DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1037

УДК 512.542

С. Ф. Каморников* (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь),
В. Н. Тютянов (Гомел. фил. Междунар. ун-та „МИТСО”, Беларусь)

О σ-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ $3'$-ГРУПП

For a partition σ of the set $\mathbb{P}$ of all primes, it is solved that if every complete Hall set of type σ of a finite $3'$-group G is reducible in some subgroup H of G, then H is σ-subnormal in G.

Для будь-якого розбиття σ множини $\mathbb{P}$ всіх простих чисел доведено, що якщо кожна повна холлова множина типу σ скінченної $3'$-групи G редукується в деяку підгрупу H із G, то підгрупа H є σ-субнормальною в G.

1. Введение. Отвечая на вопрос Кегеля [1] и Виландта [2], Кляйдман [3] доказал, что подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G, если H p-субнормальна в G для любого простого числа p, т. е. $H \cap P$ — силовская p-подгруппа из H для любой силовской p-подгруппы P группы G и любого простого числа p (в дальнейшем, следуя [4], для обозначения того, что подгруппа H p-субнормальна в G, используется запись $H \leq_p G$).

Приведенный результат инициировал соответствующий вопрос для σ-субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А. Н. Скибой в [5] под номером 19.86 (см. также вопрос 7.2 из [6]).

Проблема 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | \, i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G — конечная группа, содержащая холлову σ_i-подгруппу для каждого $i \in I$, и H — такая подгруппа группы G, что $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i \in I$ и любой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G. Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G?*

Простая проверка показывает, что обратное утверждение справедливо: если подгруппа H является σ-субнормальной в G, то $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i \in I$ и любой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G (см., например, [7]).

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А. Н. Скибой в работе [8]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G.

Далее всегда σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i, $i \in I$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [7], будем говорить, что группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G

* Исследования С. Ф. Каморникова выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант ГР № 20191056).

тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$.

Следующая проблема является более общей по сравнению с проблемой 1. Это связано с существованием групп, содержащих несколько классов сопряженных холловых подгрупп.

Следуя [7], будем говорить, что система $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G является *полным холловым множеством типа* σ группы G, если выполняются следующие условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \ldots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, \ldots, S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$. Группа G называется *σ-полной*, если она содержит по крайней мере одно полное холлово множество типа σ (понятно, что для некоторых разбиений σ существуют группы, для которых множество всех полных холловых множеств типа σ является пустым).

Будем говорить, что полное холлово множество Σ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, \ldots, k$).

Проблема 2. *Пусть σ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G — σ-полная конечная группа, $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G и H — такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что H является σ-субнормальной в G?*

Ясно, что положительное решение проблемы 2 всегда приводит к решению проблемы 1. В данной работе проблемы 1 и 2 решаются в классе конечных $3'$-групп для произвольного разбиения σ.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G — σ-полная конечная $3'$-группа и Σ — полное холлово множество типа σ группы G. Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ-субнормальной в G, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

Ключом к доказательству теоремы 1.1 являются лемма 2.3, устанавливающая строение минимального контрпримера к проблеме 2, а также работа Судзуки [9], в которой описаны простые неабелевы $3'$-группы.

2. Определения и предварительные результаты. В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [10]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работам [7, 8].

Будем использовать следующие обозначения:

если π — некоторое множество простых чисел, то $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ — множество всех холловых π-подгрупп группы G;

если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G и N — нормальная подгруппа группы G, то $\Sigma N/N = \{S_1N/N, S_2N/N, \ldots, S_kN/N\}$;

если n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) | i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

$\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Основные свойства σ-субнормальных подгрупп приведем в виде лемм, доказательство которых осуществляется простой проверкой.

Лемма 2.1. *Пусть H и N — подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда:*

1) *если подгруппа H σ-субнормальна в G, то подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N;*

2) *если $N \subseteq H$, то подгруппа H σ-субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N σ-субнормальна в G/N.*

Лемма 2.2. *Пусть H и K — подгруппы группы G, причем подгруппа H σ-субнормальна в G. Тогда:*

1) *если $K \subseteq H$ и подгруппа K σ-субнормальна в H, то K σ-субнормальна в G;*

2) *подгруппа $K \cap H$ σ-субнормальна в K;*

3) *если $H \subseteq K$, то H σ-субнормальна в K.*

Пусть H — подгруппа σ-полной группы G, $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Будем говорить, что пара (G, H) является *контрпримером к проблеме* 2, если для любого $g \in G$ полное холлово множество Σ^g редуцируется в H, но подгруппа H не является σ-субнормальной в G. Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к проблеме* 2.

Лемма 2.3. *Если (G, H) — минимальный контрпример к проблеме 2, то G и H — простые неабелевы группы.*

Доказательство. Пусть $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$. Тогда из определения σ-субнормальной подгруппы следует, что $k = |\sigma(G)| \geq 2$.

Предположим, что группа G не является простой. Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G.

По условию леммы подгруппа $H \cap S_i^g$ является холловой σ_i-подгруппой в H для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как $N \trianglelefteq G$, то $N \cap S_i^g \trianglelefteq S_i^g$ и $N \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа в N. Значит, $(H \cap S_i^g)(N \cap S_i^g)$ — σ_i-подгруппа группы G. Кроме того, индекс

$$|HN : (H \cap S_i^g)(N \cap S_i^g)| = |H : (H \cap S_i^g)||N : (N \cap S_i^g)|/|(H \cap N) : ((H \cap N) \cap S_i^g)|$$

не делится на числа из σ_i. Следовательно, $(H \cap S_i^g)(N \cap S_i^g)$ — холлова σ_i-подгруппа в HN. А так как

$$(H \cap S_i^g)(N \cap S_i^g) \subseteq HN \cap S_i^g,$$

то $HN \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа в HN.

Теперь из равенства

$$S_i^g N/N \cap HN/N = (S_i^g \cap HN)N/N$$

следует, что $S_i^g N/N \cap HN/N$ — холлова σ_i-подгруппа в HN/N. Таким образом, полное холлово множество $\Sigma^g N/N$ типа σ группы G/N редуцируется в HN/N для любого элемента $g \in$ $\in G$. Отсюда вследствие минимальности контрпримера (G, H) подгруппа HN/N является σ-субнормальной в G/N. Но тогда в силу леммы 2.1 HN является σ-субнормальной подгруппой группы G. Поэтому N не содержится в H. Более того, $\mathrm{Core}_G(H) = 1$. Ясно, что $H \cap S_i^x$ — холлова σ_i-подгруппа в H для всех $x \in HN$ и система

$$\{HN \cap S_1^x, HN \cap S_2^x, \ldots, HN \cap S_k^x\}$$

является полным холловым множеством типа σ группы HN, которое редуцируется в H. Если $|HN| < |G|$, то вследствие минимальности контрпримера подгруппа H является σ-субнормальной в HN. Тогда в силу леммы 2.2 H является σ-субнормальной подгруппой группы G, что противоречит допущению.

Таким образом, далее полагаем, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p. Отсюда и из $k \geq 2$ следует, что найдется множество $\sigma_i \in \sigma$, для которого $\sigma_i \cap \pi(G) \in \sigma(G)$ и $p \notin \sigma_i$. Тогда H содержит любую холлову σ_i-подгруппу S_i^g для любого $g \in G$, причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\langle S_i^g | g \in G\rangle \subseteq H$. Поскольку $1 \neq \langle S_i^g | g \in G\rangle \trianglelefteq G$, то $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Пришли к противоречию с тем, что $\mathrm{Core}_G(H) = 1$.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Предположим, что $K = H$. Тогда $H \subseteq N$. Простая проверка показывает, что пара (N, H) — контрпример к проблеме 2. Так как $|N| + |H| < |G| + |H|$, то приходим к противоречию с выбором группы G. Следовательно, $K \neq H$. Очевидно, $K \trianglelefteq H$. Поэтому полное холлово множество Σ^g типа σ группы G редуцируется в K для любого элемента $g \in G$. Отсюда вследствие минимальности контрпримера подгруппа K является σ-субнормальной в G. Но тогда в силу леммы 2.2 подгруппа K будет σ-субнормальной в N. Значит, существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = N$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i, либо группа $K_i/\mathrm{Core}_{K_i}(K_{i-1})$ является σ-примарной.

Предположим, что $K \neq 1$, и рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Пусть N — простая неабелева группа. Тогда подгруппа K_{n-1} не нормальна в N. Значит, $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = N/1 = N$ — σ_i-группа для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Поскольку $G = HN$ и $k \geq 2$, то для всех $g \in G$ подгруппа H содержит все холловы σ_j-подгруппы S_j^g, $j \neq i$. Следовательно, $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $N = N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 — изоморфные простые группы. Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в N, то $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1})$ — σ_i-группа для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что либо $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = 1$, либо $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \in \{N_1, N_2\}$. Если $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = 1$, то $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = N$ — σ_i-группа. Если же $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \in \{N_1, N_2\}$, то вследствие изоморфизма $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \simeq N_1$ подгруппа N_1 является σ_i-группой, откуда следует, что и N является σ_i-группой. Далее, как и в случае, когда N — простая неабелева группа, приходим к противоречию с тем, что $\mathrm{Core}_G(H) = 1$.

Если подгруппа K_{n-1} нормальна в N, то $K_{n-1} \in \{N_1, N_2\}$, т. е. K_{n-1} — простая неабелева группа. Если $K \subset K_{n-1}$, то, как и в случае 1, приходим к противоречию. Следовательно, $K_{n-1} = K$. Тогда $K = H \cap N \trianglelefteq N$ и $K = H \cap N \trianglelefteq H$. Поэтому $K \trianglelefteq \langle N, H\rangle = HN = G$. Отсюда и из $K \subseteq H$ следует, что $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Случай 3. Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где $t \geq 3$ и $N_1, N_2, \ldots, N_t$ — изоморфные простые группы. Тогда, используя индукцию по t, как и в случаях 1 и 2, приходим к тому, что либо N — σ-примарная группа, либо $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. А это противоречит доказанному ранее.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$, а значит, $G = N \rtimes H$ — полупрямое произведение подгрупп N и H. Если $S_i \in \Sigma$, то $S_i = (S_i \cap N) \rtimes (S_i \cap H)$, где $S_i \cap N \in \mathrm{Hall}_{\sigma_i}(N)$, $S_i \cap H \in \mathrm{Hall}_{\sigma_i}(H)$. Рассмотрим группу $N \rtimes (S_i \cap H)$, содержащую S_i. По условию леммы для любого $x \in N(S_i \cap H)$ пересечение $H \cap S_i^x$ является холловой σ_i-подгруппой в H. Отсюда имеем

$$S_i^x \cap H \subseteq N(S_i \cap H) \cap H = (N \cap H)(S_i \cap H) = S_i \cap H.$$

Следовательно, $S_i^x \cap H = S_i \cap H$. Значит, $S_i \cap H \subseteq S_i^x$ для всех $x \in N(S_i \cap H)$, поэтому $S_i \cap H \subseteq O_{\sigma_i}(N(S_i \cap H))$. Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i-группой. Последнее, как показано выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и холлова σ_i-подгруппа $S_i \cap H$ группы H централизует N. Так как это правильно для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $G = N \times H$. А так как $\mathrm{Core}_G(H) = 1$, то $H = 1$ и $G = N$ — простая неабелева группа.

Покажем, что подгруппа H является простой. Предположим, что она содержит собственную нормальную подгруппу $L \neq 1$. Очевидно, пара (G, L) удовлетворяет условию леммы. Поскольку $|G| + |L| < |G| + |H|$, то подгруппа L является σ-субнормальной в G. Это означает, что существует цепь подгрупп

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа L_{i-1} нормальна в L_i, либо группа $L_i/\mathrm{Core}_{L_i}(L_{i-1})$ является σ-примарной. Отсюда и из простоты группы G следует, что G является σ_i-группой для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Пришли к противоречию с условием $k \geq 2$. Следовательно, H — простая неабелева группа.

Лемма доказана.

Лемма 2.3 имеет самостоятельное значение. Следствием простоты группы G из минимального контрпримера к проблеме 2, в частности, являются следующие результаты.

***Следствие* 2.1.** *Пусть G — разрешимая группа, σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и Σ — полное холлово множество типа σ группы G. Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ-субнормальной в G, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

Напомним, что группа G называется *σ-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является σ-примарной группой.

***Следствие* 2.2.** *Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G — σ-разрешимая группа и Σ — полное холлово множество типа σ группы G. Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ-субнормальной в G, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

3. Доказательство теоремы 1.1. Если подгруппа H σ-субнормальна в G, то в силу леммы 2.6 из [7] $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \ldots, k$.

Докажем обратное. Пусть (G, H) — минимальный контрпример. Тогда в силу леммы 2.3 G и H — простые неабелевы группы. Поскольку G — $3'$-группа, то G и H являются группами Судзуки. Пусть $G = Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$. Из [9] следует, что $2n + 1 = tm$, где t и m — нечетные числа, большие единицы, и $H = Sz(q_0)$ для $q_0 = 2^t \geq 8$.

В [9] показано, что

$$|G| = q^2(q^2 + 1)(q - 1) = q^2(q - \sqrt{2q} + 1)(q + \sqrt{2q} + 1)(q - 1)$$

и группа G содержит абелевы холловы подгруппы порядков $q - \sqrt{2q} + 1$, $q + \sqrt{2q} + 1$ и $q - 1$. Кроме того, эти числа являются попарно взаимно простыми.

В частности, группа G является τ-полной для такого разбиения $\tau = \{\tau_j | \, j \in J\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, что $\tau_1 = \{2\}$, $\tau_2 = \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$, $\tau_3 = \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$ и $\tau_4 = \pi(p - 1)$. Точно так же

$$|H| = q_0^2(q_0^2+1)(q_0-1) = q_0^2(q_0-\sqrt{2q_0}+1)(q_0-\sqrt{2q_0}+1)(q_0-1).$$

Очевидно, имеет место равенство

$$q-1 = 2^{tm}-1 = (2^t-1)(2^{t(m-1)}+2^{t(m-2)}+\ldots+2^t+1) =$$

$$= (q_0-1)(2^{t(m-1)}+2^{t(m-2)}+\ldots+2^t+1).$$

Поэтому q_0-1 делит $q-1$ и, в частности, $\pi(q_0-1)\subseteq\pi(q-1)$.

В [9] установлено, что группа G содержит максимальную холлову подгруппу Фробениуса порядка $q^2(q-1)$ и максимальную диэдральную подгруппу порядка $2(q-1)$. Порядки всех других максимальных подгрупп, отличных от подгрупп Судзуки, взаимно просты с $q-1$. В [9] показано, что $(5,q-1)=(5,q_0-1)=1$ и $(5,q^2+1)=(5,q_0^2+1)=5$. Поскольку $\pi(q_0-1)\subseteq$ $\subseteq\pi(q-1)$ и H — простая неабелева группа Судзуки, то $5\in\pi(H)$ и $5\in\tau_2\cup\tau_3$. Пусть $5\in\tau_2$. Группа G содержит абелеву холлову подгруппу T порядка $q-\sqrt{2q}+1$, которая содержится в единственной максимальной подгруппе порядка $4(q-\sqrt{2q}+1)$. Поскольку $2^{2n+1}\geq 8$, то отсюда легко следует, что

$$\tau_2 = \pi(G)\cap(\sigma_{i_1}\cup\ldots\cup\sigma_{i_l})$$

для некоторых $i_1,\ldots,i_l$ из I. При этом из абелевости подгруппы T следует, что $T=T_1\times\ldots$ $\ldots\times T_l$, где T_j — абелева холлова σ_{i_j}-подгруппа для любого $j=1,2,\ldots,l$.

Пусть $5\in\sigma_{i_s}$ для некоторого $s\in\{1,\ldots,l\}$. В силу условия теоремы подгруппа T_s редуцируется в H. Отсюда и из абелевости подгруппы T_s следует, что $H\leq_5 G$. Последнее невозможно в силу теоремы 1.4 из [4]. Точно так же рассматривается случай, когда $5\in\tau_3$.

Теорема доказана.

Литература

1. O. H. Kegel, *Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen*, Math. Z., **78**, 205–221 (1962).
2. H. Wielandt, *Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute*, Proc. Pure Math., **37**, 161–173 (1980).
3. P. B. Kleidman, *A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups*, Ann. Math., **133**, 369–428 (1991).
4. R. Guralnick, P. B. Kleidman, R. Lyons, *Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups*, Proc. London Math. Soc., **66**, № 3, 129–151 (1993).
5. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь, Ин-т математики СО РАН, Новосибирск (2018).
6. A. N. Skiba, *On some results in the theory of finite partially soluble groups*, Commun. Math. Stat., **4**, № 3, 281–309 (2016).
7. A. N. Skiba, *On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups*, J. Algebra, **436**, 1–16 (2015).
8. А. Н. Скиба, *О σ-свойствах конечных групп I*, Проблемы физики, математики и техники, № 4(21), 89–96 (2014).
9. M. Suzuki, *On a class double transitive groups*, Ann. Math., **75**, № 1, 105–145 (1962).
10. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin; New York (1992).

Получено 10.08.19