DOI: 10.37863/umzh.v72i7.2352

УДК 517.5

В. А. Кофанов, И. В. Попович (Днепр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ТИПА РЕМЕЗА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФУНКЦИИ

For any $p \in (0, \infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$, and arbitrary measurable set $B \subset I_d := [0, d]$, $\mu B \le \beta$, we obtain the sharp inequality of Remez type

$$\|x_{\pm}\|_\infty \le \frac{\|(\varphi + c)_{\pm}\|_\infty}{\|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_y^c)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}$$

on the set $S_\varphi(\omega)$ of d-periodic functions x having zeros with given sine-shaped 2ω-periodic comparison function φ, where $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$ satisfies the condition

$$\|x_+\|_\infty \cdot \|x_-\|_\infty^{-1} = \|(\varphi + c)_+\|_\infty \cdot \|(\varphi + c)_-\|_\infty^{-1},$$

$B_y^c := \{t \in [0, 2\omega] : |\varphi(t) + c| > y\}$, and y is such that $\mu B_y^c = \beta$.

In particular, we obtain such type inequalities on Sobolev sets of periodic functions and on spaces of trigonometric polynomials and splines with given quotient $\|x_+\|_\infty / \|x_-\|_\infty$.

Для довільних $p \in (0, \infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$ і будь-якої вимірної множини $B \subset I_d := [0, d]$, $\mu B \le \beta$, отримано точну нерівність типу Ремеза

$$\|x_{\pm}\|_\infty \le \frac{\|(\varphi + c)_{\pm}\|_\infty}{\|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_y^c)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}$$

на класах $S_\varphi(\omega)$ d-періодичних функцій x, що мають нулі, із заданою синусоподібною 2ω-періодичною функцією порівняння φ, де $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$ задовольняє умову

$$\|x_+\|_\infty \, \|x_-\|_\infty^{-1} = \|(\varphi + c)_+\|_\infty \, \|(\varphi + c)_-\|_\infty^{-1},$$

$B_y^c := \{t \in [0, 2\omega] : |\varphi(t) + c| > y\}$, а y вибрано так, що $\mu B_y^c = \beta$.

Як наслідок встановлено точні нерівності такого типу на соболєвських класах диференційовних періодичних функцій та на просторах тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів із заданим відношенням норм $\|x_+\|_\infty / \|x_-\|_\infty$.

1. Введение. Пусть $G \subset \mathbf{R}$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, для которых конечна норма (квазинорма) $\|x\|_{L_p(G)}$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vraisup}\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $d > 0$, I_d — окружность, реализованная в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$ через $L_\infty^r(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Для таких G вместо $\|x\|_{L_\infty(G)}$ будем писать $\|x\|_\infty$.

Через $E_0(f)_{L_p(G)}$ обозначим наилучшее приближение функции f константами в пространстве $L_p(G)$, т. е.

$$E_0(x)_{L_p(G)} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \|x - c\|_{L_p(G)}.$$

Вместо $E_0(x)_{L_\infty(G)}$ будем писать $E_0(x)_\infty$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если существует такое $c \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \max_{t\in\mathbf{R}} f(t) + c, \qquad \min_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \min_{t\in\mathbf{R}} f(t) + c,$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + c$, где $\xi,\ \eta \in \mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она имеет такие свойства: φ четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ выпуклая вверх на $[0,\omega]$ и строго монотонная на $[0,\omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(\mathbf{R})$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [1, 2]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\{x \in L^r_\infty(\mathbf{R}) \colon \|x\|_\infty \le A_0,\ \ \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$).

На соболевских классах и пространствах $S_{n,r}$ функцией сравнения является подходящее сжатие и сдвиг идеального сплайна Эйлера порядка r, а на пространствах T_n — полином $C\sin nt$ с подходящей константой C (подробнее см. пп. 3 – 5).

В теории аппроксимации полиномами важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n,\beta)\,\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.1}$$

на классе T_n, где B — произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta \in \in (0,2\pi)$, μ — мера Лебега.

Начало этой тематике положила работа Е. Ремеза [3], в которой найдена точная константа в неравенстве вида (1.1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Для точной константы $C(n,\beta)$ в неравенстве (1.1) для тригонометрических полиномов в ряде работ получены двусторонние оценки. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n,\beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [4] и $\beta \to 0$ [5]. Библиографию работ по данной тематике можно найти в [4 – 7]. В работе [5] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.2}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (1.2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \dfrac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$.

Не так давно была найдена [8] точная константа в неравенстве (1.1) для тригонометрических полиномов.

Результат работы [5] был обобщен в [9], где для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ (φ — заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказаны неравенства

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \tag{1.3}$$

и

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}\,. \tag{1.4}$$

Неравенства (1.3) и (1.4) являются точными на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращаются в равенства для функции $x(t) = \varphi(t) + \dfrac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$.

В работе [10] для произвольных $p \in [1,\infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$ и измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказано точное неравенство типа Ремеза

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d\setminus B)} \tag{1.5}$$

на классах $S_\varphi(\omega)$ d-периодических функций x с заданной функцией сравнения φ.

Неравенства разных метрик типа Ремеза представлены в [11, 12].

В настоящей работе получено дальнейшее обобщение неравенства (1.5) на классы функций $x \in S_\varphi(\omega)$ с заданным отношением $\|x_+\|_\infty / \|x_-\|_\infty$ (теорема 1). Как следствие получены точные неравенства такого типа на соболевских классах дифференцируемых периодических функций (теорема 2), а также на пространствах T_n тригонометрических полиномов (теорема 3) и пространствах $S_{n,r}$ сплайнов (теорема 4) с заданным отношением норм их положительных и отрицательных частей.

2. Неравенства типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения. Для функции $f \in L_1(I_d)$ через $m(f,y)$, $y > 0$, обозначим ее функцию распределения, определяемую равенством

$$m(f,y) := \mu\{t \in I_d \colon |f(t)| > y\}, \tag{2.1}$$

и пусть $r(f,t)$ — убывающая перестановка (см., например, [13], §1.3) сужения функции $|f|$ на $[0,d]$. Положим $r(f,t) = 0$ для $t > d$.

Теорема 1. *Пусть $p \in (0,\infty]$, φ — S-функция с периодом 2ω, $\beta \in (0, 2\omega)$. Для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$, имеющей нули, и измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, выполнено неравенство*

$$\|x_\pm\|_\infty \le \frac{\|(\varphi + c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega}\setminus B^c_{y(\beta)})}} \|x\|_{L_p(I_d\setminus B)}, \tag{2.2}$$

где $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\|x_+\|_\infty}{\|x_-\|_\infty} = \frac{\|(\varphi + c)_+\|_\infty}{\|(\varphi + c)_-\|_\infty},$$

а $B^c_y := \{t \in [0, 2\omega] \colon |\varphi(t) + c| > y\}$, причем $y = y(\beta)$ выбрано так, что $\mu B^c_{y(\beta)} = \beta$.

Неравенство (2.2) является точным на классе функций $x \in S_\varphi(\omega)$, имеющих нули, с заданным отношением норм $\|x_+\|_\infty / \|x_-\|_\infty$ и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t) + c$ и множества $B = B^c_{y(\beta)}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную d-периодическую функцию $x \in S_\varphi(\omega)$, имеющую нули. Поскольку φ является функцией сравнения для x, то существует такое $c \in \mathbf{R}$, что

$$\|x_+\|_\infty = \|(\varphi + c)_+\|_\infty, \qquad \|x_-\|_\infty = \|(\varphi + c)_-\|_\infty. \tag{2.3}$$

Пусть, для определенности, функция φ возрастает на $\left[-\dfrac{\omega}{2}, \dfrac{\omega}{2}\right]$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $x_\tau(t) := x(\tau + t),\ t \in \mathbf{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$x_{\tau_1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \|x_+\|_\infty, \qquad x_{\tau_2}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \|x_-\|_\infty.$$

Так как φ является функцией сравнения для x, то

$$(x_{\tau_1}(t))_+ \ge (\varphi(t) + c)_+\ , \qquad \left|t - \frac{\omega}{2}\right| \le \omega, \tag{2.4}$$

и

$$(x_{\tau_2}(t))_- \ge (\varphi(t) + c)_-\ , \qquad \left|t + \frac{\omega}{2}\right| \le \omega, \tag{2.5}$$

где $u_\pm := \max\{\pm\, u, 0\}$. Отметим, что из (2.4), (2.5), в частности, следуют соотношение $d \ge 2\omega$, и, кроме того, неравенства

$$m(x_\pm, y) \ge m((\varphi(\cdot) + c)_\pm, y), \qquad y \ge 0,$$

где функция $m(f, y)$ определена соотношением (2.1). Отсюда непосредственно следует, что

$$r(x, t) \ge r(\varphi(\cdot) + c, t), \qquad t \ge 0. \tag{2.6}$$

Заметим, что для любого измеримого множества $B \subset I_d,\ \mu B \le \beta$, выполняется неравенство

$$\int\limits_B |x(t)|^p dt \le \int\limits_0^\beta r^p(x, t) dt,$$

а так как перестановка сохраняет L_p-норму функции, то

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} = \int\limits_{I_d} |x(t)|^p dt - \int\limits_B |x(t)|^p dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^d r^p(x, t) dt - \int\limits_0^\beta r^p(x, t) dt = \int\limits_\beta^d r^p(x, t) dt.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (2.6) и соотношение $d \ge 2\omega$, получаем

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} \ge \int\limits_\beta^{2\omega} r^p(\varphi(\cdot) + c, t) dt = \int\limits_{I_{2\omega} \setminus B^c_{y(\beta)}} |\varphi(t) + c|^p dt.$$

Таким образом, для любого измеримого множества B, $\mu B \leq \beta$, выполнено неравенство

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)} \geq \|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B^c_{y(\beta)})},$$

из которого вследствие (2.3) непосредственно следует (2.2).

Теорема 1 доказана.

Через $E_0^{\pm}(x)_{L_p(G)}$ обозначим наилучшее одностороннее приближение функции x константами в пространстве $L_p(G)$, т. е.

$$E_0^{\pm}(x)_{L_p(G)} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \left\{ \|x - c\|_{L_p(G)} : \forall\, t \quad \pm (x(t) - c) \geq 0 \right\}. \tag{2.7}$$

Учитывая, что для S-функции φ справедливо равенство (лемма 1 [10])

$$\min_{c\,:\ |c| \leq \|\varphi\|_\infty} \left\{ \int\limits_{I_{2\omega} \setminus B^c_{y(\beta)}} |\varphi(t) + c|^p dt \right\}^{1/p} = E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}, \qquad p \geq 1, \tag{2.8}$$

где $B_1 := \left[\dfrac{\omega - \beta}{2}, \dfrac{\omega + \beta}{2}\right]$, и принимая во внимание (2.7), из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *на классе всех функций* $x \in S_\varphi(\omega)$ *имеют место точные неравенства*

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}, \qquad p \geq 1,$$

и

$$E_0^{\pm}(x)_\infty \leq \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi + \bar{c}\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B^{\bar{c}}_{y(\beta)})}} E_0^{\pm}(x)_{L_p(I_d \setminus B)}, \qquad \bar{c} := \|\varphi\|_\infty\,,$$

а на классе функций $x \in S_\varphi(\omega)$, *имеющих нули, выполнено точное неравенство*

$$\|x\|_\infty \leq \sup_{c:\ |c| \leq \|\varphi\|_\infty} \frac{\|\varphi + c\|_\infty}{\|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B^c_{y(\beta)})}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}.$$

***Замечание* 1.** Первое из неравенств доказано в [10].

3. Неравенства типа Ремеза на классах дифференцируемых периодических функций. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S-функцией с периодом $2\pi/\lambda$. Пусть далее $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$ — константа Фавара.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in (0, \infty]$, $\beta \in (0, 2\pi)$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *имеющей нули, и произвольного измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, *где* $\lambda = \left(\dfrac{K_r \|x^{(r)}\|_\infty}{E_0(x)_\infty}\right)^{1/r}$, *выполнено неравенство*

$$\|x_\pm\|_\infty \leq \frac{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_r + c\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B^c_{y(\beta)})}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.1}$$

где $\alpha = \dfrac{r}{r+1/p}$, $c \in [-K_r, K_r]$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\|x_+\|_\infty}{\|x_-\|_\infty} = \frac{\|(\varphi_r + c)_+\|_\infty}{\|(\varphi_r + c)_-\|_\infty},$$

а $B_y^c := \big\{t \in [0, 2\pi] : |\varphi_r(t) + c| > y\big\}$, *причем* $y = y(\beta)$ *выбрано так, что* $\mu B^c_{y(\beta)} = \beta$.

Неравенство (3.1) *является точным на классе функций* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *имеющих нули, с заданным отношением норм* $\|x_+\|_\infty / \|x_-\|_\infty$ *и обращается в равенство для функции* $x(t) = \varphi_r(t) + c$ *и множества* $B = B^c_{y(\beta)}$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$. Вследствие однородности неравенства (3.1) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{3.2}$$

Выберем λ из условия

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \,, \tag{3.3}$$

т. е. $\lambda = \left(\dfrac{K_r \|x^{(r)}\|_\infty}{E_0(x)_\infty}\right)^{1/r}$. Тогда в силу теоремы сравнения Колмогорова [14] сплайн $\varphi := \varphi_{\lambda,r}$ является функцией сравнения для функции x и, следовательно, $x \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)$. В силу теоремы 1 выполнено неравенство

$$\|x_\pm\|_\infty \le \frac{\|(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{\lambda}} \setminus \frac{B^c_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}, \tag{3.4}$$

а так как из (3.3) и условия теоремы 2 на константу c вытекает равенство

$$\|x_\pm\|_\infty = \big\|(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c)_\pm\big\|_\infty \,, \tag{3.5}$$

то из этого равенства и оценки (3.4) следует, что

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \ge \|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{\lambda}} \setminus \frac{B^c_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}.$$

Комбинируя последнее неравенство с равенством (3.5), применяя очевидные соотношения

$$\|(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c)_\pm\|_\infty = \lambda^{-r} \|(\varphi_r + c)_\pm\|_\infty$$

и

$$\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{\lambda}} \setminus \frac{B^c_{y(\beta)}}{\lambda}\right)} = \lambda^{-(r+1/p)} \|\varphi_r + c\|_{L_p\left(I_{2\pi} \setminus B^c_{y(\beta)}\right)},$$

а также учитывая определение α, получаем

$$\frac{\|x_\pm\|_\infty}{\|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}} \le \frac{\|(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|^\alpha_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{\lambda}} \setminus \frac{B^c_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}} = \frac{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_r + c\|^\alpha_{L_p\left(I_{2\pi} \setminus B^c_{y(\beta)}\right)}}.$$

Отсюда в силу (3.2) следует (3.1).

Теорема 2 доказана.

Применяя соотношение (2.8) и полагая в нем $\varphi = \varphi_r$, $\omega = \pi$, а также учитывая определение (2.7), из теоремы 2 выводим следующее утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *на классе всех функций* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *имеют место точные неравенства*

$$E_0(x)_\infty \le \frac{K_r}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \qquad p \ge 1,$$

и

$$E_0^\pm(x)_\infty \le \frac{2K_r}{\|\varphi_r + K_r\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^{K_r}_{y(\beta)})}} E_0^\pm(x)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty,$$

а на классе функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *имеющих нули, выполнено точное неравенство*

$$\|x\|_\infty \le \sup_{c:\ |c|\le K_r} \frac{\|\varphi_r + c\|_\infty}{\|\varphi_r + c\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty.$$

***Замечание* 2.** Первое из неравенств ранее доказано в [10], а два других (при $\beta = 0$) — в [15].

4. Неравенства типа Ремеза для тригонометрических полиномов. Напомним, что T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Теорема 3. *Пусть* $p \in (0,\infty]$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если тригонометрический полином* $T \in T_n$ *с минимальным периодом* $2\pi/m$ *имеет нули, то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\|T_\pm\|_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|(\sin(\cdot)+c)_\pm\|_\infty}{\|\sin(\cdot)+c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{4.1}$$

где $c \in [-1,1]$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\|T_+\|_\infty}{\|T_-\|_\infty} = \frac{\|(\sin(\cdot)+c)_+\|_\infty}{\|(\sin(\cdot)+c)_-\|_\infty},$$

а $B^c_y := \{t \in [0,2\pi] : |\sin t + c| > y\}$, *причем* $y = y(\beta)$ *выбрано так, что* $\mu B^c_{y(\beta)} = n\beta/m$.

Неравенство (4.1) *является точным на классе полиномов, имеющих нули, с заданным отношением норм* $\|T_+\|_\infty / \|T_-\|_\infty$ *и обращается в равенство для полиномов* $\tau_k(t) = \sin kt + c$ *и соответствующих множеств* $B = B^c_{y(\beta)}(k) := \big\{t \in [0,2\pi] : |\sin kt + c| > y(\beta)\big\}$, $k = 1,\ldots,n$.

Доказательство. Зафиксируем полином $T \in T_n$, имеющий нули, и пусть его минимальный период равен $\dfrac{2\pi}{m}$. Вследствие однородности (4.1) можно считать, что

$$E_0(T)_\infty = 1.$$

Отсюда с учетом определения константы c имеем

$$\|T_\pm\|_\infty = \|(\sin(\cdot)+c)_\pm\|_\infty = \|(\sin n(\cdot)+c)_\pm\|_\infty. \tag{4.2}$$

Следовательно, полином $\varphi(t) := \sin nt$ является функцией сравнения для полинома $T(t)$ (см., например, доказательство теоремы 8.1.1 из [16]). Ясно, что φ является S-функцией с периодом $\dfrac{2\pi}{n}$. Таким образом, T принадлежит $S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Поэтому в силу теоремы 1

$$\|T_{\pm}\|_{\infty} \le \frac{\|(\sin n(\cdot)+c)_{\pm}\|_{\infty}}{\|\sin n(\cdot)+c\|_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{n}}\setminus B^c_{y(\beta)}(n)\right)}} \|T\|_{L_p\left(I^k_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)},$$

где $I^k_{\frac{2\pi}{m}} := \left(\frac{2\pi}{m}k, \frac{2\pi}{m}(k+1)\right]$, $k=0,\ldots,m-1$. Отсюда в силу (4.2) имеем

$$\|T\|^p_{L_p\left(I^k_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)} \ge \|\sin n(\cdot)+c\|^p_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{n}}\setminus B^c_{y(\beta)}(n)\right)} =$$

$$= \frac{1}{n}\|\sin n(\cdot)+c\|^p_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)}(n)\right)} = \frac{1}{n}\|\sin(\cdot)+c\|^p_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)}\right)}.$$

Суммируя эти неравенства по $k=0,1,\ldots,m-1$ и возводя обе части полученного неравенства в степень $1/p$, имеем

$$\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p} \|\sin(\cdot)+c\|_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)}\right)}.$$

Из последнего неравенства и равенства (4.2) следует (4.1).

Теорема 3 доказана.

Применяя соотношение (2.8) и полагая в нем $\varphi(t)=\sin t$, а также учитывая определение (2.7), получаем такое следствие.

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 3 *для полиномов $T \in T_n$ с минимальным периодом $2\pi/m$ имеют место неравенства*

$$E_0(T)_{\infty} \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{E_0(\sin(\cdot))_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^m)}}, \qquad p \ge 1,$$

и

$$E^{\pm}_0(T)_{\infty} \le 2\left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{E^{\pm}_0(T)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\sin(\cdot)+1\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^m)}},$$

где $B^m = \left[\frac{\pi}{2}-\frac{n\beta}{2m}, \frac{\pi}{2}+\frac{n\beta}{2m}\right]$, а для полиномов $T \in T_n$ с минимальным периодом $2\pi/m$, имеющих нули, выполнено неравенство

$$\|T\|_{\infty} \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \sup_{c:\ |c|\le 1} \frac{\|\sin(\cdot)+c\|_{\infty}}{\|\sin(\cdot)+c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}.$$

***Замечание* 3.** Первое из неравенств доказано в [10], а два других (при $\beta=0$ и $m=1$) — в [15].

5. Неравенства типа Ремеза для периодических полиномиальных сплайнов. Пусть $r,\ n \in \mathbf{N}$. Напомним, что символом $S_{n,r}$ обозначено пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$. Ясно, что $S_{n,r} \subset L^r_{\infty}(\mathbf{R})$.

Теорема 4. *Пусть $p \in (0,\infty]$, $n,m \in \mathbf{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Если сплайн $s \in S_{n,r}$ с минимальным периодом $2\pi/m$ имеет нули, то для любого измеримого множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, выполнено неравенство*

$$\|s_\pm\|_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|(\varphi_r+c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_r+c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}}\,\|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\,, \tag{5.1}$$

где $c \in [-K_r, K_r]$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\|s_+\|_\infty}{\|s_-\|_\infty} = \frac{\|(\varphi_r+c)_+\|_\infty}{\|(\varphi_r+c)_-\|_\infty},$$

а $B^c_y := \{t \in [0,2\pi] : |\varphi_r(t)+c| > y\}$, *причем* $y = y(\beta)$ *выбрано так, что* $\mu B^c_{y(\beta)} = n\beta/m$.

Неравенство (5.1) *является точным на классе сплайнов, имеющих нули, с заданным отношением норм* $\|s_+\|_\infty/\|s_-\|_\infty$ *и обращается в равенство для сплайна* $s(t) := \varphi_{n,r}(t) + n^{-r}c$ *и множества*

$$B = B^c_{y(\beta)}(n) := \left\{t \in [0,2\pi] : |\varphi_{n,r}(nt) + n^{-r}c| > n^{-r}y(\beta)\right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in S_{n,r}$ с минимальным периодом $2\pi/m$, имеющий нули. Вследствие однородности (5.1) можно считать, что

$$E_0(s)_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Тогда в силу неравенства Тихомирова [17]

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{E_0(s)_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty} = 1.$$

Следовательно, для сплайна $s \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [14]. Согласно этой теореме функция $\varphi(t) := \varphi_{n,r}(t)$ является функцией сравнения для сплайна s. Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\pi/n$. Таким образом, s принадлежит $S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Поэтому в силу теоремы 1

$$\|s_\pm\|_\infty \le \frac{\|(\varphi_{n,r}+n^{-r}c)_\pm\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}+n^{-r}c\|_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{n}}\setminus B^c_{y(\beta)}(n)\right)}}\,\|s\|_{L_p\left(I^k_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}\,, \tag{5.2}$$

где $I^k_{\frac{2\pi}{m}} := \left(\dfrac{2\pi}{m}k, \dfrac{2\pi}{m}(k+1)\right]$, $k = 0,\ldots,m-1$. Заметим, что в силу равенства $E_0(s)_\infty =$ $= \|\varphi_{n,r}\|_\infty$ и определения константы c

$$\|s_\pm\|_\infty = \|(\varphi_{n,r}+n^{-r}c)_\pm\|_\infty = n^{-r}\|(\varphi_r+c)_\pm\|_\infty. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$\|s\|^p_{L_p\left(I^k_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)} \ge \|\varphi_{n,r}+n^{-r}c\|^p_{L_p\left(I_{\frac{2\pi}{n}}\setminus B^c_{y(\beta)}(n)\right)} = n^{-(rp+1)}\|\varphi_r+c\|^p_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)}\right)}.$$

Суммируя эти неравенства по $k = 0,1,\ldots,m-1$ и возводя обе части полученного неравенства в степень $1/p$, имеем

$$\|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge n^{-r}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/p}\|\varphi_r+c\|_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)}\right)}.$$

Из последнего неравенства и равенства (5.3) следует (5.1).

Теорема 4 доказана.

Применяя соотношение (2.8) и полагая в нем $\varphi(t) = \varphi_r(t)$, а также учитывая определение (2.7), получаем такое следствие.

***Следствие* 4.** *В условиях теоремы* 4 *для сплайнов* $s \in S_{n,r}$ *с минимальным периодом* $2\pi/m$ *имеют место неравенства*

$$E_0(s)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{K_r}{E_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^m)}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\,, \qquad p \ge 1,$$

и

$$E_0^{\pm}(s)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{2K_r}{\|\varphi_r + K_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^m)}} E_0^{\pm}(s)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)},$$

где $B^m = \left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n\beta}{2m}, \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{n\beta}{2m}\right]$, *а для сплайнов* $s \in S_{n,r}$ *с минимальным периодом* $2\pi/m$, *имеющих нули, выполнено неравенство*

$$\|s\|_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \sup_{c\colon\ |c| \le K_r} \frac{\|\varphi_r + c\|_\infty}{\|\varphi_r + c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\,.$$

***Замечание* 4.** Первое из неравенств доказано в [10], а два других (при $\beta = 0$ и $m = 1$) — в [15].

Литература

1. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263 – 280 (1999).
2. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969 – 984 (2011).
3. E. Remes, *Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef*, Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. т-ва, сер. 4, **13**, вип. 1, 93 – 95 (1936).
4. M. I. Ganzburg, *On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials*, J. Approxim. Theory, **164**, 1233 – 1237 (2012).
5. E. Nursultanov, C. Tikhonov, *A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials*, Constr. Approxim., **38**, 101 – 132 (2013).
6. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer, New York (1995).
7. M. I. Ganzburg, *Polynomial inequalities on measurable sets and their applications*, Constr. Approxim., **17**, 275 – 306 (2001).
8. S. Tikhonov, P. Yuditski, *Sharp Remez inequality* // https://www.researchgate.net/publication/327905401.
9. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **68**, № 2, 227 – 240 (2016).
10. А. Е. Гайдабура, В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **69**, № 11, 1472 – 1485 (2017).
11. В. А. Кофанов, *Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций*, Укр. мат. журн., **67**, № 2, 207 – 212 (2015).
12. В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **69**, 2, 173 – 188 (2017).
13. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наукова думка, Киев (1992).
14. А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале*, Избр. труды. Математика, механика, Наука, Москва (1985), с. 252 – 263.
15. V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, *Comparison of rearrangements and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions*, Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov (Ed. B. Bojanov), Darba, Sofia (2002), p. 24 – 53.
16. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
17. В. М. Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*, Успехи мат. наук, **15**, вып. 3, 81 – 120 (1960).

Получено 01.02.20