DOI: 10.37863/umzh.v73i11.6060

УДК 517.958

Д. К. Дурдієв (Бухар. від-ня Ін-ту математики АН Республіки Узбекистан),
Ж. Ж. Жумаєв (Бухар. держ. ун-т, Узбекистан)

ОДНОВИМІРНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ЯДРА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

We consider the integro-differential heat equation with a time convolution integral on the right-hand side. The direct problem is an initial-boundary problem for the this equation. We study two inverse problems for this direct problem, which consist in finding the kernel of the integral term provided that two additional conditions on the solution of the direct problem are given. These problems are replaced with equivalent systems of integral equations with respect to unknown functions and, using the contraction mapping principle, we prove the unique solvability of the inverse problems.

Розглянуто інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності з інтегралом згортки за часом у правій частині. Пряма задача є початково-крайовою задачею для цього рівняння. Для прямої задачі вивчаються дві обернені задачі, що полягають у визначенні ядра інтегрального члена за заданими двома додатковими умовами щодо розв'язку прямої задачі. Задачі замінено еквівалентними системами інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій, і на основі стискаючого відображення доведено однозначну розв'язність обернених задач.

1. Вступ. Задачі визначення коефіцієнтів, правих частин або інших фізичних параметрів у диференціальних та інтегро-диференціальних рівняннях за заданою додатковою „експериментальною" інформацією про їхні розв'язки досить часто виникають у різних застосуваннях. Ці задачі є оберненими до „прямих" задач, в яких задано диференціальні рівняння, початкові та граничні дані [1].

Обернені задачі для параболічних і гіперболічних рівнянь з частинними похідними природно виникають в геофізиці, при пошуку нафти, в конструкції оптичних пристроїв і в багатьох інших областях, де внутрішня будова об'єкта може відображатися шляхом вимірювання полів у доступних областях. Задачі знаходження ядер пам'яті в таких рівняннях інтенсивно вивчаються з кінця минулого століття (див. [2 – 5]).

У даний час вивченню обернених задач для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь присвячено велику кількість досліджень (див., наприклад, [6 – 10]).

Розглянемо початково-крайову задачу визначення функції $u(x,t),\ x\in(0,l),\ t\in(0,T]$, з рівнянь

$$u_t-a^2u_{xx}=\int\limits_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)d\tau+h(x,t),\quad x\in(0,l),\quad 0<t\leq T, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in[0,l], \tag{1.2}$$

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\qquad u|_{x=l}=\mu_2(t),\quad 0\leq t\leq T,\qquad \varphi(0)=\mu_1(0),\qquad \varphi(l)=\mu_2(0), \tag{1.3}$$

де a — додатна стала, l і T — довільні додатні числа. При заданих функціях $k(t)$, $h(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ ця задача називається прямою задачею.

В оберненій задачі припускається, що ядро $k(t)$, $t>0$, інтегрального члена в (1.1) є невідомим, і вимагається визначити його, використовуючи додаткову інформацію про розв'язок прямої задачі

$$\int_0^l u(x,t)dx = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{1.4}$$

або

$$u(x_0,t) = f(t), \qquad x_0 \in (0,l), \quad t \in (0,T]. \tag{1.5}$$

У цьому випадку $\varphi(x)$, $x \in [0,l]$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $t \in [0,T]$, — задані функції. В подальшому будемо називати задачу знаходження функцій $u(x,t)$, $k(t)$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,T]$, з рівнянь (1.1)–(1.4) ***оберненою задачею*** **1**, а знаходження цих функцій з рівнянь (1.1)–(1.3), (1.5) ***оберненою задачею*** **2**.

Для простоти позначимо через ϑ функцію u_t, тобто $u_t = \vartheta$. Диференціюючи рівняння (1.1) по t і використовуючи умову (1.2), отримуємо

$$\vartheta_t - a^2\vartheta_{xx} = k(t)\varphi(x) + \int_0^t k(\tau)\vartheta(x,t-\tau)d\tau + h_t(x,t). \tag{1.6}$$

Покладаючи $t = 0$ у рівнянні (1.1) і використовуючи рівність (1.2), знаходимо початкову умову для ϑ:

$$\vartheta|_{t=0} = a^2\varphi''(x) + h(x,0). \tag{1.7}$$

Щоб отримати граничні умови для функції ϑ, здиференціюємо умови (1.3) по t:

$$\begin{gathered} \vartheta|_{x=0} = \mu_1'(t), \qquad \vartheta|_{x=l} = \mu_2'(t), \quad 0 < t \leq T, \\ a^2\varphi''(0) + h(0,0) = \mu_1'(0), \qquad a^2\varphi''(l) + h(l,0) = \mu_2'(0). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Диференціюючи додаткові умови (1.4) і (1.5) щодо t, отримуємо ці умови для функції ϑ в оберненій задачі 1:

$$\int_0^l \vartheta(x,t)dx = f'(t), \quad t \in (0,T], \tag{1.9}$$

і в оберненій задачі 2:

$$\vartheta(x_0,t) = f'(t), \qquad x_0 \in (0,l), \quad t \in (0,T]. \tag{1.10}$$

Замінимо початково-крайову задачу (1.6)–(1.8) на еквівалентне інтегральне рівняння типу Вольтерри. Для цього з рівнянь (1.6)–(1.8) виводимо для $\vartheta(x,t)$ рівняння (див. [11, с. 180–219]):

$$\vartheta(x,t) = \psi(x,t) + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\left[k(\tau)\varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau, \tag{1.11}$$

де

$$\psi(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)h_\tau(\xi,\tau)d\xi d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l(a^2\varphi''(x)+h(x,0))\sin\frac{\pi n}{l}xdx+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi a^2 n}{l^2}\int\limits_0^t(\mu_1'(\tau)-(-1)^n\mu_2'(\tau))e^{(\frac{\pi an}{l})^2\tau}d\tau\right]e^{-(\frac{\pi an}{l})^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{\pi an}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi an}{l}\xi\sin\frac{\pi an}{l}x$$

— функція Гріна першої початково-крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності.

Наведемо дві властивості функції Гріна [11, с. 200 – 221], необхідні для подальшого викладу.

***Зауваження* 1.** Інтеграл функції Гріна не перевищує 1:

$$\int\limits_0^l G(x,\xi,t)d\xi\leq 1,\qquad x\in(0,l),\quad t\in(0,T].$$

***Зауваження* 2.** Функція $G(x,\xi,t)$ нескінченно неперервно диференційовна по $x,\ \xi,\ t$ і $G_t(x,\xi,t)$ є обмеженою функцією для $0<x<l,\ 0<\xi<l,\ 0<t\leq T$, тобто

$$\left|G_t(x,\xi,t-\tau)\right|\leq\frac{2}{l}.$$

2. Пряма задача.

Лема 1. *Нехай*

$$(\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x))\in C(0,l),\quad (h(x,t),h_t(x,t))\in C(D_{lT}),$$

$$(\mu_1(t),\mu_1'(t),\mu_2(t),\mu_2'(t))\in C(0,T),\quad k(t)\in C(0,T)$$

і виконано умови погоджень у (1.3), (1.8). *Тоді існує єдиний класичний розв'язок задачі* $\vartheta(x,t)$ (1.6) – (1.8), *що належить класу* $C^{2,1}(D_{lT})$ ($C^{2,1}(D_{lT})$ *— клас двічі неперервно диференційовних по* x *і неперервно диференційовних по* t *в області* D_{lT} *функцій,* $D_{lT}=\{0<x<l,0<t\leq T\}$).

У подальшому ми також будемо використовувати звичайний клас $C(D_{lT})$ неперервних в області D_{lT} функцій.

Для доведення леми 1 запишемо рівняння (1.11) у вигляді

$$\vartheta(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)h_\tau(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l(a^2\varphi''(x)+h(x,0))\sin\frac{\pi n}{l}xdx+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi a^2 n}{l^2}\int\limits_0^t(\mu_1'(\tau)-(-1)^n\mu_2'(\tau))e^{(\frac{\pi an}{l})^2\tau}d\tau\right]e^{-(\frac{\pi an}{l})^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)k(\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau \tag{2.1}$$

і, позначивши суму перших трьох доданків у правій частині (2.1) через $\Phi(x,t),$ для цього рівняння в області D_{lT} розглянемо послідовність функцій

$$\vartheta_n(x,t)=\Phi(x,t)+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau k(\alpha)\vartheta_{n-1}(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau, \quad n=1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

де $\vartheta_0(x,t)=0$ для $(x,t)\in D_{lT}$. При виконанні умов леми 1 $\Phi(x,t)\in C^{2,1}\left(D_{lT}\right)$. Тоді з (2.2) випливає, що всі $\vartheta_n(x,t)$ в області D_{lT} мають такі властивості.

Позначимо $Z_n(x,t):=\vartheta_n(x,t)-\vartheta_{n-1}(x,t)$ і $\Phi_0=\|\Phi\|_{C(D_{lT})}$. У відповідності з формулою (2.2) оцінимо $Z_n(x,t)$ в області D_{lT}:

$$|Z_1(x,t)|\le\Phi_0,$$

$$|Z_2(x,t)|\le\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau |k(\alpha)|\,|Z_1(\xi,\tau-\alpha)|\,d\alpha d\xi d\tau\le\Phi_0k_0\frac{t^2}{2!},$$

$$k_0=\max_{t\in[0,T]}|k(t)|,$$

$$|Z_3(x,t)|\le\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau |k(\alpha)|\,|Z_2(\xi,\tau-\alpha)|\,d\alpha d\xi d\tau\le\Phi_0k_0^2\frac{t^4}{4!}.$$

Таким чином, для довільного $n=k$ маємо

$$|Z_k(x,t)|\le\Phi_0k_0^{k-1}\frac{t^{2(k-1)}}{(2k-2)!}.$$

Із наведених вище оцінок випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^\infty\left[\vartheta_n(x,t)-\vartheta_{n-1}(x,t)\right]$$

збігається рівномірно в D_{lT}, а його сума $u(x,t)$ належить функціональному простору $C^{2,1}\left(D_T\right)$. Отже, функціональна послідовність $\vartheta_n(x,t)$, визначена за допомогою рівності (2.2), збігається до $\vartheta(x,t)$ рівномірно в D_{lT}. Тоді $\vartheta(x,t)$ є розв'язком рівняння (1.11).

Тепер покажемо, що цей розв'язок є єдиним. Припустимо, що існують два розв'язки рівняння (1.11): $\vartheta^1(x,t)$ і $\vartheta^2(x,t)$ з одними і тими вхідними даними. Тоді їхня різниця $Z(x,t)=$ $=\vartheta^2(x,t)-\vartheta^1(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$Z(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau k(\alpha)Z(\xi,\alpha)d\alpha d\xi d\tau.$$

Нехай $\tilde{Z}(t)$ — супремум модуля $Z(x,t)$ для $x\in[0,l]$ при кожному фіксованому $t\in(0,T]$. Тоді

$$\tilde{Z}(t)\le k_0T\int\limits_0^t\tilde{Z}(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T].$$

Застосовуючи тут нерівність Гронуолла, отримуємо $\tilde{Z}(t)=0$ при $t\in[0,T]$. Це означає, що $Z(x,t)=0$ у D_{lT}, тобто $\vartheta^1(x,t)=\vartheta^2(x,t)$ у D_{lT}. Отже, рівняння (1.11) має єдиний розв'язок в області D_{lT}.

Лему доведено.

3. Обернена задача 1. Використовуючи додаткову умову (1.9) для оберненої задачі 1, із (1.11) знаходимо

$$f'(t)=\int\limits_0^l\psi(x,t)dx+\int\limits_0^l\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)k(\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau dx.$$

Диференціюючи цю рівність по t, отримуємо рівняння

$$f''(t)=\int\limits_0^l\psi_t(x,t)dx+\int\limits_0^l\int\limits_0^l G(x,\xi,0)k(t)\varphi(\xi)d\xi dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^t k(\tau)\int\limits_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^l G(x,\xi,0)\int\limits_0^t k(\alpha)\vartheta(\xi,t-\alpha)d\alpha d\xi dx.$$

Оскільки $G(x,\xi,0)=\delta(x-\xi)$, де $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака, враховуючи співвідношення

$$\int\limits_0^l g(\xi)\delta(x-\xi)d\xi=g(x),$$

$$\int_0^l G(x,\xi,0)\int_0^t k(\alpha)\vartheta(\xi,t-\alpha)d\alpha d\xi = \int_0^t k(\alpha)\vartheta(x,t-\alpha)d\alpha,$$

записуємо останнє рівняння у вигляді

$$f''(t) = \int_0^l \psi_t(x,t)dx + k(t)\int_0^l \varphi(x)dx+$$

$$+\int_0^l\int_0^t k(\tau)\int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx +$$

$$+\int_0^l\int_0^t\int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau dx+$$

$$+\int_0^l\int_0^t k(\alpha)\vartheta(x,t-\alpha)d\alpha dx. \tag{3.1}$$

Введемо позначення

$$\varphi_0 = \int_0^l \varphi(x)dx.$$

Тепер рівняння (3.1) запишемо як інтегральне рівняння другого роду щодо невідомої функції $k(t)$:

$$k(t) = \frac{1}{\varphi_0}\left[f''(t) - \int_0^l \psi_t(x,t)dx - \int_0^l\int_0^t k(\tau)\int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx -\right.$$

$$\left.-\int_0^l\int_0^t k(\alpha)\vartheta(x,t-\alpha)d\alpha dx - \int_0^l\int_0^t\int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau dx\right]. \tag{3.2}$$

Запишемо систему рівнянь (1.11), (3.2) у вигляді операторного рівняння

$$Ag = g, \tag{3.3}$$

де $g = (g_1, g_2) = (\vartheta(x,t),\ k(t))$ — вектор-функція і $A = (A_1, A_2)$ визначено за допомогою правих частин інтегральних рівнянь (1.11) і (3.2):

$$A_1 g = g_{01}(x,t) + \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\left[g_2(\tau)\varphi(\xi) + \int_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau, \tag{3.4}$$

$$A_2 g = g_{02}(t) - \frac{1}{\varphi_0}\left[\int_0^l \int_0^t g_2(\tau)\int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx - \right.$$

$$- \int_0^l \int_0^t g_2(\alpha) g_1(x,t-\alpha) d\alpha dx -$$

$$\left. - \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\int_0^\tau g_2(\alpha) g_1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau dx\right]. \tag{3.5}$$

У рівностях (3.4) і (3.5) введено такі позначення:

$$g_0(x,t) = (g_{01}(x,t), g_{02}(t)) = \left(\psi(x,t), \frac{1}{\varphi_0}\left[f''(t) - \int_0^l \psi_t(x,t)dx\right]\right).$$

Теорема 1. *Припустимо, що* $f(t) \in C^2[0,T]$, $\varphi_0 \neq 0$ *і всі умови леми* 1 *виконано. Тоді для будь-яких фіксованих* $l > 0$ *і* $T > 0$ *операторне рівняння* (3.3) *має єдиний розв'язок в області* D_{lT}.

Доведення. Визначимо для невідомої вектор-функції $g(x,t) \in C(D_{lT})$ вагову норму

$$\|g\|_\sigma = \max\left\{\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|g_1(x,t)e^{-\sigma t}\right|, \sup_{t\in[0,T]}\left|g_2(t)e^{-\sigma t}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\|g_1\|_\sigma, \|g_2\|_\sigma\right\}, \quad \sigma \geq 0.$$

При $\sigma = 0$ ця норма збігається зі звичайною нормою

$$\|g\| = \max\left\{\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_1(x,t)|, \sup_{t\in[0,T]}|g_2(t)|\right\}.$$

Число $\sigma \geq 0$ виберемо пізніше. Позначимо через $B(g_0,\rho)$ кулю радіуса $\rho > 0$ з центром у точці g_0 простору $C(D_{lT})$, тобто $B(g_0,\rho) = \{g \in C(D_{lT})\colon \|g - g_0\|_\sigma \leq \rho\}$. Число $\rho > 0$ буде визначено пізніше.

Очевидно, $\|g\| \leq \rho + \|g_0\|$ для $g(x,t) \in B(g_0,\rho)$. Ми покажемо, що оператор A є стискаючим у банаховому просторі $C(D_{lT})$ з уведеною вище ваговою нормою, якщо числа σ і ρ вибрано відповідним чином. Нагадаємо, що оператор A є стискаючим, якщо виконано такі умови:

1) якщо $g(x,t) \in B(g_0,\rho)$, то $Ag \in B(g_0,\rho)$;

2) якщо g^1, g^2 — будь-які два елементи з $B(g_0,\rho)$, то нерівність $\|Ag^1 - Ag^2\|_\sigma \leq \mu\|g^1 - g^2\|_\sigma$ виконується з $\mu \in (0,1)$.

Зауважимо, що вагова норма $\|\cdot\|_\sigma$ еквівалентна звичайній нормі $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\|_\sigma \leq \|\cdot\| \leq e^{\sigma T}\|\cdot\|_\sigma, \quad \sigma > 0. \tag{3.6}$$

Оператор згортки є комутативним й інваріантним щодо множення на $e^{-\sigma t}$:

$$(h_1 * h_2)(t) = \int\limits_0^t h_1(t-s)h_2(s)ds = \int\limits_0^t h_1(s)h_2(t-s)ds = (h_2 * h_1)(t), \tag{3.7}$$

$$e^{-\sigma t}(h_1 * h_2)(t) = (e^{-\sigma t}h_1(t)) * (e^{-\sigma t}h_2(t)). \tag{3.8}$$

З останньої формули випливає оцінка

$$\|h_1 * h_2\|_\sigma \leq \|h_1\|_\sigma \|h_2\|_\sigma T. \tag{3.9}$$

І навіть більше, оскільки

$$\int\limits_0^t e^{-\sigma s}ds = \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-s)}ds \leq \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma > 0, \tag{3.10}$$

використовуючи (3.6) і результати роботи [10], отримуємо нерівності

$$\|h_1 * h_2\|_\sigma \leq \frac{1}{\sigma}\|h_1\|\|h_2\|_\sigma \leq \frac{1}{\sigma}\|h_1\|\|h_2\|, \quad \sigma > 0. \tag{3.11}$$

Спочатку перевіримо виконання першої умови стискаючого відображення. Для простоти позначимо $\varphi_1 = \max_{x\in[0,l]} |\varphi(x)|$. Нехай $g(x,t)$ — елемент кулі $B(g_0,\rho)$, тобто $g \in B(g_0,\rho)$. Тоді для $(x,t) \in D_{lT}$ маємо

$$\|A_1 g - g_{01}\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_{lT}} |(A_1 g - g_{01})e^{-\sigma t}| =$$

$$= \sup_{(x,t)\in D_{lT}} e^{-\sigma t} \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)g_2(\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) \int\limits_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in D_{lT}} \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)g_2(\tau)e^{-\sigma\tau}\varphi(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)}d\xi d\tau \right| +$$

$$+ \sup_{(x,t)\in D_{lT}} \left| \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) \int\limits_0^\tau g_2(\alpha)e^{-\sigma\alpha}g_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)}d\alpha d\xi d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{\rho + \|g_0\|}{\sigma}(\varphi_1 + (\rho + \|g_0\|)T).$$

Якщо ми виберемо σ як

$$\sigma \geq \sigma_1 = \frac{\rho}{(\rho + g_0)(\varphi_1 + (\rho + \|g_0\|)T)},$$

то $\|A_1 g - g_{01}\|_\sigma \le \rho$, тобто перша умова стискаючого відображення для оператора A_1 виконується.

Тепер знайдемо оцінку для A_2:

$$\|A_2 g - g_{02}\|_\sigma = \sup_{t\in(0,T)} |(A_2 g - g_{02})e^{-\sigma t}| =$$

$$= \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} e^{-\sigma t} \left| \int_0^l \int_0^t g_2(\tau) \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi) d\xi d\tau dx + \int_0^l \int_0^t g_2(\alpha) g_1(x,t-\alpha) d\alpha dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau g_2(\alpha) g_1(\xi,\tau-\alpha) d\alpha d\xi d\tau dx) \right| \le$$

$$\le \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t g_2(\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi) d\xi d\tau dx \right| +$$

$$+ \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t g_2(\alpha) e^{-\sigma\alpha} g_1(x,t-\alpha) e^{-\sigma(t-\alpha)} d\alpha dx \right| +$$

$$+ \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau g_2(\alpha) e^{-\sigma\alpha} g_1(\xi,\tau-\alpha) e^{-\sigma(\tau-\alpha)} d\alpha d\xi d\tau dx \right|.$$

Позначивши доданки в останній формулі через $I_i,\ i = 1,2,3$, оцінимо кожен із них. Для I_1 отримуємо

$$I_1 = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t g_2(\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi) d\xi d\tau dx \right| \le$$

$$\le \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \|g_2\|_\sigma \sup_{t\in(0,T)} \left| \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau dx \right| \le \frac{2l\varphi_1(\rho + \|g_0\|)}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma}.$$

З урахуванням співвідношень (3.6) – (3.11) оцінюємо I_2 таким чином:

$$I_2 = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t g_2(\alpha) g_1(x,t-\alpha) e^{-\sigma t} d\alpha dx \right| = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l (g_2 * g_1)(t) e^{-\sigma t} dx \right| =$$

$$= \frac{1}{\varphi_0} \sup_{t\in(0,T)} \left| \int_0^l \Big\{ \left[(g_2 - g_{02}) * (g_1 - g_{01})\right](t) + (g_2 * g_{01})(t) + \right.$$

$$\left. + (g_1 * g_{02})(t) - (g_{02} * g_{01})(t) \Big\} e^{-\sigma t} dx \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{\varphi_0} \int\limits_0^l \left(\|g_2 - g_{02}\|_\sigma \|g_1 - g_{01}\|_\sigma T + \frac{1}{\sigma} \|g_2\|_\sigma \|g_{01}\| + \frac{1}{\sigma} \|g_1\|_\sigma \|g_{01}\| + \frac{1}{\sigma} \|g_{01}\|_\sigma \|g_{02} \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{l}{\varphi_0} \left(\rho^2 T + \frac{2}{\sigma} (\rho + \|g_0\|) \|g_0\| + \frac{1}{\sigma} \|g_0\|^2 \right).$$

Як і у випадку I_1, для I_3 маємо

$$I_3 = \sup_{t \in (0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int\limits_0^l \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int\limits_0^l G_t(x, \xi, t-\tau) \int\limits_0^\tau g_2(\alpha) e^{-\sigma\alpha} g_1(\xi, \tau - \alpha) e^{-\sigma(\tau-\alpha)} d\alpha d\xi d\tau dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varphi_0} \|g_1\|_\sigma \|g_2\|_\sigma \sup_{t \in (0,T)} \left| \int\limits_0^l \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int\limits_0^l G_t(x, \xi, t-\tau) d\xi d\tau dx \right| \leq \frac{2lT(\rho + \|g_0\|)^2}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma}.$$

Відповідно отримуємо

$$\|A_2 g - g_{02}\|_\sigma \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{2l\varphi_1(\rho + \|g_0\|)}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma} + \frac{\rho^2 lT}{\varphi_0} + \frac{2l(\rho + \|g_0\|)\|g_0\|}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma} +$$

$$+ \frac{l\|g_0\|^2}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma} + \frac{2lT(\rho + \|g_0\|)^2}{\varphi_0} \frac{1}{\sigma}. \tag{3.12}$$

Тепер ми можемо вибрати ρ і σ так, щоб виконувались нерівності

$$\frac{\rho^2 lT}{\varphi_0} < \frac{1}{3}\rho,$$

$$\frac{l\|g_0\|^2}{\varphi_0 \sigma} < \frac{1}{3}\rho,$$

$$\frac{2l(\rho + \|g_0\|)(\varphi_1 + \|g_0\| + T(\rho + \|g_0\|))}{\varphi_0 \sigma} < \frac{1}{3}\rho.$$

Із цих співвідношень випливають нерівності

$$\rho < \frac{\varphi_0}{3Tl} =: \rho_1,$$

$$\beta_1 := \frac{9l^2 \|g_0\|^2 T}{\varphi_0^2} < \sigma,$$

$$\beta_2 := \frac{18Tl^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{3Tl} + \|g_0\| \right) \left(\varphi_1 + \|g_0\| + T \left(\frac{\varphi_0}{3Tl} + \|g_0\| \right) \right) < \sigma,$$

тоді $A_2 g \in B(g_0, \rho)$.

Таким чином, якщо

$$\sigma > \sigma_2 = \max\{\beta_1, \beta_2\} \tag{3.13}$$

і $\rho \in (0, \rho_1)$, то оператор A_2 відображає $B(g_0, \rho)$ в себе, тобто $A_2 g \in B(g_0, \rho)$.

Отже, якщо σ, ρ задовольняють умови $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\rho \in (0, \rho_1)$, то оператор A відображає $B(g_0, \rho)$ в себе, тобто $Ag \in B(g_0, \rho)$.

Перевіримо виконання другої умови стискаючого відображення. У відповідності з (3.4) для першої компоненти оператора A отримуємо

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_1\|_\sigma \leq \sup_{(x,t)\in D_{lT}} \left| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)[g_2^1(\tau) - g_2^2(\tau)]\varphi(\xi)d\xi d\tau e^{-\sigma t} \right| +$$

$$+ \sup_{(x,t)\in D_{lT}} \left| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau \left[g_2^1(\alpha)g_1^1(\xi,\tau-\alpha) - g_2^2(\alpha)g_1^2(\xi,\tau-\alpha)\right] d\alpha d\xi d\tau e^{-\sigma t} \right|.$$

Підінтегральну функцію в останньому інтегралі можна оцінити таким чином:

$$\left\|g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right\|_\sigma = \left\|(g_2^1 - g_2^2)g_1^1 + g_2^2(g_1^1 - g_1^2)\right\|_\sigma \leq$$

$$\leq 2\left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma \max\left(\left\|g_1^1\right\|_\sigma, \left\|g_2^2\right\|_\sigma\right) \leq 2(\|g_0\| + \rho)\left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma.$$

Отже,

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_1\|_\sigma \leq \frac{1}{\sigma}\left(\varphi_1 + 2(\rho + \|g_0\|)T\right)\|g^1 - g^2\|_\sigma.$$

Зрозуміло, що якщо ми виберемо σ як $\sigma > \sigma_3 = \varphi_1 + 2(\rho + \|g_0\|)$, то $\|(Ag^1 - Ag^2)_1\|_\sigma \leq \leq \dfrac{\sigma_3}{\sigma}\left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma$, тобто виконується друга умова стискаючого відображення для A_1.

Для другої компоненти оператора A аналогічні оцінки можна отримати у вигляді

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_2\|_\sigma = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t \left[g_2^1 - g_2^2\right](\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx e^{-\sigma t} \right| + \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t \left[g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right] e^{-\sigma t} d\alpha dx \right| +$$

$$+ \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau \left[g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right] e^{-\sigma t} d\alpha d\xi d\tau dx \right|.$$

Позначимо доданки в цій рівності через J_1, J_2, J_3 й оцінимо кожен із них. Для J_1 одержуємо

$$J_1 = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t [g_2^1 - g_2^2](\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau dx \right| \leq \frac{1}{\sigma}\frac{2l\varphi_1}{\varphi_0}\|g^1 - g^2\|_\sigma.$$

Враховуючи, що

$$g_2^1 * g_1^1 - g_2^2 * g_1^2 = \left(g_1^2 - g_2^2\right) * \left(g_1^1 - g_{01}\right) + \left(g_1^1 - g_1^2\right) * \left(g_2^2 - g_{02}\right) +$$

$$+g_{01} * \left(g_2^1 - g_2^2\right) + g_{02} * \left(g_1^1 - g_1^2\right),$$

оцінюємо J_2 і J_3 таким чином:

$$J_2 = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t \left[g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right] e^{-\sigma t} d\alpha dx \right| = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \left[g_2^1 * g_1^1 - g_2^2 * g_1^2\right] e^{-\sigma t} dx \right| \le$$

$$\le \frac{l}{\varphi_0} \Big[\left\|g_1^2 - g_2^2\right\|_\sigma \left\|g_1^1 - g_{01}\right\|_\sigma T + \left\|g_1^1 - g_1^2\right\|_\sigma \left\|g_2^2 - g_{02}\right\|_\sigma T + \|g_{01}\|_\sigma \left\|g_2^1 - g_2^2\right\|_\sigma +$$

$$+ \|g_{02}\|_\sigma \left\|g_1^1 - g_1^2\right\|_\sigma \Big] \le \frac{2l}{\varphi_0} \left(\rho T + \frac{1}{\sigma}\|g_0\|\right) \left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma,$$

$$J_3 = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau \left(\left(g_2^1 - g_2^2\right) g_1^1 + \left(g_1^1 - g_1^2\right) g_2^2\right) e^{-\rho t} d\alpha d\xi d\tau dx \right| \le$$

$$\le \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau \left(g_2^1 - g_2^2\right) e^{-\sigma\alpha} g_1^1 e^{-\sigma(\tau-\alpha)} d\alpha d\xi d\tau dx \right| +$$

$$+ \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\varphi_0} \left| \int_0^l \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int_0^l G_t(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau \left(g_1^1 - g_1^2\right) e^{-\sigma\alpha} g_2^2 e^{-\sigma(\tau-\alpha)} d\alpha d\xi d\tau dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma} \frac{4(\rho + \|g_0\|) l T}{\varphi_0} \|g^1 - g^2\|_\sigma.$$

Підсумовуючи отримані оцінки для $J_i,\ i = 1,2,3$, маємо

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_2\|_\sigma \le J_1 + J_2 + J_3 \le \frac{2l}{\varphi_0} \left(\rho T + \frac{\varphi_1}{\sigma} + \frac{\|g_0\|}{\sigma} + \frac{2(\rho + \|g_0\|)T}{\sigma}\right) \left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma.$$

Виберемо тепер числа σ, ρ так, щоб вираз при $\left\|g^1 - g^2\right\|_\sigma$ став меншим за 1, тобто щоб нерівність

$$\frac{2l}{\varphi_0} \left(\frac{\varphi_1}{\sigma} + \rho T + \frac{\|g_0\|}{\sigma} + \frac{2(\rho + \|g_0\|)T}{\sigma}\right) < 1$$

виконувалась. Ця нерівність виконується, якщо числа σ і ρ вибрано з умов

$$\frac{2\rho T l}{\varphi_0} < \frac{1}{3},$$

$$\frac{2l}{\varphi_0 \sigma} (\varphi_1 + \|g_0\|) < \frac{1}{3},$$

$$\frac{4lT}{\varphi_0 \sigma} (\rho + \|g_0\|) < \frac{1}{3}.$$

Розв'язуючи ці нерівності щодо σ і ρ, знаходимо

$$\rho < \frac{\varphi_0}{6Tl} = \rho_2,$$

$$\sigma_4 = \frac{6l}{\varphi_0}(\varphi_1 + \|g_0\|) < \sigma,$$

$$\sigma_5 = \frac{2\varphi_0 + 12lT\|g_0\|}{\varphi_0} < \sigma.$$

Із цих оцінок зрозуміло, що якщо σ і ρ вибрано з умов $\sigma > \sigma_4$ і $\rho < (0, \rho_2)$, то оператор A_2 задовольняє другу умову стискаючого відображення.

Таким чином, ми робимо висновок, що якщо для σ і ρ виконуються умови $\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ і $\rho \in (0, \min(\rho_1, \rho_2)) = (0, \rho_2)$, то оператор A здійснює стиснене відображення кулі $B(g_0,\ \rho)$ в себе і, згідно з теоремою Банаха [12, с. 87 – 97], у цій кулі має єдину нерухому точку, тобто існує єдиний розв'язок операторного рівняння (3.3).

Теорему 1 доведено.

4. Обернена задача 2. У першому пункті обернену задачу 2 було зведено до задачі визначення ядра $k(t), t \in (0, T)$, з рівнянь (1.6) – (1.8) і (1.10). У цьому випадку для отримання інтегрального рівняння щодо ядра $k(t)$ ми використовуємо рівняння (1.11) для розв'язання прямої задачі та додаткову умову (1.10). В результаті маємо

$$k(t) = \frac{1}{\varphi(x_0)}(f''(t) - \psi'_t(x_0, t)) - \frac{1}{\varphi(x_0)}\int\limits_0^l G(x_0, \xi, 0)\int\limits_0^t k(\alpha)\vartheta(\xi, t-\alpha)d\alpha d\xi -$$

$$-\frac{1}{\varphi(x_0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_t(x_0, \xi, t-\tau)\int\limits_0^\tau k(\alpha)\vartheta(\xi, \tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau. \qquad (4.1)$$

Запишемо систему інтегральних рівнянь (1.11) і (4.1) у вигляді операторного рівняння

$$Ag = g, \qquad (4.2)$$

де $g = (g_1\ g_2) = (\vartheta(x, t),\ k(t))$ — невідома вектор-функція, $A = (A_1, A_2)$ визначається правими частинами рівнянь (1.11) і (4.1).

Теорема 2. *Припустимо, що* $f(t) \in C^2[0, T]$, $\varphi(x_0) \neq 0$ *і всі умови леми* 1 *виконано. Тоді для будь-яких фіксованих* $l >$ *і* $T > 0$ *операторне рівняння* (4.2) *має єдиний розв'язок в області* D_{lT}.

Доведення. Введемо вектор-функцію за допомогою формули

$$g_0(x, t) = (g_{01},\ g_{02})\,(x, t) = \left(\psi(x, t),\ \frac{1}{\varphi(x_0)}\left(f''(t) - \psi'_t(x_0, t)\right)\right).$$

Тоді у відповідності з рівностями (1.11) і (4.1) компоненти оператора A мають вигляд

$$Ag_1 = \psi(x, t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x, \xi, t-\tau)\left[g_2(\tau)\varphi(\xi) + \int\limits_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi, \tau-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau,$$

$$Ag_2 = \frac{1}{\varphi(x_0)}\left(f''(t) - \psi'_t(x_0, t)\right) - \frac{1}{\varphi(x_0)}\int\limits_0^l G(x_0, \xi, 0)\int\limits_0^t g_2(\alpha)g_1(\xi, t-\alpha)d\alpha d\xi -$$

$$-\frac{1}{\varphi(x_0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_t(x_0,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau.$$

Умови стисливості для оператора A_1 отримано в попередньому пункті. Тут достатньо знайти умови стисливості для A_2. Нехай $g(x,t)\in B(D_{lT})$. Тоді виконуються такі співвідношення:

$$\|A_2g-g_{02}\|_\sigma\le\sup_{t\in(0,T)}\frac{1}{\varphi(x_0)}\left|\int\limits_0^l G(x_0,\xi,0)\int\limits_0^t g_2(\alpha)g_1(\xi,t-\alpha)e^{-\sigma t}d\alpha d\xi\right|+$$

$$+\frac{1}{\varphi(x_0)}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_t(x_0,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma t}d\alpha d\xi d\tau\right|=P_1+P_2,$$

$$P_1=\sup_{t\in(0,T)}\frac{1}{\varphi(x_0)}\left|\int\limits_0^l G(x_0,\xi,0)(g_2*g_1)(t)e^{-\sigma t}d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\varphi_0}\left(\rho^2T+\frac{2}{\sigma}(\rho+\|g_0\|)\|g_0\|+\frac{1}{\sigma}\|g_0\|^2\right),$$

$$P_2=\frac{1}{\varphi(x_0)}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_t(x_0,\xi,t-\tau)\int\limits_0^\tau g_2(\alpha)g_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma t}d\alpha d\xi d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{2T(\rho+\|g_0\|)^2}{\sigma\varphi(x_0)},$$

$$\|A_2g-g_{02}\|_\sigma\le\frac{1}{\varphi(x_0)}\left(\rho^2T+\frac{2}{\sigma}(\rho+\|g_0\|)\|g_0\|+\frac{1}{\sigma}\|g_0\|^2\right)+\frac{2T(\rho+\|g_0\|)^2}{\sigma\varphi(x_0)}.$$

Нехай

$$\rho<\frac{\varphi(x_0)}{3T}=\kappa_3,$$

$$\theta_1=\frac{6T}{\varphi^2(x_0)}\left(\frac{\varphi(x_0)}{3T}+\|g_0\|\right)\left(\|g_0\|+T\left(\frac{\varphi(x_0)}{3T}+\|g_0\|\right)\right)<\sigma,$$

$$\theta_2=\frac{9T\|g_0\|^2}{\varphi^2(x_0)}<\sigma.$$

Тоді якщо $\sigma>\max(\theta_1,\theta_2)=\beta_5,\ \rho<\kappa_3$, то $A_2g\in B(g_0,\rho)$.

Отже, якщо нерівність $\sigma>\sigma_1=\max(\beta_0,\beta_5)$ виконується, то оператор A відображає кулю $B(g_0,\rho)$ в себе.

Тепер перевіримо виконання другої умови стискаючого відображення. Маємо

$$\|(Ag^1-Ag^2)_1\|_\sigma\le\frac{1}{\sigma}(\varphi_1+2(\rho+\|g_0\|)T)\|g^1-g^2\|_\sigma.$$

Другу компоненту оператора Ag можна оцінити аналогічно:

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_2\|_\sigma \left(\frac{2\rho T}{\varphi(x_0)} + \frac{2\|g_0\|}{\sigma\varphi(x_0)} + \frac{4T(\rho + \|g_0\|)}{\varphi(x_0)\sigma}\right) \|g^1 - g^2\|_\sigma.$$

Нехай справджуються такі співвідношення:

$$\rho < \frac{\varphi(x_0)}{6T} = \kappa_4,$$

$$\theta_3 = \frac{6\|g_0\|}{\varphi(x_0)} < \sigma,$$

$$\theta_4 = \frac{2(\varphi(x_0) + 6T\|g_0\|)}{\varphi(x_0)} < \sigma,$$

$$\theta_5 = 2\varphi_1 < \sigma,$$

$$\theta_6 = \frac{2}{3}\varphi(x_0) + 4\|g_0\|T < \sigma.$$

Звідси випливає, що якщо $\sigma,\ \rho$ вибрано з умов $\sigma > \sigma_2 = \max(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6),\ \rho < \kappa_4$, то оператор A на множині $B(g_0, \rho)$ є стискаючим відображенням.

Таким чином, якщо числа $\sigma,\ \rho$ задовольняють умови $\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2),\ \rho < \min(\kappa_3, \kappa_4)$, то згідно з принципом стискаючих відображень оператор A на множині $B(g_0, \rho)$ має єдину нерухому точку.

Теорему 2 доведено.

Література

1. В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, Москва (1984).
2. A. Lorenzi, E. Sinestrari, *An inverse problem in the theory of materials with memory*, Nonlinear Anal., **12**, 411 – 423 (1988).
3. D. K. Durdiev, *An inverse problem for a three-dimensional wave equation in the medium with memory*, Math. Anal. and Discrete Math., 19 – 26 (1989) (in Russian).
4. D. K. Durdiev, *Question of well-posedness of a certain inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation*, Sib. Mat. Zh., **33**, № 3, 427 – 433 (1992) (in Russian).
5. C. Cavaterra, M. Grasselli, *Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type*, Math. Models and Methods Appl. Sci., **4**, № 6, 807 – 842 (1994).
6. K. Karuppiah, J. K. Kim, K. Balachandran, *Parameter identification of an integro-differential equation*, Nonlinear Funct. Anal. and Appl., **20**, № 2, 169 – 185 (2015).
7. D. K. Durdiev, Zh. Zh. Zhumaev, *Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation*, Methods Funct. Anal. and Topology, **25**, № 3, 219 – 226 (2019).
8. Д. К. Дурдиев, А. С. Рашидов, *Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа*, Дифференц. уравнения, **50**, № 1, 110 – 116 (2014).
9. Д. К. Дурдиев, *О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **19**, № 4, 658 – 666 (2015).
10. J. Janno, L. V. Wolfersdorf, *Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow*, Ill-Posed Problems, **4**, № 1, 39 – 66 (1996).
11. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1977).
12. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1972).

Одержано 04.04.20