DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6784

УДК 539.3

Р. М. Кушнір, Ю. В. Токовий, М. Й. Юзв'як, А. В. Ясінський
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗВЕДЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ ДО КЛЮЧОВИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

A generalization of the direct integration method is given with regard to solving the original equations of two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points (i.e., plane problems for a rectangular domain and an annular sector and the axisymmetric problem for a cylinder of finite length). The problems are thereby reduced to a governing integrodifferential equation for a key function, which is unique for each problem. By making use of equilibrium equations, the expressions for stress-tensor components are derived in terms of the key function, while the complete sets of boundary conditions are identically reduced to the corresponding sets of integral conditions for the key function. The algorithms for separating variables in the derived governing equations are suggested by utilizing the complete sets of the eigen- and associated functions in order to construct the solutions to the formulated problems in the form of explicit dependencies on thermal loading in view of the boundary conditions.

Узагальнено реалізацію методу безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками (плоских задач для прямокутної області й кільцевого сектора та осесиметричної задачі для циліндра скінченної довжини), які зведено до ключового інтегро-диференціального рівняння на єдину для кожної задачі визначальну функцію. З використанням рівнянь рівноваги отримано вирази компонент тензора напружень через визначальну функцію, а набори межових умов еквівалентно зведено до інтегральних умов для цієї функції. Запропоновано алгоритми відокремлення змінних у ключових рівняннях з використанням спеціально побудованих повних власних і приєднаних функцій та побудови розв'язків розглянутих задач у вигляді явних залежностей від теплового навантаження з урахуванням умов на межі тіл.

1. Вступ. Попри довготривалу історію розвитку методів дослідження задач теорії пружності та термопружності [10, 15] багато класичних проблем залишаються нерозв'язаними, або ж їхні розв'язки є недостатньо ефективними для сучасних теоретичних та прикладних застосувань. Зокрема, йдеться про розвиток підходів до побудови аналітичних розв'язків задач такого класу для обмежених областей з кутовими точками [5], найпростішими з яких є призматичні тіла, наприклад, прямокутного поперечного перерізу, конусо- та клиноподібні елементи тощо. Недарма сформульовану Ґ. Ляме задачу про пружну рівновагу куба при довільному нормальному силовому навантаженні граней (плоским аналогом якої є задача для прямокутної області у зрівноваженому полі сил) порівняно за складністю із задачею «двох тіл» небесної механіки [13] і досі не розв'язано в явному вигляді. Основна складність при цьому полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь задачі та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях досліджуваного тіла. Остання обставина суттєво обмежує можливості побудови систем власних функцій для відокремлення змінних у ключових рівняннях, сформульованих для визначальних функцій (часто у цій якості використовують гармонічні чи бігармонічні потенціальні функції). Це обумовлює, зокрема, нестійкість побудованих розв'язків у кутових точках межі.

Для подолання цього ускладнення розроблено низку наближених аналітичних підходів, які, у переважній більшості, ґрунтуються на реалізації двох основних стратегій: 1) точне задоволення ключових гармонічних або бігармонічних рівнянь шляхом використання загального подання відповідних потенціальних функцій при наближеному задоволенні межових умов (наприклад, метод перехресної суперпозиції [5, 14], метод однорідних розв'язків [12]) або 2) забезпечення точного виконання умов на межі при наближеному задоволенні ключових рівнянь (наприклад, метод безпосереднього інтегрування [15]). Застосування кожної зі стратегій має певні переваги, наприклад щодо форми подання розв'язку, що з огляду на поставлену загальну мету дослідження визначає вибір методу. Зокрема, якщо аналіз термонапруженого стану не є кінцевою метою досліджень, а розв'язання задач здійснюється з метою отримати явні залежності компонент тензора напружень чи вектора переміщень від силових чи теплових факторів навантаження межі тіла для подальшого використання, наприклад з метою відтворення певних чинників навантажень [9] чи оптимізації термонапруженого стану [6], використання методу безпосереднього інтегрування забезпечує низку функціональних переваг. Застосування цього методу ґрунтується на використанні рівнянь рівноваги в напруженнях для подання всіх компонент тензора напружень через визначальні функції, за які вибрано певні напруження чи їх лінійні комбінації. У такий спосіб вдається уникнути фізично необґрунтованого підвищення диференціального порядку отриманих на основі рівнянь суцільності в напруженнях ключових рівнянь для визначальних функцій. Ефективність числової реалізації такого підходу залежить від вибору визначальних функцій.

У цій роботі запропоновано узагальнення методу безпосереднього інтегрування стосовно двовимірних задач термопружності щодо вибору визначальних функцій. При розв'язанні плоских задач для прямокутної області у декартових координатах і для кільцевого сектора у полярних та осесиметричної задачі для циліндра скінченної довжини з використанням інтегро-диференціальних співвідношень, які ґрунтуються на рівняннях рівноваги, введено єдину функцію, через яку подано всі компоненти тензора напружень. На основі рівняння суцільності в напруженнях з використанням цих співвідношень отримано ключове інтегро-диференціальне рівняння для визначальної функції, а набір межових умов на сторонах (гранях) досліджуваних областей еквівалентно зведено до набору інтегральних умов для цієї ж функції. Запропоновано алгоритми відокремлення змінних в отриманих ключових рівняннях та подання їхніх розв'язків у формі явної залежності від температурного поля з урахуванням межових умов.

2. Термопружна рівновага прямокутника. Розглянемо плоску задачу термопружності для прямокутної області $\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \{(x,y) \in [-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y]\}$ при відсутності масових сил та вільної від силових навантажень межі $\delta\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \{(x,y) : x = \pm a_x\} \cup \{(x,y) : y = \pm a_y\}$. Тут x, y — безрозмірні декартові координати, $a_x > 0$, $a_y > 0$ — сталі числові параметри. Для визначення трьох компонент тензора напружень σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} у рамках цієї задачі використовують [7, 8] два рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in \mathcal{D}_{\mathrm{R}}, \tag{1}$$

та рівняння суцільності в напруженнях

$$\Delta(\sigma_{xx}(x,y) + \sigma_{yy}(x,y)) = \alpha E^* \Delta T(x,y), \qquad (x,y) \in \mathcal{D}_{\mathrm{R}}. \tag{2}$$

Тут

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad E^* = \begin{cases} E & \text{для випадку плоского напруженого стану,} \\ E/(1-\nu) & \text{для випадку плоскої деформації,} \end{cases}$$

α — коефіцієнт лінійного температурного розширення, E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона, $T(x,y)$ — квазістаціонарне температурне поле, визначене з відповідної задачі теплопровідності [8].

Для розглянутого випадку вільної від силових навантажень межі прямокутника $\delta\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ рівняння (1), (2) розв'язуватимемо при таких однорідних межових умовах:

$$\sigma_{xx}(\pm a_x, y) = \sigma_{xy}(\pm a_x, y) = 0, \;\; y \in [-a_y, a_y], \quad \sigma_{yy}(x, \pm a_y) = \sigma_{xy}(x, \pm a_y) = 0, \;\; x \in [-a_x, a_x]. \tag{3}$$

Класичним підходом до розв'язування задач типу (1)–(3) є використання потенціальних функцій напружень, зокрема бігармонічної функції Ері $\Phi_{\mathrm{R}}(x,y)$, уведеної виразами [7]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{R}}}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{R}}}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{R}}}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

При поданні напружень у вигляді (4) рівняння рівноваги (1) задовольняються тотожно, а рівняння суцільності (2) та межові умови (3) відповідно набирають вигляду

$$\Delta^2 \Phi_{\mathrm{R}}(x,y) = -\alpha E^* \Delta T(x,y) \tag{5}$$

і

$$\Phi_{\mathrm{R}}(\pm a_x, y) = \left.\frac{\partial \Phi_{\mathrm{R}}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=\pm a_x} = 0, \qquad \Phi_{\mathrm{R}}(x, \pm a_y) = \left.\frac{\partial \Phi_{\mathrm{R}}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm a_y} = 0. \tag{6}$$

Побудова точних аналітичних розв'язків крайових задач для бігармонічного рівняння (5) з неоднорідними умовами, аналогічними умовам (6), для областей з кутовими точками (прямокутник, півсмуга та ін.) є суттєво ускладненою [13, 14].

Згідно зі схемою реалізації методу безпосереднього інтегрування [1, 6, 15], рівняння рівноваги (1) можна використати для того, щоб виразити дві з трьох компонент тензора напружень через третю, вибрану за визначальну функцію. Вибравши, наприклад, нормальні напруження σ_{xx} за визначальні, з рівнянь (1) та відповідних межових умов (3) отримаємо вирази [16, 18]

$$\sigma_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-a_y}^{a_y} \sigma_{xx}(x,\eta)\operatorname{sgn}(y-\eta)d\eta, \qquad \sigma_{yy}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-a_y}^{a_y} \sigma_{xx}(x,\eta)\,|y-\eta|\,d\eta \tag{7}$$

та інтегральні умови

$$\int\limits_{-a_y}^{a_y} \sigma_{xx}(x,y)dy = \int\limits_{-a_y}^{a_y} y\sigma_{xx}(x,y)dy = 0, \quad x \in [-a_x, a_x]. \tag{8}$$

Умови (8) відповідають рівності нулеві головних вектора та моменту визначальних напружень у перерізі $x = \mathrm{const}$. Зауважимо, що комутативність диференціальних та інтегральних операторів у виразах (7) вимагає виконання певних умов, накладених на компоненти тензора напружень [15].

Далі з використанням другого з рівнянь (1) та умов (3) для дотичних напружень отримаємо такі локальні крайові умови:

$$\sigma_{xx}(\pm a_x, y) = \left.\frac{\partial \sigma_{xx}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=\pm a_x} = 0,$$

а на основі (2), (7) знайдемо інтегро-диференціальне рівняння

$$4\frac{\partial^2 \sigma_{xx}(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \sigma_{xx}(x,y)}{\partial y^2} + \int\limits_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^4 \sigma_{xx}(x,\eta)}{\partial x^4}\,|y-\eta|\,d\eta = -2\alpha E^* \Delta T(x,y). \tag{9}$$

На відміну від бігармонічного рівняння (5) інтегро-диференціальне рівняння (9) містить похідну другого порядку за координатою y. Кількість межових умов також відповідно зменшено на дві, оскільки чотири локальні умови (3) при $y = \pm a_y$ еквівалентно замінено двома інтегральними умовами (8) для визначальної функції σ_{xx}, фізичне обґрунтування якої є очевидним. Зауважимо, що у такий же спосіб можна звести задачу до ключового рівняння з відповідним набором локальних крайових та інтегральних умов при виборі за визначальну будь-якої іншої компоненти тензора напружень; сам вибір визначальних напружень залежить від специфіки задачі [15].

Позбутися невизначеності у виборі визначальних напружень при реалізації методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги можна шляхом уведення однієї функції $F_{\mathrm{R}}(x,y)$ таким чином:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-a_x}^{a_x} F_{\mathrm{R}}(\xi,y)\,|x-\xi|\,d\xi, \qquad \sigma_{yy}(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-a_y}^{a_y} F_{\mathrm{R}}(x,\eta)\,|y-\eta|\,d\eta,\\ \sigma_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{R}}} F_{\mathrm{R}}(\xi,\eta)\mathrm{sgn}(x-\xi)\mathrm{sgn}(y-\eta)d\xi d\eta.\end{gathered} \tag{10}$$

Нескладно переконатися, що з використанням виразів (10) рівняння рівноваги (1) задовольняються тотожно, а вісім межових умов (3) для різних компонент тензора напружень зводяться до чотирьох інтегральних умов

$$\int\limits_{-a_x}^{a_x} F_{\mathrm{R}}(x,y)dx = \int\limits_{-a_x}^{a_x} xF_{\mathrm{R}}(x,y)dx = \int\limits_{-a_y}^{a_y} F_{\mathrm{R}}(x,y)dy = \int\limits_{-a_y}^{a_y} yF_{\mathrm{R}}(x,y)dy = 0 \tag{11}$$

для визначальної функції $F_{\mathrm{R}}(x,y)$. Рівняння суцільності (2) у цьому випадку зводимо до такого ключового рівняння:

$$4F_{\mathrm{R}}(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-a_y}^{a_y}F_{\mathrm{R}}(x,\eta)\,|y-\eta|d\eta+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_{-a_x}^{a_x}F_{\mathrm{R}}(\xi,y)\,|x-\xi|d\xi=-2\alpha E^*\Delta T(x,y). \quad (12)$$

Інтегро-диференціальне рівняння (12) містить частинні похідні другого порядку за обома координатами з відповідною кількістю умов (11). Таким чином, у випадку плоскої задачі термопружності для прямокутної області подання компонент тензора напружень (10) через визначальну функцію $F_{\mathrm{R}}(x,y)$ дозволяє знизити порядок ключового рівняння суцільності і кількість межових (інтегральних) умов.

Порівнюючи вирази (4) і (10) для компонент тензора напружень, нескладно встановити зв'язок між функцією напружень Ері $\Phi_{\mathrm{R}}(x,y)$ і визначальною функцією $F_{\mathrm{R}}(x,y)$ при однорідних межових умовах (3):

$$\Phi_{\mathrm{R}}(x,y)=\frac{1}{4}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{R}}}F_{\mathrm{R}}(\xi,\eta)\,|(x-\xi)(y-\eta)|\,d\xi d\eta,\quad F_{\mathrm{R}}(x,y)=\frac{\partial^4\Phi_{\mathrm{R}}(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}.$$

Для побудови розв'язку ключового інтегро-диференціального рівняння (12) з однорідними умовами (11) зручно розвинути функцію $F_{\mathrm{R}}(x,y)$ і задане температурне поле $T(x,y)$ у ряди за повними ортогональними системами функцій [1, 2] $\{1,x,\cos\gamma_n x/a_x,\sin\lambda_n x/a_x\}$ і $\{1,y,\cos\gamma_n y/a_y,\sin\lambda_n y/a_y\}$, де $\gamma_n=n\pi,\lambda_n$ — додатні корені трансцендентного рівняння $\mathrm{tg}\lambda=\lambda$, пронумеровані у порядку зростання, $n\in\mathbb{N}$. Ці системи функцій ефективно використані у роботах [16, 18] для розвинення нормальних компонент тензора напружень при побудові розв'язків плоских задач теорії пружності та термопружності у прямокутній області. Використання таких систем функцій дозволяє тотожно задовольнити умови (11) для кожної гармоніки. Задоволення ж ключового інтегро-диференціального рівняння (12) забезпечується при

$$F_{\mathrm{R}}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}F^{(i)}(x,y), \quad (13)$$

де складові для парних і непарних верхніх індексів мають вигляд

$$\begin{aligned}F^{(2i-1)}(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y^{(2i-1)}_{\mathrm{c},n}(y)\cos\frac{\gamma_n x}{a_x}+Y^{(2i-1)}_{\mathrm{s},n}(y)\sin\frac{\lambda_n x}{a_x}\right),\\ F^{(2i)}(x,y)&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(X^{(2i)}_{\mathrm{c},m}(x)\cos\frac{\gamma_m y}{a_y}+X^{(2i)}_{\mathrm{s},m}(x)\sin\frac{\lambda_m y}{a_y}\right),\qquad i=1,2,\ldots,\end{aligned} \quad (14)$$

і є розв'язками рівнянь

$$
\begin{gathered}
2F^{(2i-1)}(x,y)+\frac{1}{2}\int\limits_{-a_x}^{a_x}\frac{\partial^2F^{(2i-1)}(\xi,y)}{\partial y^2}\,|x-\xi|d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{-a_y}^{a_y}\frac{\partial^2F^{(2i-1)}(x,\eta)}{\partial x^2}\,|y-\eta|d\eta=\\
=\frac{\partial^2g^{(2i-1)}(x,y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2g^{(2i-2)}(x,y)}{\partial x^2}-\alpha E^*\frac{\partial^2T(x,y)}{\partial x^2}\delta_{2i-1,1},\\
2F^{(2i)}(x,y)+\frac{1}{2}\int\limits_{-a_x}^{a_x}\frac{\partial^2F^{(2i)}(\xi,y)}{\partial y^2}\,|x-\xi|d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{-a_y}^{a_y}\frac{\partial^2F^{(2i)}(x,\eta)}{\partial x^2}\,|y-\eta|d\eta=\\
=\frac{\partial^2g^{(2i)}(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2g^{(2i-1)}(x,y)}{\partial y^2}-\alpha E^*\frac{\partial^2T(x,y)}{\partial y^2}\delta_{2i,1}
\end{gathered}
\tag{15}
$$

для кожного значення $i=1,2,\ldots$. Тут

$$
\begin{gathered}
g^{(2i-1)}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_{\mathrm{c},n}^{(2i-1)}(y)\frac{a_x^2\cos\gamma_n}{\gamma_n^2}+a_xxY_{\mathrm{s},n}^{(2i-1)}(y)\frac{\cos\lambda_n}{\lambda_n}\right),\\
g^{(2i)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(X_{\mathrm{c},m}^{(2i)}(x)\frac{a_y^2\cos\gamma_m}{\gamma_m^2}+a_yyX_{\mathrm{s},m}^{(2i)}(x)\frac{\cos\lambda_m}{\lambda_m}\right).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Підсумовуючи (15) і (16) навіть у скінченному діапазоні зміни індексу i, отримуємо рівняння, що збігається з (12) із точністю до лінійного за координатами x та y доданка. В роботі [16] показано, що зі збільшенням індексу i члени (14) ряду (13) рівномірно прямують до нуля. Тому якщо складові $F^{(2i-1)}$ і $F^{(2i)}$ є розв'язками рівнянь (15), (16), то інтегро-диференціальне рівняння (12) можна задовольнити з довільною наперед заданою точністю.

3. Термопружна рівновага кільцевого сектора. Розглянемо плоску задачу термопружності для кільцевого сектора $\mathcal{D}_{\mathrm{S}}=\{(\rho,\varphi):\rho\in[k,1]\,,\varphi\in[-\theta,\theta],\theta\in(0,\pi)\}$, яка за відсутності масових сил описується рівняннями рівноваги [7]

$$
\frac{\partial\left(\rho\sigma_{rr}(\rho,\varphi)\right)}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}=\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi),\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho^2\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)\right)}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{17}
$$

і рівнянням суцільності в напруженнях

$$
\Delta_{\mathrm{S}}\left(\sigma_{rr}(\rho,\varphi)+\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)\right)=-\alpha E^*\Delta_{\mathrm{S}}T(\rho,\varphi),\quad \Delta_{\mathrm{S}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{18}
$$

за вільної від силових навантажень межі $\delta\mathcal{D}_{\mathrm{S}}$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{rr}(k,\varphi)=\sigma_{rr}(1,\varphi)=\sigma_{r\varphi}(k,\varphi)=\sigma_{r\varphi}(1,\varphi)=0,\quad \varphi\in[-\theta,\theta],\\
\sigma_{rr}(\rho,\pm\theta)=\sigma_{r\varphi}(\rho,\pm\theta)=0,\quad \rho\in[k,1].
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Тут $\rho=r/R_{\mathrm{o}}$, $k=R_{\mathrm{i}}/R_{\mathrm{o}}$, r — полярний радіус, R_{i} і R_{o} — відповідно внутрішній і зовнішній радіуси, що обмежують сектор $\mathcal{D}_{\mathrm{S}}$ у розмірних координатах.

Як і для випадку прямокутника у декартових координатах, можна скористатись співвідношеннями [7]

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2},\\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)=\frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2},\qquad \sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right),\end{gathered}\tag{20}$$

щоб задовольнити рівняння рівноваги (17) тотожно та звести рівняння суцільності (18) й межові умови (19) для компонент тензора напружень відповідно до бігармонічного рівняння

$$\Delta_{\mathrm{S}}^2\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)=-\alpha E^*\Delta_{\mathrm{S}}T(\rho,\varphi)$$

та умов на потенціальну функцію

$$\Phi_{\mathrm{S}}(k,\varphi)=\Phi_{\mathrm{S}}(1,\varphi)=\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=k}=\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=0,\quad \Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\pm\theta)=\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pm\theta}=0.$$

Як і у випадку задачі для прямокутної області, можна скористатися рівняннями рівноваги для того, щоб визначити компоненти тензора напружень через одну визначальну компоненту. Якщо, наприклад, у якості останньої вибрати напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$, то аналогічні (7) співвідношення отримаємо у вигляді

$$\sigma_{rr}(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\rho}\int\limits_k^1\left(\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\mathrm{sgn}(\rho-\eta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\left|\rho-\eta\right|\right)d\eta,$$

$$\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)=-\frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int\limits_k^1\eta\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta.$$

Тоді задача термопружності для кільцевого сектора (17) – (19) зведеться до інтегрування ключового рівняння

$$\begin{gathered}2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+2\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\int\limits_k^1\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\mathrm{sgn}\left(\rho-\eta\right)d\eta+\\ +\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(4\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)-\frac{2}{\rho}\int\limits_k^1\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta+\frac{5}{\rho^2}\int\limits_k^1\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\left|\rho-\eta\right|d\eta\right)+\\ +\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\int\limits_k^1\sigma_{\varphi\varphi}(\eta,\varphi)\left|\rho-\eta\right|d\eta=-2\rho^2\alpha E^*\Delta_{\mathrm{S}}T(\rho,\varphi)\end{gathered}$$

з набором локальних межових та інтегральних умов

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\pm\theta)=\left.\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pm\theta}=0,\qquad \int\limits_k^1\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)d\rho=\int\limits_k^1\rho\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)d\rho=0,$$

записаних у термінах колових напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$.

За визначальні можна вибрати і дотичні напруження, але, на відміну від випадку декартових координат, визначити дотичні і колові напруження окремо через радіальні не вдається.

Якщо ввести функцію $F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)$ за допомогою виразів

$$\sigma_{rr}(\rho,\varphi)=\frac{1}{4\rho}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{S}}}F_{\mathrm{S}}(\eta,\xi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\left|\varphi-\xi\right|d\xi d\eta+\frac{1}{2\rho^2}\int\limits_k^1F_{\mathrm{S}}(\eta,\varphi)\left|\rho-\eta\right|d\eta,$$

$$\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)=-\frac{1}{4\rho^2}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{S}}}\eta F_{\mathrm{S}}(\eta,\xi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\operatorname{sgn}(\varphi-\xi)d\xi d\eta, \tag{21}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\theta}^{\theta}F_{\mathrm{S}}(\rho,\xi)\left|\varphi-\xi\right|d\xi,$$

то рівняння рівноваги (17) задовольняться тотожно, рівняння суцільності (18) зведеться до ключового інтегро-диференціального рівняння

$$4\rho^2F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)+\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{S}}}F(\eta,\xi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\left|\varphi-\xi\right|d\xi d\eta+\int\limits_k^1\frac{\partial^2F_{\mathrm{S}}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\left|\rho-\eta\right|d\eta+$$

$$+2\int\limits_k^1(\rho-2\eta)F_{\mathrm{S}}(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta+$$

$$+\rho^2\int\limits_{-\theta}^{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial F_{\mathrm{S}}(\rho,\xi)}{\partial\rho}\right)-F_{\mathrm{S}}(\rho,\xi)\right)\left|\varphi-\xi\right|d\xi=-2\rho^4\alpha E^*\Delta_{\mathrm{S}}T(\rho,\varphi), \tag{22}$$

а межові умови (19) наберуть вигляду

$$\int\limits_k^1F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)d\rho=\int\limits_k^1\rho F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)d\rho=0,\qquad\int\limits_{-\theta}^{\theta}F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)d\varphi=\int\limits_{-\theta}^{\theta}\varphi F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)d\varphi=0. \tag{23}$$

За допомогою описаного вище алгоритму відокремлення змінних можна побудувати аналітичний розв'язок ключового інтегро-диференціального рівняння (22) з умовами (23), використавши розвинення заданої та шуканої функцій у ряди за повними системами функцій: за кутовою координатою φ така система є аналогічною використаним у випадку декартових координат $\{1,\varphi,\cos\gamma_n\varphi,\sin\lambda_n\varphi\}$, а за радіальною координатою ρ слід використати неортогональну повну систему $\left\{\frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^2}\ln\rho, \frac{1}{\rho^2}\sin\frac{\tilde{\lambda}_n \ln\rho}{1-k}, \frac{1}{\rho^2}\cos\frac{\tilde{\lambda}_n \ln\rho}{1-k}\right\}$, де $\tilde{\lambda}_n$ — додатні корені трансцендентного рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\ln k\right) = -\frac{1-k}{1+k}\lambda$, а алгоритм розвинення довільної функції за цією системою наведено в роботі [4].

Порівнявши вирази (20) і (21), знайдемо співвідношення між функцією напружень Ері $\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)$ та введеною визначальною функцією $F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)$ в полярній системі координат:

$$\Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi) = \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{S}}} F_{\mathrm{S}}(\eta,\xi)\left|(\rho-\eta)(\varphi-\xi)\right| d\xi d\eta, \qquad F_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi) = \frac{\partial^4 \Phi_{\mathrm{S}}(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2\partial\varphi^2}.$$

4. Осесиметрична задача термопружності для скінченного порожнистого циліндра. Розглянемо задачу про термопружну рівновагу однорідного ізотропного порожнистого циліндра $\mathcal{C} = \{(\rho,\varphi,z)\colon \rho\in[k,1], \varphi\in[0,2\pi], z\in[-h,h]\}$ в осесиметричному температурному полі $T(\rho,z)$, де $\rho = r/R_{\mathrm{o}}$, $z = Z/R_{\mathrm{o}}$, $k = R_{\mathrm{i}}/R_{\mathrm{o}}$, $h = H/R_{\mathrm{o}}$, r, Z — радіальна та осьова координати розмірної циліндричної системи, R_{i} і R_{o} — внутрішній і зовнішній радіуси циліндра, $2H$ — довжина його твірної. У цьому випадку при відсутності масових сил компоненти тензора напружень в осьовому перерізі циліндра $\mathcal{D}_{\mathrm{C}} = \{(\rho,z)\colon \rho\in[k,1], z\in[-h,h]\}$ задовольняють два рівняння рівноваги [17]

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\sigma_{rr}(\rho,z)\right) + \rho\frac{\partial\sigma_{rz}(\rho,z)}{\partial z} = \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z), \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\sigma_{rz}(\rho,z)\right) + \rho\frac{\partial\sigma_{zz}(\rho,z)}{\partial z} = 0, \qquad (\rho,z)\in\mathcal{D}_{\mathrm{C}}, \tag{24}$$

два рівняння суцільності в напруженнях

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z) - \nu\left(\sigma_{rr}(\rho,z)+\sigma_{zz}(\rho,z)\right)\right) + (1+\nu)\left(\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z)-\sigma_{rr}(\rho,z)\right) = -\alpha E^*\rho\frac{\partial T(\rho,z)}{\partial\rho},$$
$$\rho\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z) - \nu\left(\sigma_{rr}(\rho,z)+\sigma_{zz}(\rho,z)\right)\right) - 2(1+\nu)\frac{\partial\sigma_{rz}(\rho,z)}{\partial z} + \tag{25}$$
$$+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sigma_{zz}(\rho,z) - \nu\left(\sigma_{rr}(\rho,z)+\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z)\right)\right) = -\alpha E^*\left(\rho\frac{\partial T(\rho,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial T(\rho,z)}{\partial\rho}\right), \qquad (\rho,z)\in\mathcal{D}_{\mathrm{C}},$$

та однорідні межові умови

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}(k,z) = \sigma_{rr}(1,z) = \sigma_{rz}(k,z) = \sigma_{rz}(1,z) = 0, \quad z\in[-h,h],\\ \sigma_{zz}(\rho,\pm h) = \sigma_{zz}(\rho,\pm h) = 0, \quad \rho\in[k,1].\end{gathered} \tag{26}$$

Зауважимо, що якщо у процесі використання методу безпосереднього інтегрування для цієї задачі за визначальні функції вибрати компоненти тензора напружень чи їхні комбінації, то на відміну від розглянутих вище плоских задач тут неможливо обійтись однією визначальною функцією. У роботах [3, 17] за визначальні функції вибрано, наприклад, осьові напруження σ_{zz} і перший інваріант тензора напружень $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}$ або сумарні напруження $\sigma = \sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}$ і перший інваріант σ_{I}.

Виразимо компоненти тензора напружень через функцію $F_{\mathrm{C}}(\rho, z)$ таким чином:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sigma_{rr}(\rho,z)\right)-\sigma(\rho,z)=\frac{1}{2}\int\limits_k^1 \eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta,$$

$$\sigma_{zz}(\rho,z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{h} F_{\mathrm{C}}(\rho,\zeta)\left|z-\zeta\right|d\zeta, \tag{27}$$

$$\sigma_{rz}(\rho,z)=-\frac{1}{4\rho}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{C}}}\eta F_{\mathrm{C}}(\eta,\zeta)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\operatorname{sgn}(z-\zeta)d\eta d\zeta.$$

Тоді рівняння рівноваги (24) задовольняються тотожно, а межові умови (26) виконуються, якщо введена функція задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int\limits_k^1 \rho F_{\mathrm{C}}(\rho,z)d\rho=\int\limits_{-h}^{h} F_{\mathrm{C}}(\rho,z)dz=\int\limits_{-h}^{h} zF_{\mathrm{C}}(\rho,z)dz=0. \tag{28}$$

З урахуванням рівнянь рівноваги (24) і формул (27) запишемо перше рівняння суцільності (25) у вигляді

$$\rho\frac{\partial\sigma(\rho,z)}{\partial\rho}=-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(T(\rho,z)+\frac{\nu}{2}\int\limits_{-h}^{h}F_{\mathrm{C}}(\rho,\zeta)\left|z-\zeta\right|d\zeta\right)+\frac{1+\nu}{2}\int\limits_k^1\eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta. \tag{29}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (24), (29) з межовими умовами (26) відносно радіальних напружень σ_{rr} з урахуванням першої інтегральної умови (28), отримуємо вирази

$$\sigma(\rho,z)=-T(\rho,z)+\frac{2}{1-k^2}\int\limits_k^1\eta T(\eta,z)d\eta+\frac{\nu}{2}\int\limits_{-h}^{h}F_{\mathrm{C}}(\rho,\zeta)\left|z-\zeta\right|d\zeta+$$

$$+\frac{1-\nu}{2(1-k^2)}\int\limits_k^1\eta^3F_{\mathrm{C}}(\eta,z)d\eta+\frac{1+\nu}{2}\int\limits_k^1\eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\left(\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\ln\frac{\rho}{\eta}+\frac{1+k^2}{1-k^2}\ln\eta\right)d\eta, \tag{30}$$

$$2\rho^2\sigma_{rr}(\rho,z)=-\int\limits_k^1\eta T(\eta,z)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta+\frac{2\rho^2-1-k^2}{1-k^2}\int\limits_k^1\eta T(\eta,z)d\eta+$$

$$+\frac{\nu}{2}\iint\limits_{\mathcal{D}_{\mathrm{C}}}\eta F_{\mathrm{C}}(\eta,\zeta)\left|z-\zeta\right|\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\zeta+$$

$$+\frac{1-\nu}{4}\int\limits_k^1\eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\left(\frac{2\rho^2-1-k^2}{1-k^2}\eta^2+(\rho^2-\eta^2)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\right)d\eta+$$

$$+\frac{1+\nu}{2}\int\limits_k^1 \eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\left(\rho^2\ln\frac{\rho}{\eta}\mathrm{sgn}(\rho-\eta)+\frac{\rho^2(1+k^2)-2k^2}{1-k^2}\ln\eta\right)d\eta. \tag{31}$$

Таким чином, у випадку осесиметричної задачі термопружності для однорідного ізотропного порожнистого циліндра скінченної довжини компоненти тензора напружень виражаються через одну скалярну функцію $F_{\mathrm{C}}(\rho,z)$ за допомогою співвідношень (27), (30) і (31). Рівняння рівноваги (24) і перше рівняння суцільності (25) при цьому задовольняються тотожно, а вісім межових умов (26) для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінюються трьома інтегральними умовами (28). Ці формули можна застосовувати і для суцільного циліндра $(k=0)$, при цьому невизначеності, що виникають при $\rho\to 0$, розкриваються за правилом Лопіталя. Зауважимо, що при $F\equiv 0$ отримуємо відомий розв'язок одновимірної задачі термопружності для довгого порожнистого циліндра [10].

Для визначення невідомої функції $F_{\mathrm{C}}(\rho,z)$, що задовольняє інтегральні умови (28), використаємо друге рівняння суцільності (25), яке з урахуванням формул (27), (30) набере вигляду

$$\frac{1}{4}\int\limits_k^1 \eta\frac{\partial^2 F_{\mathrm{C}}(\eta,z)}{\partial z^2}\left(\frac{\eta^2-\rho^2}{2}+\rho^2\ln\frac{\rho}{\eta}\right)\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta+\int\limits_k^1 \eta F_{\mathrm{C}}(\eta,z)\mathrm{sgn}\,(\rho-\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{2(1-k^2)}\int\limits_k^1 \eta\frac{\partial^2 F_{\mathrm{C}}(\eta,z)}{\partial z^2}\left(\frac{\eta^2}{2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\rho^2+\frac{1+k^2}{2}\right)+\left(\frac{1+k^2}{2}\rho^2+\frac{1+\nu}{1-\nu}k^2\right)\ln\eta\right)d\eta+$$

$$+\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{-h}^{h} F_{\mathrm{C}}(\rho,\zeta)\,|z-\zeta|\,d\zeta=-\frac{\rho}{1-\nu}\frac{\partial T(\rho,z)}{\partial\rho}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_k^1 \eta\frac{\partial^2 T(\eta,z)}{\partial z^2}\left(\frac{1}{1-k^2}\left(\frac{2\rho^2}{1+\nu}+\frac{1+k^2}{1-\nu}\right)+\frac{\mathrm{sgn}(\rho-\eta)}{1-\nu}\right)d\eta. \tag{32}$$

Для побудови розв'язку ключового рівняння (32) шукану й задану функції слід розвинути у подвійні ряди за такими повними системами функцій: за осьовою координатою використано таку ж систему, як і у випадку плоскої задачі в декартових координатах $\{1,z,\cos\gamma_n z/h,\sin\lambda_n z/h\}$; за радіальною координатою — повну систему [10] $\{1,U_0(s_m\rho),m\in\mathbb{N}\}$, де $U_0(s_m\rho)=Y_1(s_m)\times\times J_0(s_m\rho)-J_1(s_m)Y_0(s_m\rho)$, s_m — додатні корені рівняння $J_1(s)Y_1(sk)-Y_1(s)J_1(sk)=0$, J_j, Y_j — функції Бесселя першого та другого роду порядку j. Зауважимо, що у випадку суцільного циліндра $(k=0)$ $U_m(\rho)=J_0\left(s_m\rho\right)$, а s_m — корені рівняння $J_1(s)=0$. Використання цих розвинень дає змогу відокремити змінні у ключовому рівнянні (32) та задовольнити умови (28) з використанням алгоритму [19].

Як і для розглянутих вище плоских задач, можна показати зв'язок між визначальною функцією F_{S}, уведеною виразами (27), та бігармонічною функцією Лява Φ_{C}, що задовольняє однорідне бігармонічне рівняння [11]

$$\Delta_{\mathrm{C}}^2\Phi_{\mathrm{C}}(\rho,z)=0,\qquad \Delta_{\mathrm{C}}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{33}$$

і пов’язана з компонентами тензора напружень виразами

$$\sigma_{rr}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta_{\mathrm{C}}\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z) - \frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z)}{\partial\rho^2}\right),$$

$$\sigma_{zz}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta_{\mathrm{C}}\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z) - \frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z)}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta_{\mathrm{C}}\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z)}{\partial\rho}\right),$$

$$\sigma_{rz}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left((1-\nu)\Delta_{\mathrm{C}}\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z) - \frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{C}}(\rho, z)}{\partial z^2}\right).$$

5. Висновки. Запропоновано узагальнення схеми реалізації методу безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь двовимірних задач термопружності для тіл скінченних розмірів з кутовими точками, яке дозволяє уніфікувати вибір визначальних функцій, зокрема для плоскої задачі у полярних координатах та осесиметричної задачі. З використанням рівнянь рівноваги всі компоненти тензора напружень визначено через одну функцію для кожної задачі, а саме, через $F_{\mathrm{R}}(x, y)$ з використанням (10) для плоскої задачі термопружності у прямокутній області, через $F_{\mathrm{S}}(\rho, \varphi)$ з використанням (21) для плоскої задачі у полярних координатах для кільцевого сектора та через $F_{\mathrm{C}}(\rho, z)$ за допомогою виразів (27) у випадку осесиметричної задачі термопружності для циліндра скінченної довжини. З урахуванням розмірності введених у такий спосіб визначальних функцій їх фізичний зміст можна умовно визначити як «густину» напружень. Встановлено зв’язок між уведеними визначальними функціями та традиційно використовуваними бігармонічними функціями Ері у полярних та декартових координатах і Лява у випадку осесиметричної задачі.

Ключові рівняння (12), (22) і (32) для введених визначальних функцій $F_{\mathrm{R}}(x, y)$, $F_{\mathrm{S}}(\rho, \varphi)$, $F_{\mathrm{C}}(\rho, z)$ є інтегро-диференціальними рівняннями, що містять удвічі нижчі частинні похідні у порівнянні з класичними ключовими рівняннями і після відповідного диференціювання зводяться до останніх. Однак зведення класичних визначальних рівнянь до отриманих у роботі шляхом відповідного інтегрування вимагає задоволення певних умов погодження, які визначаються поведінкою наявних у цих рівняннях функцій на межі розглянутих областей. Запропоновано алгоритм відокремлення змінних в отриманих ключових рівняннях з використанням відповідних розвинень шуканих визначальних функцій і заданого температурного поля за повними системами функцій, що відповідають фізичному характеру сформульованих задач і враховують геометрію областей.

Зауважимо, що наявність можливості зведення задач термопружності до визначення однієї функції, яка має фізичний зміст із відповідними інтегральними умовами, є корисною для розроблення ефективних методів керування напружено-деформованим станом тіл, що моделюються розглянутими репрезентативними областями [6].

Література

1. В. М. Вігак, *Розв’язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області*, Доп. НАН України, № 12, 58 – 62 (1994).

2. В. М. Вігак, *Розв'язування плоских задач пружності та термопружності в прямокутній області*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **39**, № 1, 19 – 25 (1996).
3. В. М. Вігак, Р. Є. Пасічник, *Відокремлення змінних в інтегро-диференціальних рівняннях вісесиметричних задач термопружності для циліндричних областей*, Доп. НАН України, № 11, 52 – 57 (2000).
4. В. М. Вігак, М. І. Свирида, *Відокремлення змінних у рівняннях двовимірної задачі термопружності в напруженнях для кільцевого сектора*, Доп. НАН України, № 2, 68 – 74 (1998).
5. В. Т. Гринченко, *Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров*, Наук. думка, Киев (1978).
6. Б. М. Калиняк, Ю. В. Токовий, А. В. Ясінський, *Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **59**, № 3, 28 – 42 (2016).
7. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер, *Теория упругости*, Наука, Москва (1975).
8. M. R. Eslami, R. B. Hetnarski, J. Ignaczak, N. Noda, N. Sumi, Y. Tanigawa, *Theory of thermal stresses. Explanations, problems and solutions*, Springer, Dordrecht (2013).
9. R. Kushnir, A. Yasinskyy, Yu. Tokovyy, E. Hart, *Inverse thermoelastic analysis of a cylindrical tribo-couple*, *Materials*, 2021, **14**.
10. R. B. Hetnarski, M. R. Eslami, *Thermal stresses — advanced theory and applications*, Springer, Dordrecht (2009).
11. A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1927).
12. S. A. Lurie, V. V. Vasiliev, *The biharmonic problem in the theory of elasticity*, Gordon and Breach, Luxembourg (1995).
13. V. V. Meleshko, *Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem*, Appl. Mech. Rev., **56**, № 1, 33 – 85 (2003).
14. V. V. Meleshko, *Biharmonic problem in a rectangle*, Appl. Sci. Res., **58**, № 1-4, 217 – 249 (1998).
15. Y. Tokovyy, C. C. Ma, *The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids*, Cambridge Scholars Publ., Newcastle (2021).
16. V. M. Vihak, Yu. V. Tokovyi, A. V. Rychahivskyy, *Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region*, J. Comput. Appl. Mech., **3**, № 2, 193 – 206 (2002).
17. V. M. Vihak, A. V. Yasinskyy, Yu. V. Tokovyi, A. V. Rychahivskyy, *Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads*, J. Mech. Behavior Materials, **18**, № 2, 141 – 148 (2007).
18. V. M. Vihak, M. Y. Yuzvyak, A. V. Yasinskyy, *The solution of plane thermoelasticiti problem for rectangular domain*, J. Thermal Stresses, **21**, № 5, 545 – 562 (1988).
19. M. Yuzvyak, Yu. Tokovyy, A. Yasinskyy, *Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length*, J. Thermal Stresses, **44**, № 3, 359 – 376 (2021).

Одержано 15.06.21