\varphi}, y), \quad y \ge 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$r\big(\overline{f}, t\big) \ge r(\overline{\varphi}, t), \quad t \ge 0. \tag{2.15}$$

Заметим далее, что для любого измеримого множества $B \subset I$, $\mu B \le \beta$, выполнено неравенство

$$\int\limits_B |f(t)|^p\, dt \le \int\limits_0^\beta r^p\big(\overline{f}, t\big)dt,$$

а так как перестановка сохраняет L_p-норму, то

$$\|f\|^p_{L_p(I\setminus B)} = \int\limits_I |f(t)|^p\, dt - \int\limits_B |f(t)|^p\, dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^{b-a} r^p\big(\overline{f}, t\big)dt - \int\limits_0^\beta r^p\big(\overline{f}, t\big)dt = \int\limits_\beta^{b-a} r^p\big(\overline{f}, t\big)dt. \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16), применяя теорему сравнения Колмогорова и учитывая (2.11), выводим

$$\|f\|^p_{L_p(I\setminus B)} \geq \int\limits_{\gamma/\lambda}^{\pi/\lambda} r^p(\overline{\varphi}, t)\, dt = 2^{-1}\lambda^{-(rp+1)} \int\limits_{2\gamma}^{2\pi} r^p(\varphi_r+\alpha, t)\, dt =$$

$$= 2^{-1}\lambda^{-(rp+1)} \int\limits_{I_{2\pi}\setminus E^{\alpha}_{y(2\gamma)}(\varphi_r)} |\varphi_r(t)+\alpha|^p\, dt,$$

где $r(\varphi_r+\alpha, t)$ — перестановка сужения $\varphi_r+\alpha$ на $I_{2\pi}$, а множество $E^{\alpha}_{y(\beta)}(\varphi)$ определено соотношениями (2.1), (2.2). Из последней оценки в силу леммы 1 имеем

$$\|f\|^p_{L_p(I\setminus B)} \geq 2^{-1}\lambda^{-(rp+1)} E^p_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2\gamma})},$$

что равносильно (2.10). Неравенство (2.12) доказано в [15].

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 1.** Неравенство (2.10) при $\beta=0$ доказано в [15]. Оба неравенства ((2.10) при $\beta=0$ и (2.12)) в таком виде, как в лемме 2, сформулированы в [1].

Лемма 3 [1]. *Пусть* $r, k\in\mathbf{N}$, $k<r$, $q\geq 1$, $p\in(0,\infty]$ *при* $k=1$, $p\in[1-k/r,\infty]$ *при* $k>1$. *Пусть далее числа* $\lambda_i>0$, $i=1,2,\ldots,2\nu$, *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i=1}^{2\nu}\frac{1}{\lambda_i}\leq 2, \tag{2.17}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda^r_{2i}} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{1}{\lambda^r_{2i+1}}. \tag{2.18}$$

Если

$$\alpha=\min\left\{1-\frac{k}{r},\ \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\},$$

то имеет место неравенство

$$C := \frac{\left(\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2\nu}\lambda_i^{-(q(r-1)+1)}\right)^{1/q}}{\left(\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2\nu}\lambda_i^{-(rp+1)}\right)^{\alpha/p}}\leq 1. \tag{2.19}$$

Если же $\alpha=\dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$, $q<\dfrac{rp}{r-k}$, *то выполнено неравенство*

$$C\leq \nu^{1/q-\alpha/p}. \tag{2.20}$$

3. Основные результаты.

Теорема 2. *Пусть* $r\in\mathbf{N}$, *а функция* $f\in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *такова, что для любого отрезка* $I=[a,b]$, *удовлетворяющего условиям*

$$f'(a) = f'(b) = 0, \qquad f'(t) \neq 0, \quad t \in (a,b), \tag{3.1}$$

существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ *такая, что*

$$f_I(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{3.2}$$

а

$$E_0(f_I)_\infty \leq E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \tag{3.3}$$

и

$$\left\|f_I^{(r)}\right\|_\infty \leq \left\|f^{(r)}\right\|_\infty. \tag{3.4}$$

Тогда для любых $q, p \geq 1$, $\beta \in [0, 2\pi)$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, *выполнено неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}} \|f\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \left\|f^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_\infty \tag{3.5}$$

с показателем

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \ \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\},$$

где $B_{2m} = \left[\dfrac{\pi - 2m}{2}, \dfrac{\pi+2m}{2}\right]$, $m := \max_I\{\gamma_I\}$ *(здесь максимум берется по всем отрезкам* I, *удовлетворяющим условиям* (3.1)*), а числа* γ_I *однозначно определены соотношением*

$$r(\overline{\varphi_i}, \gamma_i/\lambda_i) = r(\overline{f_i}, \beta_i), \tag{3.6}$$

где $\overline{\varphi_i}$ — *сужение сплайна* $\varphi_{\lambda_i, r}(t) + \lambda_i^{-r}\alpha_i$ *на отрезок* $\left[-\dfrac{\pi}{2\lambda_i}, \dfrac{\pi}{2\lambda_i}\right]$, *а* $\overline{f_i}$ — *сужение функции* f *на отрезок* I_i.

Неравенство (3.5) *точное на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *и обращается в равенство для функции* $f(t) := \varphi_r - c_p$ *и множества* $B = B_{2m}$ (*при* $m = \beta/2$), *где* c_p — *константа наилучшего приближения сплайна* φ_r *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})$.

Доказательство. Докажем неравенство (3.5) для $k = 1$. Зафиксируем функцию $f \in \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, удовлетворяющую условиям теоремы. Не ограничивая общности можем считать, что

$$\left\|f^{(r)}\right\|_\infty = 1 \tag{3.7}$$

и $f'(0) = 0$. Положим $E(f') = \{t \in [0, 2\pi] \colon f'(t) \neq 0\}$. Ясно, что $E(f')$ открыто и, значит, представимо в виде

$$E(f') = \bigcup_{i=0}^{\nu(f')} (a_i, b_i),$$

где $\nu(f')$ — число перемен знака f' на периоде.

Зафиксируем далее $\beta \in [0, 2\pi)$ и произвольное измеримое множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$. Положим

$$I_i := [a_i, b_i], \qquad B^i = B \bigcap I_i, \qquad \beta_i = \mu B^i, \quad i = 1, \ldots, \nu(f').$$

Выберем $\lambda_i > 0$ из условий

$$E_0(f)_{L_\infty(I_i)} = \|\varphi_{\lambda_i, r}\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, \nu(f'), \tag{3.8}$$

а числа α_i так, чтобы

$$\max_{t \in I_i} f(t) = \max_{t \in \mathbf{R}} \left[\varphi_{\lambda_i, r}(t) + \lambda_i^{-r}\alpha_i\right], \qquad \min_{t \in I_i} f(t) = \min_{t \in \mathbf{R}} \left[\varphi_{\lambda_i, r}(t) + \lambda_i^{-r}\alpha_i\right].$$

Применяя к каждому из отрезков $I_i,\ i = 1, \ldots, \nu(f')$, лемму 2, получаем неравенства

$$\|f\|_{L_p(I_i \setminus B^i)} \ge 2^{-1/p} \lambda_i^{-(r+1/p)} E_0(\varphi_r)_{L_p\left(I_{2\pi} \setminus B_{2\gamma_i}\right)} \tag{3.9}$$

и

$$\|f'\|_q \le 2^{-1/q} \lambda_i^{-(r-1+1/q)} \|\varphi_{r-1}\|_q, \tag{3.10}$$

где $B_{2\gamma_i} = \left[\dfrac{\pi - 2\gamma_i}{2}, \dfrac{\pi + 2\gamma_i}{2}\right]$, а числа $\gamma_i = \gamma_i(\beta_i)$ однозначно определены условиями (2.11).

Положим теперь $m := \max\left\{\gamma_i,\ i = 1, \ldots, \nu(f')\right\}$. Ясно, что

$$E_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{2\gamma_i})} \ge E_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{2m})}.$$

Поэтому, суммируя оценки (3.9) и (3.10), получаем

$$\|f'\|_q^q = \sum_{i=1}^{\nu(f')} \|f'\|_{L_q(I_i)}^q \le \frac{1}{2} \|\varphi_{r-1}\|_q^q \sum_{i=1}^{\nu(f')} \lambda_i^{-((r-1)q+1)}$$

и

$$\|f\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}^p = \sum_{i=1}^{\nu(f')} \|f\|_{L_p(I_i \setminus B^i)}^p \ge \frac{1}{2} E_0^p(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{2m})} \sum_{i=1}^{\nu(f')} \lambda_i^{-(rp+1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\|f'\|_q}{\|f\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}^\alpha} \le \frac{\|\varphi_{r-1}\|_q}{E_0^\alpha(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{2m})}} C, \tag{3.11}$$

где

$$C = \frac{\left(\dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu(f')} \lambda_i^{-(q(r-1)+1)}\right)^{1/q}}{\left(\dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu(f')} \lambda_i^{-(rp+1)}\right)^{\alpha/p}}. \tag{3.12}$$

При этом в силу соотношений (3.3), (3.4), (3.7) и (3.8) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [16]. Согласно этой теореме имеют место неравенства $\pi/\lambda_i \le b_i - a_i$, $i = 1, \ldots, \nu(f')$. Из них в силу очевидной оценки $\sum_{i=1}^{\nu(f')} (b_i - a_i) \le 2\pi$ следует выполнение условия (2.17). Кроме того, вследствие периодичности функции f сумма вариаций этой функции на всех отрезках возрастания равна сумме вариаций функции f на всех отрезках убывания. Но тогда в силу равенства (3.8), определяющего λ_i, то же самое имеет место и для функций сравнения $\varphi_{\lambda_i,r}$. А так как $\|\varphi_{\lambda_i,r}\|_\infty = \lambda_i^{-r}\|\varphi_r\|_\infty$, то выполнено и условие (2.18). Таким образом, выполнены все условия леммы 3. В силу этой леммы имеет место оценка (2.19). Ее применение в соотношении (3.11) завершает доказательство неравенства (3.5) в случае $k = 1$ в силу условия (3.7).

Для $k > 1$ доказательство неравенства (3.5) проводится по индукции точно так же, как и в работе [1], где оно доказано при $\beta = 0$.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** Теорема 2 при $\beta = 0$ доказана в [1].

В работе [15] показано, что при $r = 2$ и $r = 3$ для любой функции $f \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ и произвольного отрезка $I = [a, b]$, которые удовлетворят условиям (3.1), существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, для которой выполнены требования (3.2) – (3.4). Для ее построения достаточно сужение функции f на отрезок $I = [a, b]$ продолжить на отрезок $[b, 2b - a]$ четным образом относительно точки b и далее $2(b - a)$-периодически на всю ось. Из этого факта и теоремы 2 следует такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $q, p \in [1,\infty]$, $r = 2, k = 1$ *или* $r = 3, k = 1, 2$, $\beta \in [0, 2\pi)$. *Тогда для любой функции* $f \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_{2\pi} :=$ $:= [-\pi/2, 3\pi/2]$, $\mu B \le \beta$, *имеет место точное на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}}\|f\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\big\|f^{(r)}\big\|^{1-\alpha}_\infty$$

с тем же показателем α, *что и в теореме* 2.

***Замечание* 3.** Следствие 1 при $\beta = 0$ доказано в [1].

В работе [17] показано, что для достаточно больших $r \in \mathbf{N}$ существуют функция $f \in$ $\in L^r_\infty(I_{2\pi})$ и отрезок I, для которых выполнены условия (3.1), но для них в классе $L^r_\infty(\mathbf{R})$ нет функции f_I, для которой выполнены требования (3.2) – (3.4). Иными словами, не каждую функцию $f \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ можно продолжить с произвольного отрезка монотонности I на всю ось с сохранением гладкости продолженной функции, L_∞-нормы ее старшей производной и наилучшего равномерного приближения константой такими же, как на отрезке I.

Как следует из работы [18], показатель α в неравенстве (3.5) является максимально возможным. В частности, если $q < \dfrac{rp}{r-k}$, то

$$\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}\right\} = 1 - \frac{k}{r}.$$

В следующей теореме показано, что если в неравенстве (3.5) учесть число $\nu(f^{(k)})$ перемен знака производной $f^{(k)}$, то этот показатель можно увеличить.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *при* $q < \dfrac{rp}{r-k}$ *и* $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$ *выполнено неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q \le \left(\frac{\nu(f^{(k)})}{2}\right)^{1/q-\alpha/p}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}}\|f\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\big\|f^{(r)}\big\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.13}$$

где $B_{2m} = \left[\dfrac{\pi - 2m}{2}, \dfrac{\pi + 2m}{2}\right]$, *а число* $m = m(\beta)$ *однозначно определено числом* β *так же, как в теореме* 2.

Неравенство (3.13) *точное на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *и обращается в равенство для тех же функции* f *и множества* B, *что и в теореме* 2.

Доказательство. Докажем неравенство (3.13) для $k = 1$. Зафиксируем функцию $f \in \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, удовлетворяющую условиям теоремы. Не ограничивая общности можем считать, что

$$\left\|f^{(r)}\right\|_\infty = 1. \tag{3.14}$$

Повторяя далее рассуждение из доказательства теоремы 2 с $\alpha = \dfrac{r - k + 1/q}{r + 1/p}$, получаем неравенство (3.11) с этим показателем, где константа C определена равенством (3.12). При этом, как и в теореме 2, проверяется, что числа λ_i удовлетворяют условиям леммы 3. Применяя в неравенстве (3.11) оценку $C \le \left(\dfrac{\nu(f^{(k)})}{2}\right)^{1/q - \alpha/p}$ (2.20), получаем доказываемое неравенство (3.13) при $k = 1$ в силу условия (3.14).

Для $k > 1$ доказательство неравенства (3.13) проводится по индукции точно так же, как и в работе [1], где оно доказано при $\beta = 0$.

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 4.** Теорема 3 при $\beta = 0$ доказана в [1].

Впервые неравенства типа Колмогорова, учитывающие число перемен знака производных, доказал А. А. Лигун [19] и использовал их при решении экстремальных задач теории приближения. Другие неравенства такого типа содержатся в [20 – 22].

Принимая во внимание тот же факт о продолжении функций малой гладкости с отрезка монотонности из работы [15], с помощью которого из теоремы 2 было выведено следствие 1, из теоремы 3 получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть* $q, p \in [1, \infty]$, $q < \dfrac{rp}{r - k}$, $r = 2$, $k = 1$ *или* $r = 3$, $k = 1, 2$, $\beta \in [0, 2\pi)$. *Тогда для любой функции* $f \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_{2\pi} := [-\pi/2, 3\pi/2]$, $\mu B \le \beta$, *имеет место точное на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q \le \left(\frac{\nu(f^{(k)})}{2}\right)^{1/q - \alpha/p} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{2m})}} \|f\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \left\|f^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_\infty,$$

где $\alpha = \dfrac{r - k + 1/q}{r + 1/p}$.

***Замечание* 5.** Следствие 2 при $\beta = 0$ доказано в [1].

Литература

1. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Точные неравенства типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей*, Укр. мат. журн., **53**, № 10, 1298 – 1308 (2001).
2. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Сравнение точных констант в неравенствах для производных на действительной оси и на окружности*, Укр. мат. журн., **55**, № 5, 579 – 589 (2003).
3. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263 – 280 (1999).

4. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969 – 984 (2011).
5. E. Remes, *Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef*, Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. т-ва, сер. 4, **13**, вип. 1, 93 – 95 (1936).
6. M. I. Ganzburg, *On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials*, J. Approxim. Theory, **164**, 1233 – 1237 (2012).
7. E. Nursultanov, S. Tikhonov, *A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials*, Constr. Approxim., **38**, 101 – 132 (2013).
8. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer, New York (1995).
9. M. I. Ganzburg, *Polynomial inequalities on measurable sets and their applications*, Constr. Approxim., **17**, 275 – 306 (2001).
10. S. Tikhonov, P. Yuditski, *Sharp Remez inequality*, https:www.researchgate.net/publication/327905401.
11. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **68**, № 2, 227 – 240 (2016).
12. В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 173 – 188 (2017).
13. А. Е. Гайдабура, В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **69**, № 11, 1472 – 1485 (2017).
14. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наук. думка, Киев (1992).
15. В. Н. Габушин, *Некоторые неравенства между производными функций*, Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР, вып. 23, 20 – 26 (1976).
16. А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале*, Избр. труды. Математика, механика, Наука, Москва (1985).
17. Ю. С. Загорулько, В. А. Кофанов, *О продолжении дифференцируемых функций с отрезка их монотонности и неравенства типа Колмогорова*, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика, **22**, № 6/1, 52 – 55 (2014).
18. Б. Е. Клоц, *Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости*, Мат. заметки, **21**, № 1, 21 – 32 (1977).
19. А. А. Лигун, *О неравенствах между нормами производных периодических функций*, Мат. заметки, **33**, № 3, 385 – 391 (1983).
20. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных*, Доп. НАН України, вип. 8, 12 – 16 (1998).
21. В. А. Кофанов, *О некоторых неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен производных*, Укр. мат. журн., **35**, № 4, 456 – 469 (2003).
22. В. А. Кофанов, В. Е. Миропольский, *О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен производных*, Укр. мат. журн., **60**, № 12, 1642 – 1649 (2008).

Получено 30.05.19