DOI: 10.37863/umzh.v72i8.1028

УДК 519.21

О. К. Закусило, І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ РЕГЕНЕРУЮЧИХ ПРОЦЕСІВ

We establish the rate of convergence to the exponential distribution in the general limit theorem for the extreme values of regenerative processes. We also suggest some applications of this result to birth and death processes and queue length processes.

Встановлено швидкість збіжності до експоненціального розподілу в загальній граничній теоремі для екстремумів регенеруючих процесів. Наведено приклади застосувань отриманого результату до процесів народження та загибелі і процесів, які задають довжину черги.

1. Вступ. Основна теорема. Розглянемо регенеруючий випадковий процес (в.п.) $X(t),\ t \geq 0,$

$$X(t) = \xi_k(t - S_{k-1}) \quad \text{при} \quad t \in [S_{k-1}, S_k),$$

де $S_k = T_1 + \ldots + T_k,\ k \geq 1,\ S_0 = 0,\ \pounds_k = (T_k, \xi_k(t)),\ k \geq 1,$ — нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\pounds = (T, \xi(t)),\ T \geq 0,$ майже напевно (м.н.) (див., наприклад, [1], ч. II, гл. 2, [2], гл. 11, § 8). Звичайно точки S_k називають моментами регенерації, а проміжок $[S_{k-1}, S_k)$ — k-м періодом регенерації.

На в.п. $\xi_i(t)$ будемо накладати умову сепарабельності. Тоді сепарабельним буде і в.п. $X(t)$. Введемо в.п.

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s < t} X(s), \quad t \geq 0.$$

Однією з задач про асимптотичну поведінку $Z(t)$ є вивчення умов, за яких

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(\beta(t)(Z(t) - \alpha(t)) < x) = G(x), \tag{1}$$

де $G(x)$ — невироджена функція розподілу, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ — невипадкові функції. Так, на основі класичної теорії екстремальних значень незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) у ряді робіт (див., наприклад, огляд [3]) вивчались екстремальні значення довжини черги та часу чекання в черзі для систем масового обслуговування (СМО). Аналогічні задачі ставились і для процесів народження та загибелі [4].

Але в багатьох важливих випадках рівності типу (1) не мають місця, тобто при лінійних нормуваннях для $Z(t)$ не існує невиродженого граничного розподілу. Тому у статті [5] запропоновано дещо інший підхід до подібних задач.

Введемо послідовність н.о.р.в.в.

$$Z_k = \sup_{S_{k-1} \leq s < S_k} X(s), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Будемо вважати, що для всіх $u \in \mathbf{R}$

$$q(u) = \mathbf{P}(Z_k \geq u) > 0 \quad \text{і} \quad q(u) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad u \uparrow \infty,$$

тобто Z_k — м.н. скінченна та необмежена випадкова величина (в.в.)

Нехай $a = \mathbf{E}T_k < \infty$. У роботі [5] для досить широких класів регенеруючих в.п. було встановлено асимптотичну рівність

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left(Z\left(t^*\right) \geq u\right) = 1 - \exp(-x) \quad \forall x > 0, \tag{2}$$

де

$$t^* = t^*(x,u) = xa/q(u).$$

Також було наведено приклади, для яких величини a та $q(u)$ знаходяться конструктивно.

У даній роботі вивчається швидкість збіжності у співвідношенні (2). Крім того, ми розглянемо кілька застосувань до процесів народження та загибелі і процесів, які задають довжину черги в СМО.

Введемо деякі необхідні для подальшого викладу позначення. Нехай T_k^- — довжини циклів, на яких відбулася подія $\{Z_k < u\}$ (цикли типу 1),

$$F^-(x) = \mathbf{P}\left(T_k^- < x\right) = \mathbf{P}\left(T_k < x / Z_k < u\right),$$

$$a^- = \int\limits_0^\infty x dF^-(x), \quad a_2^- = \int\limits_0^\infty x^2 dF^-(x).$$

Аналогічні позначення

$$T_k^+, \quad F^+(x), \quad a^+, \quad a_2^+$$

віднесемо до циклів 2-го типу, на яких відбулася протилежна подія $\{Z_k \geq u\}$.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $x > 0,\ t^*$ *означено після рівності* (2),

$$\Delta^*(x) = \mathbf{P}\left(Z\left(t^*\right) \geq u\right) - 1 + \exp(-x)$$

і

$$\mathbf{E}T^2 = a_2 < \infty. \tag{3}$$

Тоді

$$\sup_{x\geq 0} |\Delta^*(x)| \leq \kappa^*(q(u)), \tag{4}$$

де

$$\kappa^*(q(u)) = \left(1 + e^{-1}\right) \frac{|a - a^-|}{a^-} + C^* q(u) \ln \frac{1}{q(u)} + O(q(u)),$$

$$C^* = (\pi)^{-1}(1+\delta)\left(1 + a_2/2a^2\right), \quad \delta > 0.$$

Важливим кроком на шляху доведення теореми 1 є таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $x > 0,\ \hat{t} = \hat{t}(x, u) = xa^{-}/q(u)$,

$$\hat{\Delta}(x) = \mathbf{P}(Z(\hat{t}) \geq u) - 1 + \exp(-x)$$

і виконується умова (3).

Тоді

$$\sup_{x \geq 0} \left| \hat{\Delta}(x) \right| \leq \hat{\kappa}(q(u)), \tag{5}$$

де

$$\hat{\kappa}(q(u)) = \frac{a^{+}}{a^{-}}\, q(u) + \hat{C} q(u) \ln \frac{1}{q(u)} + O(q(u)), \tag{6}$$

$$\hat{C} = (\pi)^{-1}(1 + \delta) \left(1 + a_2^{-}/2 \left(a^{-}\right)^2\right), \quad \delta > 0.$$

2. Допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *— функції розподілу, а*

$$\varphi_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) dF_1(x) \quad i \quad \varphi_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) dF_2(x)$$

— відповідні характеристичні функції. Крім того, нехай для деякого $K > 0$ *та будь-яких* $x, y \in R$

$$|F_2(x) - F_2(y)| \leq K|x - y|. \tag{7}$$

Тоді

$$\sup_{x \in R} |F_1(x) - F_2(x)| \leq b \int\limits_{-\Lambda}^{+\Lambda} \left| \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{t} \right| dt + \frac{Kbc^2(b)}{\Lambda}, \quad \Lambda > 0, \quad b > (2\pi)^{-1}, \tag{8}$$

де $c(b)$ *— додатна стала, яка залежить лише від* b.

Ця лема є наслідком узагальненої теореми Ессена (див. [6], гл. 5, § 1, теорема 1).

Для наших цілей важливим є випадок стандартного експоненціального розподілу, $F_2(x) = 1 - \exp(-x),\ x \geq 0$. Для нього виконується умова (7) з $K = 1$, а $\varphi_2(t) = \dfrac{1}{1 - it}$. Крім того, якщо $F_1(0) = 0$, то нерівність (8) набирає вигляду

$$\sup_{x \geq 0} |F_1(x) - 1 + \exp(-x)| \leq b \int\limits_{-\Lambda}^{+\Lambda} \left| \frac{\varphi_1(t) - \dfrac{1}{1 - it}}{t} \right| dt + \frac{bc^2(b)}{\Lambda}. \tag{9}$$

Нехай $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — послідовність додатних н.о.р.в.в., ν — геометрично розподілена в.в., незалежна від послідовності (ζ_i),

$$\mathbf{P}(\nu = k) = q(1 - q)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < q < 1.$$

Покладемо

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_k, \quad \Delta_0(x) = \mathbf{P}(qS_\nu < x) - 1 + \exp(-x).$$

Наступна лема бере свій початок у роботі Реньї [7] (див. також [8], [9], гл. 8, § 1).

Лема 2. *Якщо* $\mathbf{E}\zeta = 1$ *і* $\mathbf{E}\zeta^2 = \beta_2 < \infty$, *то*

$$\sup_{x\geq 0} |\Delta_0(x)| \leq \kappa_0(q), \tag{10}$$

$$\kappa_0(q) = C_0 q \ln \frac{1}{q} + O(q), \tag{11}$$

де C_0 *можна вибрати у вигляді* $C_0 = (\pi)^{-1}(1+\delta)(1+\beta_2/2),\ \delta > 0$.

Доведення. Нехай $\psi(t) = \mathbf{E}\exp(it\zeta)$ — характеристична функція в.в. ζ. Оскільки в.в. ν та послідовність (ζ_i) незалежні, то

$$\varphi(t) = \mathbf{E}\exp(itS_\nu) = \frac{q\psi(t)}{1-(1-q)\psi(t)}.$$

Тоді

$$\varphi(qt) = \frac{q\psi(qt)}{1-(1-q)\psi(qt)}$$

— характеристична функція в.в. qS_ν. З останньої рівності та нерівності (9) отримуємо

$$\sup_{x\geq 0} |\Delta_0(x)| \leq b \int\limits_{-\Lambda}^{+\Lambda} \left| \frac{q\psi(qt)}{1-(1-q)\psi(qt)} - \frac{1}{1-it} \right| \frac{dt}{|t|} + \frac{bc^2(b)}{\Lambda}. \tag{12}$$

Щоб оцінити інтеграл в (12), покладемо

$$L(q,t) = \left| \frac{q\psi(qt)}{1-(1-q)\psi(qt)} - \frac{1}{1-it} \right|.$$

Як відомо, в умовах леми 2 має місце зображення

$$\psi(t) = 1 + it - \frac{\beta_2}{2}\, t^2\theta, \quad \theta = \theta(t), \quad |\theta| \leq 1, \tag{13}$$

а отже, згідно з рівністю (13) маємо

$$L(q,t) = \left| \frac{q\left(1 + iqt - \dfrac{\beta_2}{2}\, q^2t^2\theta\right)}{1-(1-q)\left(1 + iqt - \dfrac{\beta_2}{2}\, q^2t^2\theta\right)} - \frac{1}{1-it} \right| =$$

$$= \left| \frac{1 + iqt - \dfrac{\beta_2}{2}\, q^2t^2\theta}{1 - it(1-q) + \dfrac{\beta_2}{2}\, q(1-q)t^2\theta} - \frac{1}{1-it} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{qt^2\left(1 + \dfrac{\beta_2}{2}\,(iqt-1)\theta\right)}{\sqrt{1+t^2}\left(1 - it(1-q) + \dfrac{\beta_2}{2}\, q(1-q)t^2\theta\right)} \right|. \tag{14}$$

Далі виберемо довільне мале $\delta \in (0,1)$ і позначимо $C = 2\delta/\beta_2,\ \Lambda = C/q$. Тоді

$$\left|1+\frac{\beta_2}{2}(iqt-1)\theta\right| \le 1+\frac{\beta_2}{2}(C+1) = 1+\delta+\frac{\beta_2}{2}. \tag{15}$$

Тепер при досить малих $q>0,\ \delta>0,\ t\neq 0$ оцінимо знизу знаменник у формулі (14). Оскільки $|\beta_2 qt/2| \le \delta$, то

$$\left|1+it(1-q)+\frac{\beta_2}{2}qt^2(1-q)\theta\right| = |t|(1-q)\left|i+\frac{1}{t(1-q)}+\frac{\beta_2}{2}qt\theta\right| \ge |t|(1-q). \tag{16}$$

Із нерівностей (14)–(16) одержуємо

$$L(q,t) \le \frac{C_1 q|t|}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{17}$$

де $C_1 = \dfrac{1+\delta+\dfrac{\beta_2}{2}}{1-q}$.

Нерівність (17) дозволяє оцінити зверху інтеграл у (12). Маємо

$$\int\limits_{1\le|t|\le\Lambda} \frac{L(q,t)}{|t|}\,dt \le 2C_1 q\int\limits_1^{C/q}\frac{dt}{t} = 2C_1 q\ln\frac{1}{q}+O(q) \tag{18}$$

і

$$\int\limits_{|t|\le 1} \frac{L(q,t)}{|t|}\,dt \le 2C_1 q\int\limits_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2C_1 q. \tag{19}$$

Із (18), (19) безпосередньо випливає оцінка

$$\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{L(q,t)}{|t|}\,dt \le 2C_1 q\ln\frac{1}{q}+O(q). \tag{20}$$

Виберемо досить мале $\delta>0$ і покладемо $b=(2\pi)^{-1}(1+\delta)$. Оскільки останній доданок у нерівності (12) обмежений величиною $bc^2(b)q/C$, то разом із (20) це і дає оцінки (10), (11).

Лему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** У роботі [8] розглядався більш загальний випадок, коли у в.в. ζ існує момент s-го порядку, $1<s\le 2$. Оцінка (10) дещо уточнює відповідну оцінку із [8] при $s=2$.

Далі вважаємо, що $\sum_{k=1}^{m-1} = 0$ при $m=1$.

Лема 3. *В умовах леми* 2

$$\left|\mathbf{P}(qS_\nu<x)-\mathbf{P}\left(q\sum_{k=1}^{\nu-1}\zeta_k<x\right)\right| \le q \quad \forall x\ge 0. \tag{21}$$

Нерівність (21) доводиться легко. Дійсно,

$$\mathbf{P}\left(q\sum_{k=1}^{\nu-1}\zeta_k<x\right) = \sum_{m=1}^{\infty} q(1-q)^{m-1}\mathbf{P}\left(q\sum_{k=1}^{m-1}\zeta_k<x\right) =$$

$$= q + \sum_{m=2}^{\infty} q(1-q)^{m-1} \mathbf{P} \left(q \sum_{k=1}^{m-1} \zeta_k < x \right) =$$

$$= q + (1-q) \sum_{m=1}^{\infty} q(1-q)^{m-1} \mathbf{P} \left(q \sum_{k=1}^{m} \zeta_k < x \right) = q + (1-q)\mathbf{P}(qS_\nu < x).$$

Звідси і отримуємо (21).

***Зауваження* 2.** Припустимо, що в умовах леми 2 в.в. ζ має експоненціальний розподіл з параметром λ:

$$\mathbf{P}(\zeta < x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad \text{i} \quad \psi(t) = \frac{1}{1 - it/\lambda}.$$

Тоді $\varphi(qt) = \dfrac{1}{1 - it/\lambda}$ і

$$\mathbf{P}(qS_\nu < x) = 1 - \exp(-\lambda x), \tag{22}$$

$$\mathbf{P} \left(q \sum_{k=1}^{\nu-1} \zeta_k < x \right) = q + (1-q)(1 - \exp(-\lambda x). \tag{23}$$

Лема 4. *Нехай* $d(x) = \exp(-ax/a^-) - \exp(-x)$. *Тоді в умовах теореми* 1

$$\sup_{x \geq 0} |d(x)| \leq \kappa_1(q(u))), \tag{24}$$

де

$$\kappa_1(q(u)) = e^{-1} q(u) \frac{|a^+ - a^-|}{\min(a^-, a)}.$$

Доведення. Безпосередньо з означення величин a^+, a^- маємо

$$a = \mathbf{E} T_k I(Z_k < u) + \mathbf{E} T_k I(Z_k \geq u) = (1 - q(u))a^- + q(u)a^+, \tag{25}$$

де $I(A)$ — індикатор випадкової події A.

З останніх рівностей та елементарної оцінки

$$x \exp(-x) \leq e^{-1}, \quad x \geq 0,$$

при $a \geq a^-$ отримуємо

$$|d(x)| = \exp(-x) \left| 1 - \exp \left(-q(u)x \left(\frac{a^+}{a^-} - 1 \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq x \exp(-x) q(u) \left(\frac{a^+}{a^-} - 1 \right) \leq e^{-1} q(u) \frac{a^+ - a^-}{a^-}. \tag{26}$$

Так само розглядаємо випадок $a < a^-$:

$$|d(x)| \leq \exp\left(-\frac{ax}{a^-} \right) \left| 1 - \exp \left(-x \left(1 - \frac{a}{a^-} \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{ax}{a^-} \exp\left(-\frac{ax}{a^-} \right) \frac{a^-}{a} \left| 1 - \frac{a}{a^-} \right| \leq e^{-1} q(u) \frac{|a^+ - a^-|}{a}. \tag{27}$$

Зрозуміло, що нерівність (24) — це простий наслідок із (26) і (27).

Лему 4 доведено.

3. Доведення твердження 1. Введемо позначення

$$\epsilon_k(u) = I(Z_k \geq u),$$
$$\nu(u) = \min(k \geq 1 \colon \epsilon_k(u) = 1).$$

Для циклів 2-го типу покладемо

$$\eta_k = \inf(t \geq 0 \colon \xi_k(t) \geq u), \quad \hat{a} = \mathbf{E}\left(\eta_k / \epsilon_k(u) = 1\right),$$

тобто $\hat{a}$ — це середній час досягнення рівня u на циклах 2-го типу. Нехай

$$\hat{T}_k = \left\{ \begin{array}{cc} \eta_k & \text{при} \quad \epsilon_k(u) = 1, \\ T_k & \text{у противному разі} \end{array} \right\}.$$

Випадкові події

$$(Z(t) \geq u) \quad \text{і} \quad \left(\sum_{k=1}^{\nu(u)} \hat{T}_k \leq t\right)$$

еквівалентні (див. [5]), тому

$$\mathbf{P}\left(Z\left(\hat{t}\right) \geq u\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\nu(u)} \hat{T}_k \leq \hat{t}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)} \hat{T}_k \leq x\right). \tag{28}$$

Далі через $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots$ будемо позначати послідовність н.о.р.в.в., які мають стандартний експоненціальний розподіл, $\mathbf{P}(\tau < x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$. Вважаємо, що послідовність (τ_i) не залежить від процесу $X(t)$.

Крім того, нехай при $x \geq 0$

$$\Delta_1(x) = \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)} \hat{T}_k \leq x\right) - \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k + \frac{q(u)}{a^-} \hat{T}_{\nu(u)} \leq x\right),$$

$$\Delta_2(x) = \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k + \frac{q(u)}{a^-} \hat{T}_{\nu(u)} \leq x\right) - \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)} \tau_k \leq x\right).$$

Враховуючи рівність (22), одержуємо

$$|\hat{\Delta}(x)| \leq |\Delta_1(x)| + |\Delta_2(x)| \quad \forall x \geq 0. \tag{29}$$

Таким чином, нам необхідно оцінити доданки у правій частині нерівності (29).

Почнемо з першого. Безпосередньо з означення випливає рівність розподілів

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \hat{T}_k \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^-$$

і

$$\hat{T}_{\nu(u)} \stackrel{\text{df}}{=} \eta_{\nu(u)},$$

причому якщо в.в. $\nu(u)$ і $\hat{T}_k$ в загальному випадку залежні, то $\nu(u)$ і T_k^-, $k = 1, 2, \ldots, \nu(u)-1$, будуть незалежними. Також в.в. $\eta_{\nu(u)}$ не буде залежати від суми $\sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^-$. Тому при $x \geq 0$

$$|\Delta_1(x)| = \left| \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^- + \frac{q(u)}{a^-} \eta_{\nu(u)} \leq x \right) - \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k + \frac{q(u)}{a^-}\, \eta_{\nu(u)} \leq x \right) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^x \left| \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^- \leq x - y \right) - \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k \leq x - y \right) \right| d\mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-}\, \eta_{\nu(u)} < y \right). \tag{30}$$

Далі розглянемо підінтегральний вираз у (30). При $v \geq 0$ маємо

$$\left| \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^- \leq v \right) - \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k \leq v \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^- \leq v \right) - \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^- \leq v \right) \right| +$$

$$+ \left| \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-} \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^- \leq v \right) - 1 + \exp(-v) \right| +$$

$$+ \left| \mathbf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k \leq v \right) - 1 + \exp(-v) \right|. \tag{31}$$

Перший доданок у правій частині нерівності (31) за лемою 3 не перевищує $q(u)$. Другий доданок, згідно з лемою 2, оцінюється величиною

$$\kappa_0(q(u)) = \hat{C} q(u) \ln \frac{1}{q(u)} + O(q(u)),$$

константа $\hat{C}$ визначена у твердженні 1. Нарешті останній доданок менший, ніж $q(u)\exp(-v) \leq$ $\leq q(u)$ (див. зауваження 2, рівність (23)).

Таким чином, із наведених вище оцінок одержуємо

$$\sup_{x \geq 0} |\Delta_1(x)| \leq \hat{C} q(u) \ln \frac{1}{q(u)} + O(q(u)). \tag{32}$$

Залишилося оцінити зверху $|\Delta_2(x)|$. Ще раз використовуючи рівність (23), неважко знайти при $y > 0$ похідну функції розподілу в.в.

$$\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \tau_k \right) : f(y) = (1 - q(u)) \exp(-y).$$

Тоді для $x \geq 0$

$$|\Delta_2(x)| = \left|\mathbf{P}\left(q(u)\sum_{k=1}^{\nu(u)-1}\tau_k + \frac{q(u)}{a^-}\,\eta_{\nu(u)} \le x\right) - \mathbf{P}\left(q(u)\sum_{k=1}^{\nu(u)-1}\tau_k + q(u)\tau_{\nu(u)} \le x\right)\right| \le$$

$$\le (1-q(u))\int\limits_0^x \left|\mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-}\,\eta_{\nu(u)} \le x-y\right) - \mathbf{P}\left(q(u)\tau_{\nu(u)} \le x-y\right)\right|\exp(-y)dy + q(u) \le$$

$$\le (1-q(u))\int\limits_0^\infty \left|\mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-}\,\eta_{\nu(u)} \ge v\right) + \mathbf{P}\left(q(u)\tau_{\nu(u)} \ge v\right)\right| dv + q(u) =$$

$$= (1-q(u))q(u)\left(\frac{\mathbf{E}\eta_{\nu(u)}}{a^-} + \mathbf{E}\tau\right) + q(u) \le q(u)\left(\frac{\hat{a}}{a^-} + 2\right). \qquad (33)$$

З оцінок (29), (32) і (33) отримуємо

$$\sup_{x\ge 0}\left|\hat{\Delta}(x)\right| \le \frac{\hat{a}}{a^-}\,q(u) + \hat{C}q(u)\ln\frac{1}{q(u)} + O(q(u)).$$

Оскільки $\hat{a} \le a^+$, то звідси випливають співвідношення (5), (6).

Твердження 1 доведено.

4. Доведення теореми 1. Так само, як і у випадку рівності (28), маємо

$$\mathbf{P}\left(Z\left(t^*\right) \ge u\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\nu(u)}\hat{T}_k \le t^*\right) = \mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-}\sum_{k=1}^{\nu(u)}\hat{T}_k \le \frac{xa}{a^-}\right).$$

Звідси та з нерівності трикутника випливає оцінка

$$|\Delta^*(x)| \le \left|\mathbf{P}\left(\frac{q(u)}{a^-}\sum_{k=1}^{\nu(u)}\hat{T}_k \le \frac{xa}{a^-}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{xa}{a^-}\right)\right| + \left|\exp\left(-\frac{xa}{a^-}\right) - \exp(-x)\right|. \qquad (34)$$

Згідно з твердженням 1, перший доданок у правій частині нерівності (34) не перевищує величини $\hat{\kappa}(q(u))$, яка задається формулою (6).

Другий доданок у (34) не перевищує $\kappa_1(q(u))$ (див. оцінку (24)). А оскільки $\hat{a} \le a^+$, то з оцінки (34) отримуємо

$$|\Delta^*(x)| \le \left(1 + e^{-1}\right)\frac{a^+}{a^-}\,q(u) + (\pi)^{-1}(1+\delta)\left(1 + a_2^-/2\left(a^-\right)^2\right)q(u)\ln\frac{1}{q(u)} + O(q(u)). \qquad (35)$$

Так само, як і (25), маємо рівняння для других моментів

$$a_2 = (1-q(u))a_2{}^- + q(u)a_2{}^+. \qquad (36)$$

Далі, із (25) та (36) неважко вивести нерівності

$$a^- \le \frac{a}{1-q(u)}, \quad a_2{}^- \le \frac{a_2}{1-q(u)}, \quad a^+ \le \sqrt{\frac{a_2}{q(u)}}$$

і

$$\left|a-a^-\right| = q(u)\left|a^+ - a^-\right| \leq \sqrt{a_2 q(u)} + \frac{aq(u)}{1-q(u)}.$$

Залишилося підставити їх у (35):

$$|\Delta^*(x)| \leq \left(1+e^{-1}\right)\frac{|a-a^-|}{a^-} + (\pi)^{-1}(1+\delta)\left(1+a_2/2a^2\right)q(u)\ln\frac{1}{q(u)} + O(q(u)).$$

Це і є нерівність (4).

Теорему 1 доведено.

5. Приклади.

Приклад **1.** *Процес народження та загибелі.* Розглянемо процес народження та загибелі $X(t)$ з параметрами

$$\lambda_0 > 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \lambda_n > 0, \quad \mu_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

де λ_n і μ_n — інтенсивності переходів зі стану n відповідно вгору та вниз (див. [11], гл. 7, § 6).

Нехай $X(0) = 0$ м.н. і покладемо

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_k = \prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad k \geq 1.$$

Будемо припускати, що виконуються співвідношення

$$\sum_{k\geq 1}\theta_k < \infty, \tag{38}$$

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\lambda_k\theta_k} = \infty. \tag{39}$$

Умови (38), (39), як відомо (див. [11, 13]), достатні для існування стаціонарних імовірностей станів

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(X(t)=k) = \lim_{t\to\infty}p_k(t) = p_k,$$

причому

$$p_k = \theta_k p_0, \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k\right)^{-1}. \tag{40}$$

Крім того, $X(t)$ буде регенеруючим процесом із моментами регенерації $S_0 = 0,\ S_1, S_2, \ldots.$ Тут S_k — це перший момент попадання у стан 0 після k-го виходу із нього, $T_k = S_k - S_{k-1}$ — довжина k-го циклу регенерації, $T_1 = T$.

Для того щоб застосувати теорему 1 для оцінки величини $\Delta^*(x)$ у даному прикладі, необхідно обчислити параметри

$$a = \mathbf{E}T, \quad a^- = \mathbf{E}T^-, \quad a_2 = \mathbf{E}T^2, \quad q(u).$$

У цьому та наступному прикладах вважаємо, що u — ціле додатне число. Відомо [5], що

$$a = \mathbf{E}T = \frac{1}{\lambda_0 p_0} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \tag{41}$$

і

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_k \theta_k} \right)^{-1}. \tag{42}$$

Для процесу народження та загибелі $X(t)$ будемо називати періодом зайнятості інтервал, який починається з переходу $0 \to 1$ і закінчується у момент першого після цього переходу $1 \to \to 0$. Довжини періодів зайнятості T^z є н.о.р.в.в., а самі періоди перемежовуються інтервалами, на яких $X(t) = 0$. Всі вказані періоди незалежні в сукупності, а тривалості перебування у стані 0 мають екпоненціальний розподіл із параметром λ_0.

Як і в теоремі 1, через T_k^- позначаємо довжини циклів 1-го типу (на яких процес $X(t)$ не досягає рівня u).

Лема 5. *Нехай $X(t)$ — процес народження та загибелі, для якого виконуються умови* (38), (39). *Тоді*

$$a^- = \mathbf{E}T_k^- = \frac{1}{\lambda_0} \left(\sum_{k=0}^{u-1} \theta_k - \frac{\theta_{u-1}\lambda_{u-1}}{\lambda_{u-1} + \mu_{u-1}} \right), \quad a - a^- = \frac{1}{\lambda_0} \left(\sum_{k=u}^{\infty} \theta_k + \frac{\theta_{u-1}\lambda_{u-1}}{\lambda_{u-1} + \mu_{u-1}} \right). \tag{43}$$

Доведення. Побудуємо новий „урізаний” процес народження та загибелі $\tilde{X}(t)$ із станами $0, 1, 2, \ldots, u-1$. Його параметри $\tilde{\lambda}_i$ і $\tilde{\mu}_i$ при $i < u-1$ збігаються з параметрами початкового процесу $X(t)$, а $\tilde{\lambda}_{u-1} = 0$, $\tilde{\mu}_{u-1} = \mu_{u-1} + \lambda_{u-1}$.

Так само для процесу $\tilde{X}(t)$ можна розглянути періоди, коли він знаходиться у стані 0 ($\tilde{T}^0$ — нульові періоди), та періоди, коли він перебуває у станах $1, 2, \ldots, u-1$ ($\tilde{T}^z$ — періоди зайнятості). І якщо $\tilde{T}$ — довжина циклу регенераціії процесу $\tilde{X}(t)$, то

$$T^- \stackrel{d}{=} \tilde{T} \stackrel{d}{=} \tilde{T}^0 + \tilde{T}^z.$$

Запис $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$ означає, що в.в. ξ_1, ξ_2 однаково розподілені.

Зрозуміло, що при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\tilde{T}^0 < x\right) = 1 - \exp(-\lambda_0 x), \quad \mathbf{E}\tilde{T}^0 = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Зауважимо, що періоди $\tilde{T}^z$ однаково розподілені, бо на початку такого періоду процес $\tilde{X}(t)$ знаходиться у стані 1, а в кінці переходить у стан 0. Окрім того, внаслідок марковості процесу $\tilde{X}(t)$ як перші, так і другі періоди незалежні.

Нехай

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\tilde{X}(t) = 0\right) = \tilde{p}_0.$$

Тоді, як і в рівності (41), маємо

$$\tilde{p}_0 = \frac{\mathbf{E}\tilde{T}^0}{\mathbf{E}\tilde{T}} = \frac{1}{\lambda_0 a^-}. \tag{44}$$

З іншого боку, відомо, що

$$\tilde{p}_0 = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \tilde{\theta}_k\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \theta_k - \frac{\theta_{u-1}\lambda_{u-1}}{\lambda_{u-1} + \mu_{u-1}}\right)^{-1}. \tag{45}$$

Із (44), (45) одержуємо формулу для a^- із рівності (43). Звідси та з (41) випливає і формула для $a - a^-$.

Лему 5 доведено.

Перейдемо до обчислення моментів періоду зайнятості процесу $X(t)$. В подальшому постійно фігуруватимуть рекурентні рівняння

$$x_k = c_k + b_k x_{k+1}, \quad k \geq 1, \tag{46}$$

де $x_k > 0,\ c_k > 0,\ b_k > 0$.

Лема 6. *Всі x_k із рівняння* (46) *одночасно або скінченні, або нескінченні. При цьому мінімальний розв'язок має вигляд*

$$x_k = c_k + c_{k+1} b_k + c_{k+2} b_{k+1} b_k + \ldots = \sum_{i=k}^{\infty} c_i \prod_{j=k}^{i-1} b_j, \tag{47}$$

де $\prod_{j=k}^{k-1} b_j \equiv 1$.

Безпосередньою підстановкою x_k із формули (47) у рекурентне співвідношення (46) переконуємось, що лема 6 є правильною.

Крім рівностей (46), (47) будемо розглядати вирази $I(A)\xi$, де $I(A)$ — індикатор випадкової події A, $I(A)$ та ξ — незалежні в.в. Нехай $\mathbf{P}(A) = p$. Тоді неважко перевірити рівності

$$\mathbf{E} I(A)\xi = p\mathbf{E}\xi, \quad \mathbf{D} I(A)\xi = p\mathbf{D}\xi + p(1-p)(\mathbf{E}\xi)^2. \tag{48}$$

Введемо такі позначення: $I(i \to i+1)$ — індикатор переходу $i \to i+1$, $T_{i,i-1}$ — тривалість переходу процесу $X(t)$ зі стану i в $i-1$, τ_i — тривалість перебування у стані i.

Основою обчислень буде рівність

$$T^z = T_{1,0} = \tau_1 + I(1 \to 2)\left(T_{2,1} + T'_{1,0}\right), \tag{49}$$

де всі випадкові величини у правих частинах рівностей (48) незалежні, а $T'_{1,0}$ є незалежною копією $T_{1,0}$.

Так само в загальному випадку маємо

$$T_{i,i-1} = \tau_i + I(i \to i+1)\left(T_{i+1,i} + T'_{i,i-1}\right), \quad i \geq 1, \tag{50}$$

де $T'_{i,i-1}$ — незалежна копія $T_{i,i-1}$.

Спочатку розглянемо випадок, коли процес $X(t)$ має скінченну множину станів: $0, 1, \ldots, N$. Тоді перехід $N \to N+1$ є неможливим, і покладаючи $\mathbf{E}T_{i,i-1} = m_{i,i-1}$, з рівностей (48)–(50) отримуємо

$$m_{N,N-1} = \frac{1}{\mu_N},$$

$$m_{N-1,N-2} = \frac{1}{\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}} + \frac{\lambda_{N-1}}{\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}}(m_{N,N-1}+m_{N-1,N-2}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{i,i-1} = \frac{1}{\mu_i+\lambda_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i}(m_{i+1,i}+m_{i,i-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{E}T^z = m_{1,0} = \frac{1}{\mu_1+\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1}(m_{2,1}+m_{1,0}),$$

або

$$m_{N,N-1}\mu_N = 1, \quad m_{i,i-1}\mu_i = 1 + m_{i+1,i}\lambda_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1. \tag{51}$$

З (51) послідовно одержуємо

$$\mathbf{E}T^z = m_{1,0} = \frac{1}{\mu_1}(1+\lambda_1 m_{2,1}) = \frac{1}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_2}(1+\lambda_2 m_{3,2})\right) = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \ldots + \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{N-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_N} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_N). \tag{52}$$

Тепер можна перейти до загального випадку, коли процес $X(t)$ має нескінченну множину станів, а параметри задаються рівностями (37).

Введемо „урізаний” процес народження та загибелі $\tilde{X}(t)$ із станами $0,1,2,\ldots,N$ і параметрами

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k \quad \text{при} \quad 0 \le k \le N-1, \quad \lambda_N = 0,$$
$$\tilde{\mu}_k = \mu_k \quad \text{при} \quad 0 \le k \le N-1, \quad \tilde{\mu}_N = \mu_N + \lambda_N,$$

причому процеси $X(t)$ та $\tilde{X}(t)$ задамо на одному ймовірнісному просторі таким чином.

Від моменту $L_0 = 0$ до першого моменту L_1, коли $X(t)$ попадає у стан $N+1$, їхні траєкторії збігаються. Але в момент L_1 процес $\tilde{X}(t)$ переходить у стан $N-1$. Після моменту L_1 вони, як процеси народження та загибелі, рухаються незалежно до моменту L_2 нової їхньої зустрічі.

Якщо в момент L_2 процес $X(t)$ робить перехід вниз: $k+1 \to k$, а $\tilde{X}(L_2) = k$, то $X(t)$ перебуває в стані k разом з $\tilde{X}(t)$ протягом його залишкового часу. Далі їхні траєкторії збігаються до моменту L_3, коли $X(t)$ знову переходить у стан $N+1$.

Якщо ж у момент L_2 процес $\tilde{X}(t)$ робить перехід вгору: $k-1 \to k$, а $X(L_2) = k$, то $\tilde{X}(t)$ знаходиться у стані k разом з $X(t)$ протягом його залишкового часу, і т. д.

Оскільки залишковий час для експоненціальної в.в. τ_k задовольняє рівність

$$\mathbf{P}(\tau_k > t+s/\tau_k > t) = \mathbf{P}(\tau_k > s),$$

то наведена конструкція дасть відповідні процеси народження та загибелі $X(t)$ і $\tilde{X}(t)$. Крім того, за побудовою для них м.н.

$$\tilde{T}^z \le T^z,$$

$$\tilde{T}^z \uparrow T^z \quad \text{при} \quad N \uparrow \infty,$$

де T^z і $\tilde{T}^z$ — довжини періодів зайнятості процесів $X(t)$ і $\tilde{X}(t)$ відповідно.

Тоді при $N \to \infty$

$$\mathbf{E}\tilde{T}^z \to \mathbf{E}T^z, \quad \mathbf{D}\tilde{T}^z \to \mathbf{D}T^z. \tag{53}$$

Звідси та з (52) для процесу народження та загибелі $X(t)$ із нескінченною множиною станів маємо

$$\mathbf{E}T^z = m_{1,0} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{p_0} - 1\right).$$

Повторюючи міркування, наведені вище, із системи рівностей (51) та асимптотичних співвідношень (53) виводимо формули для середнього часу переходу $k \to k-1$:

$$m_{k,k-1} = \sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\mu_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{\lambda_j}{\mu_j}, \quad k \ge 1. \tag{54}$$

Залишилось обчислити дисперсію періоду зайнятості $\mathbf{D}T^z$. Покладемо $\mathbf{D}T_{i,i-1} = D_{i,i-1}$. З рівностей (48) – (50) отримуємо

$$D_{i,i-1} = \mathbf{D}\tau_i + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}(D_{i+1,i} + D_{i,i-1}) + \frac{\lambda_i\mu_i}{(\mu_i + \lambda_i)^2}\,(m_{i+1,i} + m_{i,i-1})^2,$$

або

$$D_{i,i-1} = \frac{1}{\mu_i\,(\mu_i + \lambda_i)} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}\,(m_{i+1,i} + m_{i,i-1})^2 + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\,D_{i+1,i}.$$

Ще раз використовуючи перехід до „урізаного” процесу $\tilde{X}(t)$, а потім асимптотичні співвідношення (53), переконуємось, що $D_{k,k-1}$ визначається правою частиною рівності (47) з

$$c_i = \frac{1}{\mu_i(\mu_i + \lambda_i)} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}\,(m_{i+1,i} + m_{i,i-1})^2, \quad b_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j}.$$

Наприклад, для $\mathbf{D}T^z$ маємо формулу

$$\mathbf{D}T^z = D_{1,0} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_i(\mu_i + \lambda_i)} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}\,(m_{i+1,i} + m_{i,i-1})^2\right)\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\lambda_j}{\mu_j}. \tag{55}$$

Оскільки $\mathbf{E}T^z = m_{1,0}$ знайдено вище, то $m_{i+1,i}$ тут можна обчислити рекурентно згідно з рівністю (51).

Через $\mathbf{D}T^z$ вже неважко знайти другий момент тривалості циклу регенерації для процесу $X(t)$:

$$a_2 = \mathbf{E}T^2 = \mathbf{D}T^z + \mathbf{D}\tau_0 + (\mathbf{E}T)^2 = \mathbf{D}T^z + \frac{1}{(\lambda_0)^2}\left(\frac{1}{p_0^2} + 1\right).$$

Збираючи наведені вище формули для моментів T^z, із теореми 1 та леми 5 отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $X(t)$ — *процес народження та загибелі, який задовольняє умови* (38), (39), $X(0) = 0$. *Тоді виконується оцінка* (4) *з*

$$\kappa^*(q(u)) = \left(1 + e^{-1}\right) \frac{\sum_{k=u-1}^{\infty} \theta_k}{\sum_{k=0}^{u-2} \theta_k} + C^* q(u) \ln \frac{1}{q(u)} + O(q(u)), \tag{56}$$

де

$$C^* = (\pi)^{-1}(1+\delta)\left(1 + a_2/2a^2\right) = (2\pi)^{-1}(1+\delta)\left(3 + p_0^2\left(\lambda_0^2 \mathbf{D}T^z + 1\right)\right), \quad \delta > 0,$$

$q(u)$ *та* $\mathbf{D}T^z$ *задаються формулами* (42) *та* (55) *відповідно.*

***Приклад* 2.** *Довжина черги в СМО M/M/s.* $1 \le s < \infty$. Розглянемо s-канальну СМО, на яку надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування ξ має експоненціальний розподіл (див. [10, 12])

$$\mathbf{P}(\xi < x) = 1 - \exp(-\mu x).$$

Вважаємо, що параметри λ та μ задовольняють умову

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1. \tag{57}$$

Нехай в момент $S_0 = 0$ система порожня, а S_1 — це момент звільнення системи після 1-го періоду зайнятості. Відповідно S_k — це момент звільнення системи після k-го періоду зайнятості.

Під довжиною черги будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або очікують його. Через $Q(t)$ позначимо довжину черги в момент часу t, а $\bar{Q}(t) = \sup_{0 \le s < t} Q(s)$.

Тоді процес $Q(t)$ — це регенеруючий процес з моментами регенерації (S_k), $T_k = S_k - S_{k-1}$ — тривалість k-го періоду регенерації, $T_1 = T$.

Більше того, відомо [11, с. 219, 220], що $Q(t)$ буде процесом загибелі та розмноження з параметрами

$$\lambda_k = \lambda \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_0 = 0 \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{при} \quad 1 \le k \le s, \\ s\mu & \text{при} \quad k > s. \end{cases}$$

Якщо нерівність (57) виконується, то процес $Q(t)$ задовольняє умови (38), (39). Таким чином, для оцінки величини $\Delta^*(x)$ у даному прикладі можна скористатися твердженням 2. Залишилось оцінити відповідні параметри у рівності (56) для випадку СМО $M/M/s$.

Відомо [10, 12], що за умови (57) для процесу $Q(t)$ існують стаціонарні ймовірності, причому

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)} \right)^{-1}, \tag{58}$$

і для досить великих u

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{k!}{(s\rho)^k} + \frac{s!((1/\rho)^u - (1/\rho)^{s+1})}{s^s(1/\rho - 1)} \right)^{-1} \sim (1/\rho - 1) \frac{s^s \rho^u}{s!} \tag{59}$$

(див. [5]).

На наступному кроці оцінимо перший доданок у правій частині рівності (56). Елементарними обчисленнями отримуємо

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{s^k \rho^k}{k!} & \text{при} \quad 1 \le k \le s, \\ \dfrac{s^s \rho^k}{s!} & \text{при} \quad k > s. \end{cases}$$

Оскільки $s^k/k! \le s^s/s!$ при $1 \le k \le s$, то

$$\sum_{k=u}^{\infty} \theta_k \le \frac{s^s}{s!} \sum_{k=u}^{\infty} \rho^k = \frac{s^s}{s!(1-\rho)} \rho^u = O\left(\rho^u\right). \tag{60}$$

І нарешті знайдемо конструктивну оцінку для величини $\mathbf{D}T^z$ із рівності (55). У відповідності з формулою (53)

$$m_{k,k-1} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{s\mu} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1}{s\mu(1-\rho)} \quad \text{при} \quad k \ge s. \tag{61}$$

Для обчислення величини $m_{k,k-1}$ при $1 \le k < s$ слід скористатися рекурентною формулою

$$m_{k,k-1} = \frac{1}{k\mu} \left(1 + \lambda m_{k+1,k}\right)$$

та рівністю (61).

Таким чином,

$$\mathbf{D}T^z = A_1 + A_2, \tag{62}$$

де

$$A_1 = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{k\mu + \lambda} \left(\frac{1}{k\mu} + \lambda \left(m_{k+1,k} + m_{k,k-1}\right)^2 \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \right) \rho^{k-1},$$

$$A_2 = \sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s\mu(s\mu + \lambda)} + \frac{\lambda}{s\mu + \lambda} \frac{4}{(s\mu)^2(1-\rho)^2} \right) \rho^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{s\mu(s\mu + \lambda)} \left(1 + \frac{4\lambda}{s\mu(1-\rho)^2} \right) \frac{\rho^s}{1-\rho}.$$

Із наведених вище оцінок та твердження 2 випливає таке твердження.

Твердження 3. *Нехай для СМО* $M/M/s$, $1 \le s < \infty$, *виконується умова* (57) *і*

$$Q(0) = 0 \quad \textit{м.н.}, \quad x > 0, \quad t^* = t^*(x,u) = \frac{x}{\lambda p_0 q(u)},$$

$$\Delta^*(x) = \mathbf{P}\left(\bar{Q}\left(t^*\right) \geq u\right) - 1 + \exp(-x).$$

Тоді

$$\sup_{x \geq 0} |\Delta^*(x)| \leq C^* \frac{s^s}{s!} \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \left(\ln \frac{1}{\rho}\right) u\rho^u + O\left(\rho^u\right), \tag{63}$$

де $C^* = (2\pi)^{-1}(1+\delta)\left(3 + p_0\left(\lambda^2 \mathbf{D}T^z + 1\right)\right)$, $\delta > 0$, *а* p_0, $q(u)$ *і* $\mathbf{D}T^z$ *задаються формулами* (58), (59) *і* (62).

***Зауваження* 3.** Для одноканальної СМО (при $s = 1$) величини p_0 і $\mathbf{D}T^z$ обчислюються легко (див. [10], гл. 4, § 8):

$$p_0 = 1 - \rho, \quad \mathbf{D}T^z = \frac{\mu + \lambda}{(\mu - \lambda)^3}.$$

***Зауваження* 4.** У статті [14] для СМО $M/M/1$ оцінка вигляду

$$|\Delta^*(x)| \leq Kuq(u) \tag{64}$$

досліджувалась за допомогою імітаційного моделювання. У випадку $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $u = 2, 3, \ldots, 10$ виявилось, що оцінка (64) виконується при $K = 0,3$.

Зазначимо, що із твердження 3 маємо

$$K \approx C^* \ln \frac{1}{\rho} = (\pi)^{-1}(1+\delta)\left(1 + a_2/2a^2\right) \ln 2 \approx 0,42(1+\delta).$$

Таким чином, величина C^* у теоремі 1 для випадку СМО $M/M/1$ мало відрізняється від відповідної сталої, отриманої методом Монте-Карло (слід врахувати, що C^* у теоремі 1 знайдено у значно більш загальному випадку).

***Зауваження* 5.** Для СМО $M/M/\infty$ (нескінченне число каналів, $s = \infty$), $\lambda_k = \lambda$, $\mu_k = k\mu$, із твердження 2 так само, як і (63), можна отримати оцінку

$$\sup_{x \geq 0} |\Delta^*(x)| \leq C^* \left(\frac{\tilde{\rho}^{u-1}}{(u-1)!}\right) u \ln u (1 + o(1)),$$

де $C^* = (2\pi)^{-1}(1+\delta)\left(3 + \exp\left(-2\tilde{\rho}\right)\left(\lambda^2 \mathbf{D}T^z + 1\right)\right)$, $\delta > 0$, $\tilde{\rho} = \lambda/\mu$. Величина $\mathbf{D}T^z$ задається формулою (55), при цьому

$$m_{i,i-1} = \frac{(i-1)!}{\mu \tilde{\rho}^i} \left(\exp(\tilde{\rho}) - 1 - \tilde{\rho} - \ldots - \frac{\tilde{\rho}^{i-1}}{(i-1)!}\right).$$

Зазначимо, що у даному випадку (див. [5])

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad a = \exp\left(\tilde{\rho}\right)/\lambda, \quad p_0 = \exp\left(-\tilde{\rho}\right),$$

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \frac{k!}{\left(\tilde{\rho}\right)^k}\right)^{-1} \sim \frac{\tilde{\rho}^{u-1}}{(u-1)!},$$

$$\sum_{k=u}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=u}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} = O\left(\frac{\tilde{\rho}^u}{u!}\right).$$

Література

1. W. L. Smith, *Renewal theory and its ramifications*, J. Roy. Statist. Soc., **20**, № 2, 243 – 302 (1958).
2. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol.2, John Wiley and Sons, New York etc. (1968).
3. S. Asmussen, *Extreme values theory for queues via cycle maxima*, Extremes, **1**, 137 – 168 (1998).
4. R. F. Serfozo, *Extreme values of birdh and death processes and queues*, Stochastic Process. and Appl., **27**, 291 – 306 (1988).
5. О. К. Закусило, І. К. Мацак, *Про екстремальні значення деяких регенеруючих процесів*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, **97**, 58 – 71 (2017).
6. V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer, Berlin, Heidelberg (1975).
7. A. Renyi, *A Poisson-folyamat egy jellemzese*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **1**, 519 – 527 (1956).
8. S. Yu. Vsekhsvyatskii, V. V. Kalashnikov, *Estimates of the moments of occurrence of rare events in regenerative processes*, Theory Probab. and Appl., **30**, 618 – 621 (1986).
9. В. М. Круглов, В. Ю. Королев, *Предельные теоремы для случайных сумм*, Изд-во Моск. ун-та, Москва (1990).
10. J. Riordan, *Stochastic service systems*, John Wiley and Sons, New York, London (1962).
11. S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, Acad. Press, New York (1968).
12. В. В. Анисимов, О. К. Закусило, В. С. Донченко, *Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем*, Вища шк., Киев (1987).
13. S. Karlin, J. McGregor, *The classification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **86**, 366 – 400 (1957).
14. І. Мацак, О. Скуржанський, *Граничні теореми для екстремальних значень довжини черги в системах масового обслуговування*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, сер. фіз.-мат. науки, № 1(39), 28 – 36 (2018).

Одержано 31.07.19,
після доопрацювання — 12.07.20