DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1064

УДК 517.5

М. Ш. Шабозов (Тадж. нац. ун-т, Душанбе),
М. О. Акобиршоев (Технол. ун-т Таджикистана, Душанбе)

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ „УГЛОМ” В МЕТРИКЕ L_2 И ЗНАЧЕНИЯ КВАЗИПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

In the metric L_2, we obtain exact inequalities that associate the best approximations by trigonometrical “angles” for functions $f(x, y)$, which are differentiable and 2π-periodic in each variable, with the integrals containing modules of continuity of higher order for mixed derivatives of these functions. For some classes of functions defined by modules of continuity, we calculate Kolmogorov’s quasiwidths and linear quasiwidths.

У метриці L_2 отримано точні нерівності, що пов’язують найкращі наближення диференційовних 2π-періодичних по кожній із змінних функцій $f(x, y)$ тригонометричними „кутами” з інтегралами, які містять модулі неперервності вищих порядків мішаних похідних цих функцій. Обчислено колмогоровські і лінійні квазіпоперечники деяких класів функцій, що визначаються вказаними модулями неперервності.

1. Введение. Целью данной статьи является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического приближения функций двух переменных тригонометрическими „углами” на некоторых классах функций, задаваемых модулями непрерывности. Понятие „угла” было введено М. К. Потаповым [1, 2] и в дальнейшем успешно применялось многими исследователями (см., например, [3 – 14]). Использование аппарата „углов” в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно „углы” дают минимальные оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников. В работах [8 – 11] найдены точные значения квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. Здесь мы продолжаем исследования в указанном направлении.

Предварительно приведем понятия и определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \operatorname{span}\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)\}, \qquad V_n := \operatorname{span}\{v_0(y), v_1(y), \ldots, v_n(y)\}$$

— их конечномерные подпространства, $U_m \subset X,\ V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x)\psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y)\varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ — соответственно произвольные наборы функций из пространств X и Y, назовем обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство, которое обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \oplus X,$$

где операции $\otimes$ и $\oplus$ обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть $\big(Z, \|\cdot\|_Z\big)$ — линейное нормированное пространство, содержащее подпространство $G_{m,n}$. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z := \mathcal{E}(f; G_{m,n})_Z = \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z =$$
$$= \inf\big\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n}\big\} \tag{1}$$

и, если $\mathfrak{M}$ — некоторое множество функций f, положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup\big\{\mathcal{E}(f, G(U_m, V_n))_Z : f \in \mathfrak{M}\big\}. \tag{2}$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а (2) — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) := \inf\big\{\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\big\} \tag{3}$$

называют колмогоровским квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ (см., например, [8 – 11]). Пусть $\mathcal{L}$ — линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G_{m,n}$. Положим

$$\begin{gathered} e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z := \sup\big\{\|f - \mathcal{L}(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\big\}, \\ e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := e(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z := \inf\big\{e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z : \mathcal{L}(f) \in G_{m,n}\big\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Величину

$$\delta_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\big\{e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\big\} \tag{5}$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z. Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e\left(\mathfrak{M}, G_{m,n}\right)_Z \geq \mathcal{E}\left(\mathfrak{M}; G_{m,n}\right)_Z, \qquad \delta_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z).$$

Представляет интерес отыскание экстремальных подпространств $U_m^\circ \subset X$, $V_n^\circ \subset Y$, для которых реализуется нижняя грань в (3) и (5):

$$\mathcal{E}\big(\mathfrak{M}; G(U_m^\circ, V_n^\circ)\big)_Z = e\big(\mathfrak{M}; G(U_m^\circ, V_n^\circ)\big)_Z = \delta_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) = d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z).$$

Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$, $Z = L_2(Q)$, $Q := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

В этой работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ найдены точные значения величин (2) – (5). Пусть теперь

$$U_{2m+1}^* := \operatorname{span}\{e^{ipx}\}_{p=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi], \qquad V_{2m+1}^* := \operatorname{span}\{e^{iqx}\}_{q=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p| \leq m} \psi_p(y) e^{ipx} + \sum_{|q| \leq n} \phi_q(x) e^{iqy}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

принадлежит подпространству $G\big(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1}\big)$. Функции вида (6) называют тригонометрическими „углами" [1, 2] или тригонометрическими квазиполиномами [15]. Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f)\, e^{i(px+qy)}, \tag{7}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y)\, e^{-i(px+qy)} dx\, dy$$

— двойные коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(Q)$, квазиполиномом Фурье порядка (m,n), $m,n \in \mathbb{N}$, называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f;x,y) = \left(\sum_{|p|\le m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q|\le n} - \sum_{|p|\le m} \sum_{|q|\le n} \right) c_{pq}(f)\, e^{i(px+qy)}. \tag{8}$$

Легко проверить, что $\Phi_{m,n}(f)$ принадлежит $G(U^*_m, V^*_n)$. Следуя схеме рассуждений, изложенной в [6, 12], легко доказать, что

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \inf\big\{ \|f - g_{m-1,n-1}\|^2_{L_2(Q)} : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}) \big\} =$$

$$= \big\| f - \Phi_{m-1,n-1}(f) \big\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|p|\ge m} \sum_{|q|\ge n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f), \tag{9}$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho^2_{p,q}(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \tag{10}$$

В частности, из (9) следует, что если $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, то

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \mathcal{E}^2_{m-1}(f_1)_{L_2[0,2\pi]} \mathcal{E}^2_{n-1}(f_2)_{L_2[0,2\pi]}, \tag{11}$$

где, как обычно,

$$\mathcal{E}^2_{\nu-1}(g)_{L_2[0,2\pi]} := \inf\big\{ \|g - T_{\nu-1}\|^2_{L_2[0,2\pi]} : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1} \big\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения 2π-периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := \operatorname{span}\big\{e^{ijx}\big\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu - 1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in C(Q)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\mu \partial y^\nu, \quad \mu \le r, \quad \nu \le s,$$

а через $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, — множество функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, $s \ge 2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0,s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0,r-1}$, $s \in \mathbb{N}$, существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и смешанная производная $f^{(r,s)}$ принадлежит $L_2(Q)$.

2. Основные результаты. Для произвольной функций $f \in L_2(Q)$ определим модуль непрерывности k-го порядка по переменной x и l-го порядка по переменной y равенством

$$\omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 := \sup\left\{\left\|\Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot,\cdot)\right\|_{L_2(Q)} : |u| \le t, \ \ |v| \le \tau\right\}, \tag{12}$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,l} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu+\nu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu u, \ y+\mu v).$$

Использовав равенство (7) и тождество Парсеваля, величину (12) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в следующем виде:

$$\omega_{k,l}^2(f;t,\tau)_2 =$$

$$= 2^{k+l}\sup\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\cos pu)^k(1-\cos qv)^l : |u| \le t, \ \ |v| \le \tau\right\}. \tag{13}$$

Условимся в дальнейшем вместо $\omega_{k,k}(f;t,\tau)_2$ писать $\omega_k(f;t,\tau)_2$. В соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r,s)}$ далее предполагается, что $f \ne \mathrm{const}$. Дифференцируя двойной ряд (7) r раз по переменной x и s раз по переменной y в смысле сходимости в $L_2(Q)$, записываем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}(ip)^r(iq)^s c_{pq}(f)e^{i(px+qy)} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}\big(f^{(r,s)}\big)e^{i(px+qy)},$$

где

$$c_{pq}\big(f^{(r,s)}\big) = (ip)^r(iq)^s c_{pq}(f). \tag{14}$$

Поскольку

$$\left|c_{pq}\big(f^{(r,s)}\big)\right|^2 = p^{2r}q^{2s}|c_{pq}(f)|^2, \tag{15}$$

то в силу равенства (10) имеем

$$\rho_{p,q}^2\big(f^{(r,s)}\big) = p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f). \tag{16}$$

Учитывая равенство (16) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$, получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(r,s)}\big)_2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2\big(f^{(r,s)}\big) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f). \tag{17}$$

Заметим также, что если функция f принадлежит $L_2^{(r,s)}$, то в силу (16) и формулы (13)

$$\omega_{k,l}^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2=$$

$$=2^{k+l}\sup\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\cos pu)^k(1-\cos qv)^l:|u|\le t,\ \ |v|\le\tau\right\}. \tag{18}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для произвольной функции* $f\in L_2^{(r,s)}$ *и любых* $k,l\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k\le r,\ 0\le l\le s,$ *выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\le m^{-(r-k)}n^{-(s-l)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2. \tag{19}$$

Неравенство (19) *точно в том смысле, что существует функция* $f_0\in L_2^{(r,s)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ при любых $k\in[0,r]$ и $l\in[0,s]$ имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(k,l)}\big)_2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2k}q^{2l}\rho_{p,q}^2(f)=$$

$$=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{-2(r-k)}q^{-2(s-l)}\cdot p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)\le$$

$$\le m^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)=$$

$$=m^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r,s)})_2.$$

Для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$f_0^{(k,l)}(x,y)=m^kn^l\cos\left(mx+\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ny+\frac{l\pi}{2}\right),\qquad 0\le k\le r,\quad 0\le l\le s,$$

и в силу (17) записываем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(k,l)})_2=m^kn^l,\qquad \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(r,s)})_2=m^rn^s.$$

Используя полученные равенства, находим

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(k,l)})_2=m^kn^l=m^{-(r-k)}n^{-(s-l)}\cdot m^rn^s=$$

$$=m^{-(r-k)}n^{-(s-l)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(r,s)})_2.$$

Лемма 1 доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях леммы* 1 *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,s)}\big)_2}=\frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функции $f \in L_2^{(r,s)}$ и ее частных производных $f^{(k,l)}$, $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$, тригонометрическими „углами” и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2 = \inf\Big\{\big\|f^{(k,l)} - g^{(k,l)}_{m-1,n-1}\big\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big\}.$$

Как и при получении формулы (9), легко доказать, что

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2 = \Big\|f^{(k,l)} - \Phi_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)\Big\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}\big(f^{(k,l)}\big) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2k}q^{2l}\rho^2_{p,q}(f),$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (8).

Поскольку для функции $f \in L_2^{(r,s)}$, $r,s \ge 1$, $r,s \in \mathbb{N}$, ее промежуточные производные $f^{(k,l)}$, $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$, также принадлежат классу $L_2^{(r,s)}$, то представляет интерес изучение поведения величины $\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r,s)} \subset L_2^{(r,s)}$, т. е. при любых $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$ требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(\mathfrak{M}^{(r,s)})_2 := \sup\Big\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r,s)}\Big\}. \tag{20}$$

Через $W^{(r,s)}L_2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r,s)}$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r,s)}\|_2 \le 1$.

Теорема 1. *При всех* $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}. \tag{21}$$

Доказательство. Поскольку для любой функции $f \in W^{(r,s)}L_2$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2 \le \|f^{(r,s)}\|_2 \le 1,$$

то из (19) следует оценка сверху величины, расположенной в левой части (21):

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 \le \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}. \tag{22}$$

С целью получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию

$$g_0(x,y) = \frac{1}{m^r n^s}\cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}.$$

Поскольку для $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$ производные

$$g_0^{(k,l)}(x,y) = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}\cos\left(mx + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{l\pi}{2}\right),$$

$$g_0^{(r,s)}(x,y) = \cos\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{s\pi}{2}\right),$$

а наилучшее приближения этих производных

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(g_0^{(k,l)}\big)_2 = \big\|g_0^{(k,l)}\big\|_2 = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}} \tag{23}$$

и, кроме того,

$$\big\|g_0^{(r,s)}\big\|_2 = 1,$$

то, очевидно, g_0 принадлежит $W^{(r,s)}$, причем в силу (23) имеем

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 \ge \mathcal{E}_{m-1,n-1}(g_0^{(k,l)})_2 = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}. \tag{24}$$

Требуемое равенство (21) получаем из сопоставления неравенств (22) и (24), что и завершает доказательство теоремы 1.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < mt \le \pi$, $0 < n\tau \le \pi$, *при любом* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{2r-k}n^{2s-k}\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k} = \frac{1}{4^{2k}}. \tag{25}$$

Существует функция $f_0(x,y) \in L_2^{(r,s)}$, *для которой верхняя грань достигается в* (25).

Доказательство. Легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f)(\cos pu + \cos qv - \cos pu\cos qv) \le$$

$$\le \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}^{2-2/k}_{m-1,n-1}(f)_2\,\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,v)_2. \tag{26}$$

Действительно, замечая, что при $k = l$ из (18) следует, что

$$\omega_k^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2 =$$

$$= 4^k\sup\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f)(1-\cos pu)^k(1-\cos qv)^k : |u|\le t,\ \ |v|\le\tau\right\}, \tag{27}$$

используя неравенство Гельдера для сумм, с учетом (9) имеем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f)(\cos pu + \cos qv - \cos pu\cos qv) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f)(1-\cos pu)(1-\cos qv) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(\rho_{p,q}(f))^{2-2/k}\,\rho_{p,q}^{2/k}(f)(1-\cos pu)(1-\cos q\upsilon) \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2}(f)\right\}^{1-1/k}\left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2}(f)(1-\cos pu)^{k}(1-\cos q\upsilon)^{k}\right\}^{1/k} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\left\{\frac{1}{4^k m^{2r}n^{2s}}\cdot 4^k\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2}(f)p^{2r}q^{2s}(1-\cos pu)^{k}(1-\cos q\upsilon)^{k}\right\}^{1/k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};u,\upsilon\big)_2.$$

Неравенство (26) доказано.

Умножая обе части неравенства (26) на функцию $\sin mu\sin n\upsilon$ и интегрируя полученное соотношение по прямоугольнику $\{0\leq u\leq \pi/m,\ 0\leq \upsilon\leq \pi/n\}$, получаем

$$\frac{4}{mn}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2}(f)\left(\frac{2}{n}\int_0^{\pi/m}\cos pu\sin mu\,du+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{m}\int_0^{\pi/m}\cos qu\sin nu\,du-\int_0^{\pi/m}\cos pu\sin mu\,du\int_0^{\pi/n}\cos q\upsilon\sin n\upsilon\,d\upsilon\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{1/k}(f^{(r,s)};u,\upsilon)_2\sin mu\sin n\upsilon\,du\,d\upsilon. \tag{28}$$

Заметим, что при любых $\nu,\mu\in\mathbb{N},\ \nu\geq\mu$,

$$\int_0^{\pi/\mu}\cos\nu u\sin\mu u\,du=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \nu=\mu,\\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2\mu}{\nu^2-\mu^2}\cos^2\left(\dfrac{\mu\pi}{2\nu}\right), & \text{если}\quad \nu>\mu,\end{cases}$$

поэтому второе слагаемое в левой части неравенства (28) является положительным, и если мы его опустим, то только усилим указанное неравенство. Таким образом, для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ имеем

$$\frac{4}{mn}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_2\leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,\upsilon)_2\sin mu\sin n\upsilon\,du\,d\upsilon\right),$$

откуда находим

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4^{2k}m^{2r-k}n^{2s-k}}\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k. \qquad (29)$$

Из полученного неравенства следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (25):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^{2r-k}n^{2s-k}\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k}\leq\frac{1}{4^{2k}}. \qquad (30)$$

Для получения оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение функцию $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой, как следует из равенств (9) и (13), справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2=1, \qquad \omega_k^2\big(f_0^{(r,s)};u,v\big)_2=4^km^{2r}n^{2s}(1-\cos mu)^k(1-\cos nv)^k. \qquad (31)$$

Используя равенства (31), имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^{2r-k}n^{2s-k}\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k}\geq$$

$$\geq\frac{m^{2r-k}n^{2s-k}\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f_0^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k}=$$

$$=\frac{m^{2r-k}n^{2s-k}}{4^km^{2r}n^{2s}\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}(1-\cos mu)(1-\cos nu)\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k}=$$

$$=\frac{1}{4^k(mn)^k(4/mn)^k}=\frac{1}{4^{2k}}. \qquad (32)$$

Равенство (25) непосредственно следует из сравнения оценок сверху (30) и снизу (32). Легко проверить, что для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}$ в равенстве (25) реализуется верхняя грань, и тем самым теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 является обобщением известного результата В. В. Шалаева [16] о точном неравенстве, связывающем величину наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций одной переменной $f\in L_2^{(r)}$ с интегралом, содержащим усредненное значение модуля непрерывности высшего порядка $\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)_2$, на случай наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций двух переменных $f\in L_2^{(r,s)}$

тригонометрическими „углами” с интегралами, содержащими усредненное значение модулей непрерывности $\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2$.

Из теоремы 2 следует такое утверждение.

***Следствие* 2.** *При всех* $k,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$ *для любой функции* $f\in L_2^{(r,s)}$ *выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2\le\frac{1}{2^km^kn^k}\omega_k\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m};\frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{33}$$

Заметим, что если функция $\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2$ для любых $k\in\mathbb{N}$ и $(t,\tau)\in[0,\pi/m]\times[0,\pi/n]$ удовлетворяет условию

$$2\omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};\pi/(2m);\pi/(2n)\big)_2\ge$$

$$\ge\omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2+\omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m}-t,\frac{\pi}{n}-\tau\right)_2, \tag{34}$$

то неравенство (33) можно уточнить. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *На множестве функций* $f\in L_2^{(r,s)}$, *у которых функция* $\omega_k\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2$ *удовлетворяет условию* (34), *выполняется точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2\le 2^{-k}m^{-r}n^{-s}\omega_k\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2 \tag{35}$$

в том смысле, что существует функция $f_0\in L_2^{(r,s)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Действительно, если выполняется неравенство (34), то имеем

$$\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};u,v\big)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv=$$

$$=\frac12\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\left\{\omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};u,v\big)_2+\omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m}-u,\frac{\pi}{n}-v\right)_2\right\}\sin mu\sin nv\,du\,dv\le$$

$$\le\omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\sin mu\sin nv\,du\,dv=$$

$$=\frac{4}{mn}\omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2.$$

Теперь, учитывая последнее неравенство, из (29) получаем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2\le\frac{1}{4^{2k}m^{2r-k}n^{2s-k}}\left(\frac{4}{mn}\omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2\right)^k=$$

$$=\frac{1}{4^km^{2r}n^{2s}}\omega_k^2\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2,$$

откуда и следует неравенство (35). Непосредственными вычислениями убедимся, что для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}$ неравенство (35) обращается в равенство, что и завершает доказательство теоремы 3.

Из теоремы 3 следует такое утверждение.

***Следствие* 3.** *В предположении теоремы* 3 *при всех* $k\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^rn^s\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\omega_k\left(f^{(r,s)};\pi/(2m),\pi/(2n)\right)_2}=\frac{1}{2^k}.$$

3. Точные значения квазипоперечников. В этом пункте вычислим точные значения квазипоперечников (3) и (5) для одного класса функций, естественным образом вытекающих из теоремы 1. Пусть $\Phi_j(t),\ j=1,2,\ 0\le t<\infty,$ — непрерывные, неубывающие функции, обращающиеся в нуль в точке $t=0$. Для $k\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+$ и $0\le u,\ v\le 2\pi$ определим в $L_2^{(r,s)}$ класс функций

$$W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2):=$$

$$:=\left\{f\in L_2^{(r,s)}:\frac{\pi}{2u}\frac{\pi}{2v}\int_0^u\int_0^v\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2\sin\frac{\pi}{u}t\sin\frac{\pi}{v}\tau dtd\tau\le\Phi_1^2(u),\Phi_2^2(v)\right\}.$$

Кроме того, положим

$$(1-\cos m\theta)_*:=\begin{cases}1-\cos m\theta, & m\theta\le\pi,\\ 2, & m\theta>\pi.\end{cases}\tag{36}$$

Теорема 4. *Пусть функции* $\Phi_j(t),\ j=1,2,$ *удовлетворяют условию*

$$\Phi_j^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\pi\mu}(1-\cos\theta)_*\sin\frac{\theta}{\mu}d\theta\le 2\mu\Phi_j^2(u)\tag{37}$$

при любых $\mu>0$ *и* $u\in(0,2\pi)$. *Тогда при любых* $m,n\in\mathbb{N}$ *и* $r,s\in\mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}\big(W_k^{(r,s)}\left(\Phi_1,\Phi_2\right),L_2(Q)\big)=\delta_{2m-1,2n-1}\big(W_k^{(r,s)}\left(\Phi_1,\Phi_2\right),L_2(Q)\big)=$$

$$=\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)\big)_{L_2(Q)}=e_{m-1,n-1}\big(W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)\big)_{L_2(Q)}=$$

$$=\frac{1}{2^km^rn^s}\Phi_1^k\left(\frac{\pi}{m}\right)\Phi_2^k\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Неравенство (29) запишем в виде

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2\le\frac{1}{2^{2k}m^{2r}n^{2s}}\times$$

$$\times\left(\frac{mn}{4}\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f_0^{(r,s)};u,v)_2\sin mu\sin nv\,du\,dv\right)^k.$$

Отсюда непосредственно получаем оценку сверху

$$d_{2m-1,2n-1}\big(W_k^{(r,s)}\left(\Phi_1,\Phi_2\right),L_2(Q)\big)\le\delta_{2m-1,2n-1}\big(W_k^{(r,s)}\left(\Phi_1,\Phi_2\right),L_2(Q)\big)\le$$

$$\le\sup\big\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2\colon f\in W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)\big\}=$$

$$=\sup\big\{e_{m-1,n-1}(f)_2\colon f\in W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)\big\}\le$$

$$\le\frac{1}{2^k m^r n^s}\Phi_1^k\left(\frac{\pi}{m}\right)\Phi_2^k\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{38}$$

Для получения оценки снизу колмогоровского квазипоперечника будем следовать схеме рассуждений работ [8, 9]. Рассмотрим пространство $L_2^{(\nu)}:=L_2^{(\nu)}[0,2\pi]$, состоящее из функций $g(\tau)$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(\nu-1)$-го порядка $g^{(\nu-1)}$ и ν-ю производную $g^{(\nu)}\in L_2$. Введем в рассмотрение классы функций

$$W_k^{(r)}(\Phi_1):=\left\{\varphi\in L_2^{(r)}\colon\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_k^{2/k}(\varphi^{(r)};t)_2\sin\frac{\pi}{u}tdt\le\Phi_1^2(u);\;\;0\le u\le\pi\right\},$$

$$W_k^{(s)}(\Phi_2):=\left\{\psi\in L_2^{(s)}\colon\frac{\pi}{2\upsilon}\int\limits_0^\upsilon\omega_k^{2/k}(\psi^{(s)};t)_2\sin\frac{\pi}{\upsilon}\tau d\tau\le\Phi_2^2(\upsilon);\;\;0\le\upsilon\le\pi\right\},$$

на базе которых полагаем

$$\widetilde{W}_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)=W_k^{(r)}(\Phi_1)\otimes W_k^{(s)}(\Phi_2):=$$

$$:=\Big\{\varphi(x)\psi(y)\colon\varphi\in W_k^{(r)}(\Phi_1),\;\;\psi\in W_k^{(s)}(\Phi_2)\Big\}.$$

В силу равенства (11) записываем

$$d_{2m-1,2n-1}\Big(\widetilde{W}_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2),L_2(Q)\Big)=$$

$$=d_{2m-1}\Big(W_k^{(r)}(\Phi_1);L_2[0,2\pi]\Big)d_{2n-1}\Big(W_k^{(s)}(\Phi_2);L_2[0,2\pi]\Big), \tag{39}$$

где $d_k(\cdot)$ — обычный колмогоровский k-поперечник. Учитывая (39), включение $\widetilde{W}_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2)\subset\subset W_k^{(r,s)}\big(\Phi_1,\Phi_2\big)$, а также одномерный результат из [16]

$$d_{2q-1}\Big(W_k^{(\nu)}\left(\Phi\right);L_2[0,2\pi]\Big)=2^{-k/2}q^{-\nu}\Phi(\pi/q),$$

полученный с учетом (36) при выполнении ограничений (37), приходим к следующей оценке снизу:

$$d_{2m-1,2n-1}\Big(W_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2),L_2(Q)\Big)\ge$$

$$\ge d_{2m-1,2n-1}\Big(\widetilde{W}_k^{(r,s)}(\Phi_1,\Phi_2),L_2(Q)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2^k m^r n^s}\Phi_1^k\left(\frac{\pi}{m}\right)\Phi_2^k\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{40}$$

Доказательство теоремы 4 завершается сопоставлением оценок сверху (38) и снизу (40).

Литература

1. М. К. Потапов, *О приближении „углом”*, Proc. Conf. Constructive Theory of Functions, Akad. Kiado, Budapesht (1972), p. 371 – 399.
2. М. К. Потапов, *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углом”*, Тр. Мат. ин-та СССР, **117**, 256 – 291 (1972).
3. М. Томич, *О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости*, Publ. Inst. Math (Beograd), **23**, № 37, 193 – 206 (1978).
4. W. Haussmann, K. Zeller, *Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation*, Approxim. Theory IV (Proc. Intern. Symp., January 10 – 14, 1983), Acad. Press, New York (1983), p. 509 – 514.
5. H. Gronska, K. Jetter, *Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials*, J. Approxim. Theory, **48**, № 4, 396 – 406 (1986).
6. С. Б. Вакарчук, *О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных*, Изв. вузов, **3**, 14 – 25 (1991).
7. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178**, 3 – 113 (1986).
8. С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, *О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов*, Укр. мат. журн., **48**, № 3, 301 – 308 (1996).
9. М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев, *Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных*, Докл. АН России, **404**, № 4, 460 – 464 (2005).
10. М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев, *О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных*, Укр. мат. журн., **61**, № 6, 855 – 864 (2009).
11. M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev, *Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables*, Anal. Math., **35**, № 1, 61 – 72 (2009).
12. С. Б. Вакарчук, А. В. Швачко, *О наилучшем приближении „углом” в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева – Эрмита*, Зб. праць Iн-ту математики НАН України, **11**, № 3, 35 – 46 (2014).
13. С. Б. Вакарчук, А. В. Швачко, *Неравенства колмогоровского типа для производных двух переменных и их приложение к аппроксимации „углом”*, Изв. вузов, математика, **11**, 3 – 22 (2015).
14. С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации*, Укр. мат. журн., **63**, № 12, 1579 – 1601 (2011).
15. Ю. А. Брудный, *Приближение функций n-переменных квазимногочленами*, Изв. АН СССР, сер. мат., **34**, № 3, 564 – 583 (1979).
16. В. В. Шалаев, *О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 125 – 129 (1991).

Получено 14.09.19,
после доработки — 06.05.20