DOI: 10.37863/umzh.v73i11.6699

УДК 517.586+517.538.3

М. А. Сухорольський, О. В. Веселовська, В. В. Достойна (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

СИСТЕМИ ПОЛІНОМІВ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ, СПОРІДНЕНІ З КЛАСИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

We investigate the properties of systems of complex variable polynomials represented as the contour integrals with kernel functions analytic at infinity. Conditions for existence of functions associated with these polynomials and sufficient conditions of expansion of analytic functions into series in these polynomials are established. Expansions of functions into series in classical orthogonal polynomials in a complex domain, integral representations for such polynomials, dependencies of monomials z^n of these polynomials, and other relations can be obtained as the corollaries implied by our results.

Досліджуються властивості систем поліномів комплексної змінної, які задаються у вигляді контурних інтегралів з ядерними функціями, аналітичними в нескінченно віддаленій точці. Сформульовано умови існування асоційованих з поліномами функцій, а також достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за цими поліномами. З проведених досліджень можна отримати розвинення функцій за системами класичних ортогональних поліномів у комплексних областях, інтегральні зображення деяких класичних поліномів, залежності степенів комплексної змінної від цих поліномів, а також інші співвідношення.

Вступ. Властивості ортогональних систем поліномів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними досить ґрунтовно досліджено в науковій літературі і, зокрема, викладено у роботах [2, 3, 5]. Значно менше досліджень стосуються властивостей ортогональних систем поліномів комплексної змінної. Так, у роботі [2] отримано розвинення аналітичних функцій у комплексних областях за системою поліномів Чебишова першого роду. В роботах [6 – 11] розглянуто класичні системи поліномів комплексної змінної, побудовано біортогональні (на замкненому контурі комплексної площини) з ними системи функцій і досліджено розвинення аналітичних функцій за системами таких поліномів.

У даній роботі введено систему поліномів комплексної змінної, інтегральне зображення яких задається за аналогічною з поліномами Лежандра формулою [7]

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \left(x \pm it\sqrt{1-x^2}\right)^n \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

де $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{C_{2k}^k}{2^{2k}t^{2k+1}}$, $|t|>1$, C_{2k}^k — біноміальні коефіцієнти, K — додатно орієнтоване коло $|t|=r$, $1<r<\infty$. Досліджено властивості таких поліномів, побудовано системи функцій, біортогональних з ними на замкнених кривих комплексної площини. Знайдено оцінки для поліномів і асоційованих з ними функцій та встановлено достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за цією системою поліномів у комплексних областях.

1. Поліноми $Q_n(z)$ та їхні властивості. Розглянемо систему поліномів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ комплексної змінної z:

$$Q_n(z) = Q_n(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \gamma(t)dt, \tag{1.1}$$

де

$$\gamma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2k}}{t^{2k+1}},\qquad \gamma_0=1,\quad \gamma_{2k}\neq 0, \tag{1.2}$$

— довільна аналітична в області $|t|>1$ функція, K — додатно орієнтоване коло $|t|=r$, $1<r<\infty$. Нехай C_n^m — біноміальні коефіцієнти, а $\delta_{nm}=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n\end{cases}$ — символ Кронекера.

Твердження 1.1. *Для поліномів $Q_n(z)$ справедливі явні вирази:*

$$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{[n/2]}A_j^n z^{n-2j},\quad n=0,1,\ldots, \tag{1.3}$$

де

$$A_j^n=A_j^n(\gamma)=(-1)^j\sum_{k=j}^{[n/2]}C_n^{2k}C_k^j\gamma_{2k}. \tag{1.4}$$

Доведення. Підставляючи у співвідношення (1.1) розвинення (1.2) і враховуючи відомий інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{dz}{(z-a)^n}=\delta_{n1}, \tag{1.5}$$

де l — довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається в додатному напрямку, знаходимо

$$Q_n(z)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m z^{n-m}\left(z^2-1\right)^{m/2}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K\frac{dt}{t^{2k-m+1}}=\sum_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}\gamma_{2k}z^{n-2k}(z^2-1)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}\gamma_{2k}z^{n-2k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^jz^{2k-2j}=\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^jz^{n-2j}\sum_{k=j}^{[n/2]}C_n^{2k}C_k^j\gamma_{2k},$$

звідки, враховуючи (1.4), отримуємо формули (1.3).

Із співвідношень (1.3) одержуємо вирази поліномів $Q_n(z)$ у випадку парних та непарних значень n:

$$Q_{2n}(z)=\sum_{l=0}^{n}A_{n-l}^{2n}z^{2l},\qquad Q_{2n+1}(z)=\sum_{l=0}^{n}A_{n-l}^{2n+1}z^{2l+1}. \tag{1.6}$$

Зауважимо, що за умови $\gamma_0=1$ маємо $Q_0(z)=1$.

Наведемо деякі властивості поліномів $Q_n(z)$.

Твердження 1.2. *Для поліномів $Q_n(z)$ справджуються формули*

$$Q_0(z)-Q_0(t)=0,\qquad \frac{Q_n(z)-Q_n(t)}{z-t}=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}A_k^n\sum_{m=0}^{n-2k-1}z^{n-2k-1-m}t^m,\ \ n=1,2,\ldots.$$

Доведення. Враховуючи співвідношення (1.3), знаходимо різницю

$$Q_n(z)-Q_n(t)=\sum_{k=0}^{[n/2]}A_k^n\left(z^{n-2k}-t^{n-2k}\right)=(z-t)\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}A_k^n\sum_{m=0}^{n-2k-1}z^{n-2k-1-m}t^m.$$

Звідси отримуємо потрібні формули.

Твердження 1.3. *Якщо існує неспадна на відрізку* $[-1;1]$ *функція* $\nu(\xi)$ *з обмеженою варіацією така, що*

$$\gamma_{2k} = \int_{-1}^{1} \xi^{2k} d\nu(\xi), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.7}$$

то

$$0 < \gamma_{2k} \leq 1 \tag{1.8}$$

і має місце інтегральне зображення поліномів $Q_n(z)$:

$$Q_n(z) = \int_{-1}^{1} \left(z + \xi\sqrt{z^2-1}\right)^n d\nu(\xi). \tag{1.9}$$

Доведення. Умова (1.8) є наслідком інтегрального зображення (1.7). Справді, застосовуючи теорему про середнє до інтеграла в (1.7) і враховуючи рівність

$$\int_{-1}^{1} d\nu(\xi) = \gamma_0 = 1, \tag{1.10}$$

одержуємо $\gamma_{2k} = \xi_0^{2k} \int_{-1}^{1} d\nu(\xi) = \xi_0^{2k}$, де $\xi_0 \in [-1;1]$. Звідси випливає (1.8).

Запишемо формулу (1.7) у вигляді

$$\gamma_k = \int_{-1}^{1} \xi^k d\nu(\xi). \tag{1.11}$$

Тоді $\gamma_{2k+1} = 0,\ k = 0, 1, \ldots$. Помножимо співвідношення (1.11) на t^{-k-1} і підсумуємо обидві частини отриманої рівності по k. Враховуючи розвинення (1.2), отримуємо зображення $\gamma(t) = \int_{-1}^{1} \dfrac{d\nu(\xi)}{t-\xi}$, $|t| > 1$. Підставляючи його у співвідношення (1.1) і враховуючи формулу Коші, одержуємо зображення (1.9).

Позначимо через D_R область, межею якої є еліпс Γ_R з рівнянням

$$z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + R^{-1}e^{i\varphi}\right), \qquad R > 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{1.12}$$

Твердження 1.4. *За умов твердження* 1.3 *для поліномів* $Q_n(z)$ *справедливими є оцінки*

$$|Q_n(x)| \leq 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.13}$$

для всіх дійсних x *таких, що* $|x| \leq 1$;

$$|Q_n(z)| \leq R^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.14}$$

для $z \in \overline{D_R}$.

Доведення. Враховуючи нерівність $x^2 - \xi^2 x^2 + \xi^2 \le 1$, яка справедлива для всіх x і ξ таких, що $|x| \le 1$, $|\xi| \le 1$, та рівність (1.10), одержуємо

$$|Q_n(x)| \le \int\limits_{-1}^{1} \left| x + i\xi\sqrt{1-x^2} \right|^n d\nu(\xi) = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + \xi^2(1-x^2)\right)^{n/2} d\nu(\xi) \le 1.$$

Поліном $Q_n(z)$ задовольняє умови теореми [3, c.166]: якщо для полінома $W_n(z)$ n-го степеня на відрізку $[-1, 1]$ виконується нерівність $|W_n(x)| \le M$, де $M = \mathrm{const}$, то для будь-якого z ззовні цього відрізка справедливою є оцінка

$$|W_n(z)| \le M(a+b)^n,$$

де a, b — півосі еліпса з фокусами в точках $z = \mp 1$, який проходить через точку z. Звідси, оскільки півосі еліпса Γ_r, $1 < r \le R$, з рівнянням (1.12) відповідно дорівнюють $\dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$, одержуємо нерівність (1.14).

Твердження 1.5. *Система степенів* $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ *однозначно виражається через поліноми* $Q_n(z)$, *тобто справджуються співвідношення*

$$z^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \beta_k^n Q_{n-2k}(z) \tag{1.15}$$

або

$$z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}^{2n} Q_{2k}(z), \qquad z^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}^{2n+1} Q_{2k+1}(z), \tag{1.16}$$

де β_k^n — *коефіцієнти, які визначаються із системи лінійних рівнянь*

$$\sum_{k=r}^{n} A_{n-k}^{2n} \beta_{k-r}^{2k} = \delta_{nr}, \qquad \sum_{k=r}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \beta_{k-r}^{2k+1} = \delta_{nr}. \tag{1.17}$$

Доведення. Підставляючи співвідношення (1.16) в (1.6) та змінюючи порядок підсумовування, для парних і непарних степенів поліномів $Q_n(z)$ отримуємо такі вирази:

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} z^{2k} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} \sum_{r=0}^{k} \beta_{k-r}^{2k} Q_{2r}(z) = \sum_{r=0}^{n} Q_{2r}(z) \sum_{k=r}^{n} A_{n-k}^{2n} \beta_{k-r}^{2k},$$

$$Q_{2n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n+1} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \sum_{r=0}^{k} \beta_{k-r}^{2k+1} Q_{2r+1}(z) = \sum_{r=0}^{n} Q_{2r+1}(z) \sum_{k=r}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \beta_{k-r}^{2k+1},$$

де $n = 0, 1, \ldots$. Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів поліномів, одержуємо систему рівнянь (1.17), визначеність якої забезпечує умова

$$A_0^n = \sum_{j=0}^{[n/2]} C_n^{2j} \gamma_{2j} \ne 0, \tag{1.18}$$

що випливає з (1.8).

***Наслідок* 1.1.** *Лінійні рівняння* (1.17) *можна записати у матричній формі*

$$\begin{pmatrix} A_0^0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1^2 & A_0^2 & 0 & 0 & \dots \\ A_2^4 & A_1^4 & A_0^4 & 0 & \dots \\ A_3^6 & A_2^6 & A_1^6 & A_0^6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1^2 & \beta_0^2 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2^4 & \beta_1^4 & \beta_0^4 & 0 & \dots \\ \beta_3^6 & \beta_2^6 & \beta_1^6 & \beta_0^6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_0^1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1^3 & A_0^3 & 0 & 0 & \dots \\ A_2^5 & A_1^5 & A_0^5 & 0 & \dots \\ A_3^7 & A_2^7 & A_1^7 & A_0^7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1^2 & \beta_0^2 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2^4 & \beta_1^4 & \beta_0^4 & 0 & \dots \\ \beta_3^6 & \beta_2^6 & \beta_1^6 & \beta_0^6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

і їхні розв'язки одержати у вигляді визначників. Зокрема, для елементів першого стовпця матриці $[\beta_n^{2n}]$ *знаходимо*

$$\beta_0^0 = \frac{1}{A_0^0}, \qquad \beta_1^2 = -\frac{A_1^2}{A_0^0 A_0^2}, \qquad \beta_2^4 = -\frac{1}{A_0^0 A_0^2 A_0^4} \begin{vmatrix} A_1^4 & A_2^4 \\ A_0^2 & A_1^2 \end{vmatrix},$$

$$\beta_n^{2n} = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^n A_0^{2k}} \begin{vmatrix} A_1^{2n} & A_2^{2n} & \dots & A_{n-1}^{2n} & A_n^{2n} \\ A_0^{2n-2} & A_1^{2n-2} & \dots & A_{n-2}^{2n-2} & A_{n-1}^{2n-2} \\ 0 & A_0^{2n-4} & \dots & A_{n-3}^{2n-4} & A_{n-2}^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_0^2 & A_1^2 \end{vmatrix}, \quad n = 3, 4, \dots,$$

де $A_0^0 = 1$.

Позначимо через E_R простір однозначних аналітичних у крузі $|z| < R,\ 0 < R \le \infty$, функцій комплексної змінної.

Твердження 1.6. *Система поліномів* $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *за виконання умов* (1.18) *незалежна і повна у просторі* E_R.

Доведення. За умов (1.18) коефіцієнти при найстарших степенях поліномів (1.3) відмінні від нуля і степені z^n однозначно виражаються через ці поліноми. Тому система $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ незалежна і повна у просторі E_R [1, с. 137].

2. Асоційовані системи функцій. Розглянемо функцію $f(z) \in E_R$. Її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{2.1}$$

Знайдемо формальне розвинення функції $f(z)$ за поліномами $Q_n(z)$. Підставляючи вирази степенів (1.16) у розклад (2.1) і змінюючи порядок підсумовування, одержуємо

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}^{2n} Q_{2k}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}^{2n+1} Q_{2k+1}(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \beta_{n-k}^{2n} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \right) Q_{2k}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \beta_{n-k}^{2n+1} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \right) Q_{2k+1}(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l}^{2l+2k} \frac{f^{(2l+2k)}(0)}{(2l+2k)!} \right) Q_{2k}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l}^{2l+2k+1} \frac{f^{(2l+2k+1)}(0)}{(2l+2k+1)!} \right) Q_{2k+1}(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l}^{2l+m} \frac{f^{(2l+m)}(0)}{(2l+m)!} \right) Q_m(z). \tag{2.2}$$

Позначимо

$$L_m(f) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l}^{2l+m} \frac{f^{(2l+m)}(0)}{(2l+m)!}. \tag{2.3}$$

Тоді формулу (2.2) можна записати у вигляді

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} L_m(f) Q_m(z). \tag{2.4}$$

Введемо функції $\omega_n(z)$, асоційовані з поліномами $Q_n(z)$ (див. [1, с. 120]):

$$\omega_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^{2j+n} \frac{1}{z^{2j+n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

або

$$\begin{aligned} \omega_{2n}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^{2(j+n)} \frac{1}{z^{2(n+j)+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_{k-n}^{2k} \frac{1}{z^{2k+1}}, \\ \omega_{2n+1}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^{2(j+n)+1} \frac{1}{z^{2(j+n)+2}} = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_{k-n}^{2k+1} \frac{1}{z^{2k+2}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Якщо існує границя

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[2j]{\beta_j^{2j+n}} = \beta < \infty \tag{2.7}$$

для фіксованого значення n, то ряди в (2.5) збігаються і зображають аналітичні в області $|z| > \beta$ функції. Тоді коефіцієнти $L_m(f)$ можна записати в інтегральній формі

$$L_m(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K f(z)\omega_m(z)dz, \tag{2.8}$$

де K — додатно орієнтоване коло $|z| = R,\ R > \beta$.

Означення 2.1. *Систему асоційованих функцій $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ називають біортогональною із системою поліномів $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, якщо справджуються умови*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma V_n(z)\omega_k(z)dz = \delta_{nk},$$

де Γ — додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функції $\omega_k(z)$.

Теорема 2.1. *Системи функцій $\{Q_n(z), \omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ за виконання умов* (1.18) *і* (2.7) *є біортогональними вздовж довільного кусково-гладкого замкненого контура Γ, що охоплює круг $|z| \le \beta$, тобто виконуються рівності*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma Q_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm}. \tag{2.9}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок парних значень індексів у рівності (2.9). Враховуючи співвідношення (1.6), (1.17), (2.6) і відомий інтеграл (1.5), отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma Q_{2n}(z)\omega_{2m}(z)dz = \sum_{l=0}^{n} A_{n-l}^{2n} \sum_{k=m}^{\infty} \beta_{k-m}^{2k} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^{2(k-l)+1}} = \sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n} \beta_{k-m}^{2k} = \delta_{nm}.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma Q_{2n+1}(z)\omega_{2m+1}(z)dz = \sum_{l=0}^{n} A_{n-l}^{2n+1} \sum_{k=m}^{\infty} \beta_{k-m}^{2k+1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^{2(k-l)+1}} = \sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \beta_{k-m}^{2k+1} = \delta_{nm}.$$

Твердження 2.1. *Якщо система поліномів $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на відрізку $[-1; 1]$ з вагою $\alpha(x) \ge 0,\ \alpha(-x) = \alpha(x)$ і, відповідно, існує неспадна функція $u(x)$ з обмеженою варіацією така, що $du(x) = \alpha(x)dx$,*

$$\int\limits_{-1}^{1} du(x) = 1, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{\|Q_n\|^2} \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)du(x) = \delta_{nm}, \tag{2.11}$$

то асоційовані функції аналітичні ззовні відрізка $[-1; 1]$ і задаються в інтегральній формі

$$\omega_n(z) = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)du(x)}{z - x}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.12}$$

де $\|Q_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} Q_n^2(x)du(x)}$ — норма полінома $Q_n(x)$.

Доведення. Запишемо для полінома $Q_n(x)$ інтегральну формулу Коші

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{Q_n(z)dz}{z-x},$$

де Γ — замкнений контур, який є межею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Підставляючи її в (2.11) і змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)du(x)}{z-x} \right) Q_n(z)dz = \|Q_n\|^2.$$

Звідси з урахуванням рівностей (2.9) маємо зображення (2.12).

Аналітичність функцій $\omega_n(z)$ ззовні відрізка $[-1;1]$ випливає з теореми Коші. Згідно з цим ряд в (2.5) збігається в області $|z| > 1$ і, відповідно, $\beta = 1$ у формулі (2.7).

Твердження 2.2. *За умов твердження* 2.1 *справедливими є формули*

$$\beta_n^{2n} = \int\limits_{-1}^{1} x^{2n} du(x), \tag{2.13}$$

$$\|Q_n\|^2 = A_0^n \sum_{l=0}^{[n/2]} A_l^n \beta_{n-l}^{2(n-l)}, \tag{2.14}$$

$$\beta_j^{2j+n} = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \sum_{l=0}^{[n/2]} A_l^n \beta_{n+j-l}^{2(n+j-l)}. \tag{2.15}$$

Доведення. Формулу (2.13) одержуємо з інтегрального зображення (2.12) функції $\omega_0(z)$ з урахуванням її ряду (2.5) і розвинення

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}, \quad |z| > 1. \tag{2.16}$$

Рівність (2.14) випливає з формули для норми полінома $Q_n(x)$ з використанням співвідношень (1.3), (2.13) та умови

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k Q_n(x) du(x) = 0, \quad 0 \le k < n. \tag{2.17}$$

Справді,

$$\|Q_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} Q_n^2(x) du(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} A_k^n \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x) x^{n-2k} du(x) =$$

$$= A_0^n \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x) x^n du(x) = A_0^n \sum_{k=0}^{[n/2]} A_k^n \int\limits_{-1}^{1} x^{2(n-k)} du(x) = A_0^n \sum_{k=0}^{[n/2]} A_k^n \beta_{n-k}^{2(n-k)}.$$

Якщо у формулу (2.12) підставити розвинення (2.16) і врахувати умову (2.17), то матимемо

$$\omega_{2n}(z) = \frac{1}{\|Q_{2n}\|^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}} \int_{-1}^{1} x^{2k} Q_{2n}(x) du(x), \tag{2.18}$$

$$\omega_{2n+1}(z) = \frac{1}{\|Q_{2n+1}\|^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} \int_{-1}^{1} x^{2k+1} Q_{2n+1}(x) du(x). \tag{2.19}$$

Звідси, використовуючи явні вирази поліномів $Q_{2n}(x)$ та формулу (2.13), знаходимо

$$\omega_{2n}(z) = \frac{1}{\|Q_{2n}\|^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{2n} \int_{-1}^{1} x^{2(m+k)} du(x) =$$

$$= \frac{1}{\|Q_{2n}\|^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{2n} \beta_{m+k}^{2(m+k)} = \frac{1}{\|Q_{2n}\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(n+j)+1}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{2n} \beta_{m+n+j}^{2(m+n+j)} =$$

$$= \frac{1}{\|Q_{2n}\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(j+n)+1}} \sum_{l=0}^{n} A_{l}^{2n} \beta_{2n+j-l}^{2(2n+j-l)}. \tag{2.20}$$

Аналогічно

$$\omega_{2n+1}(z) = \frac{1}{\|Q_{2n+1}\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(j+n+1)}} \sum_{l=0}^{n} A_{l}^{2n+1} \beta_{2n+j-l+1}^{2(2n+j-l+1)}. \tag{2.21}$$

Збіжність отриманих рядів є наслідком обмеженості їхніх коефіцієнтів

$$\int_{-1}^{1} x^k Q_n(x) du(x).$$

Справді, враховуючи оцінку (1.13) і рівність (2.10), маємо

$$\left| \int_{-1}^{1} x^m Q_n(x) du(x) \right| \le \int_{-1}^{1} |x|^k |Q_n(x)| du(x) \le \int_{-1}^{1} du(x) = 1. \tag{2.22}$$

Об'єднуючи вирази (2.20), (2.21) для $\omega_{2n}(z)$ і $\omega_{2n+1}(z)$, знаходимо

$$\omega_m(z) = \frac{1}{\|Q_m\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2j+m+1}} \sum_{m=0}^{[m/2]} A_l^m \beta_{m+j-l}^{2(m+j-l)}, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{2.23}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля степенів змінної z у виразах (2.5) і (2.23), отримуємо (2.15).

Твердження 2.3. *Якщо виконуються умови твердження* 2.1, *то для асоційованих функцій* $\omega_n(z)$ *справедливими є оцінки*

$$|\omega_n(z)| \le \frac{1}{\|Q_n\|^2 R_0^{n-1}(R_0^2 - 1)}, \quad n = 0, 1, \ldots , \tag{2.24}$$

для $|z| \geq R_0,\ R_0 > 1$;

$$|\omega_n(z)| \leq \frac{4}{\|Q_n\|^2 R^{n-3}(R^2-1)^2}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.25}$$

для $z \in \Gamma_R$, *де* Γ_R — *еліпс з рівнянням* (1.12) *і* $R > 1$.

Доведення. На підставі оцінки (2.22) із співвідношень (2.18), (2.19) знаходимо

$$|\omega_{2m}(z)| \leq \frac{1}{\|Q_{2m}\|^2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2k+1}} \left| \int_{-1}^{1} x^{2k} Q_{2m}(x) du(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|Q_{2m}\|^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2m+2l+1}} = \frac{1}{\|Q_{2m}\|^2} \frac{1}{|z|^{2m-1}(|z|^2-1)},$$

$$|\omega_{2m+1}(z)| \leq \frac{1}{\|Q_{2m+1}\|^2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2k+2}} \left| \int_{-1}^{1} x^{2k+1} Q_{2m+1}(x) du(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|Q_{2m+1}\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2m+2j+2}} = \frac{1}{\|Q_{2m+1}\|^2} \frac{1}{|z|^{2m}(|z|^2-1)}.$$

Звідси, оскільки $|z| \geq R_0$, отримуємо нерівність (2.24).

Відомо [2, с.149], що

$$\frac{1}{z-x} = \frac{4p}{p^2-1} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{0} \frac{T_n(x)}{p^n}, \tag{2.26}$$

де $T_n(x)$ — поліноми Чебишова першого роду,

$$p = z + \sqrt{z^2-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{0} a_n T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n} a_n T_n(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x) + \ldots,$$

$$\varepsilon_{0n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = 0, \\ 1, & n > 0. \end{cases}$$

Підставляючи розвинення (2.26) у співвідношення (2.12) і враховуючи рівність

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) T_n(x) du(x) = 0, \quad n < m,$$

одержуємо

$$\omega_m(z) = \frac{4p}{\|Q_m\|^2(p^2-1)} \sum_{n=m}^{\infty}{}^{0} \frac{1}{p^n} \int_{-1}^{1} Q_m(x) T_n(x) du(x),$$

або

$$\omega_{2m}(z) = \frac{4p}{\|Q_{2m}\|^2(p^2-1)} \sum_{n=m}^{\infty}{}^{0} \frac{1}{p^{2n}} \int_{-1}^{1} Q_{2m}(x) T_{2n}(x) du(x),$$

$$\omega_{2m+1}(z) = \frac{4p}{\|Q_{2m+1}\|^2(p^2-1)} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p^{2n+1}} \int_{-1}^{1} Q_{2m+1}(x) T_{2n+1}(x) du(x).$$

Оцінимо останні два вирази. Використовуючи нерівність [2, с. 46] $|T_n(x)| \le 1$, $n = 0, 1, \dots$, справедливу для дійсних x таких, що $|x| \le 1$, оцінку (1.13) і рівність (2.10), маємо

$$|\omega_{2m}(z)| = \frac{4|p|}{\|Q_{2m}\|^2|p^2-1|} \sum_{n=m}^{\infty}{}^{0} \frac{1}{|p|^{2n}} \left| \int_{-1}^{1} Q_{2m}(x) T_{2n}(x) du(x) \right| \le$$

$$\le \frac{4|p|}{\|Q_{2m}\|^2|p^2-1|} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{|p|^{2n}} = \frac{4}{\|Q_{2m}\|^2|p|^{2m-3}|p^2-1|(|p|^2-1)} \le \frac{4}{\|Q_{2m}\|^2|p|^{2m-3}(|p|^2-1)^2},$$

$$|\omega_{2m+1}(z)| = \frac{4|p|}{\|Q_{2m+1}\|^2|p^2-1|} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{|p|^{2n+1}} \left| \int_{-1}^{1} Q_{2m+1}(x) T_{2n+1}(x) du(x) \right| \le$$

$$\le \frac{4|p|}{\|Q_{2m+1}\|^2|p^2-1|} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{|p|^{2n+1}} \le \frac{4}{\|Q_{2m+1}\|^2|p|^{2m-2}|p^2-1|(|p|^2-1)} \le$$

$$\le \frac{4}{\|Q_{2m+1}\|^2|p|^{2m-2}(|p|^2-1)^2}.$$

Оскільки $z \in \Gamma_R$, то $p = z + \sqrt{z^2-1} = Re^{i\varphi}$, де $\varphi \in [0; 2\pi)$, $|p| = R$, і ми одержуємо оцінку (2.25).

Теорема 2.2. *За виконання умов тверджень* 1.3 *і* 2.1, *а також оцінки*

$$\|Q_n\|^2 \ge \frac{M(b)}{(n+1)^b}, \tag{2.27}$$

де b *— фіксоване число,* $1 < b < \infty$, *справедливим є розвинення*

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)\omega_n(t), \tag{2.28}$$

яке рівномірно збігається для всіх $t \in \overline{D_\rho^\infty}$ *і* $z \in \overline{D_r^0}$, *де* ρ, r *— такі числа, що* $1 < r < \infty$, $\rho > \max\{1, r\}$; $\overline{D_\rho^\infty}$ *— замкнена область з межею* Γ_ρ, *що містить нескінченно віддалену точку*; $\overline{D_r^0}$ *— замкнена область з межею* Γ_r, *що містить нульову точку.*

Доведення. Підставимо у праву частину формули (2.28) вирази асоційованих функцій (2.6), які за умов твердження 2.1 збігаються в області $|t| > 1$, і змінимо порядок підсумовування. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)\omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}(z)\omega_{2n}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n+1}(z)\omega_{2n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}(z) \sum_{k=n}^{\infty} \beta_{k-n}^{2k} \frac{1}{t^{2k+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n+1}(z) \sum_{k=n}^{\infty} \beta_{k-n}^{2k+1} \frac{1}{t^{2k+2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{2k+1}} \sum_{n=0}^{k} \beta_{k-n}^{2k} Q_{2n}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{2k+2}} \sum_{n=0}^{k} \beta_{k-n+1}^{2k+1} Q_{2n+1}(z).$$

Враховуючи в останніх виразах співвідношення (1.16) і умови $|t| > 1,\ |z| < |t|$, знаходимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)\omega_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{t^{2k+2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{t^{j+1}} = \frac{1}{t} \frac{1}{1 - \dfrac{z}{t}} = \frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд у співвідношенні (2.28) рівномірно збіжний для $t \in \overline{D_\rho^\infty}$ і $z \in \overline{D_r^0}$. Для асоційованих функцій в області $\overline{D_\rho^\infty}$ виконується нерівність

$$|\omega_n(z)| \le \frac{M_0(n+1)^b}{\rho^n}, \quad M_0 = \mathrm{const}, \tag{2.29}$$

яка випливає з оцінок (2.25), (2.27). На підставі нерівності (2.29) і оцінки (1.14), яка справедлива за умов твердження 1.3, знаходимо

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)\omega_n(t) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(z)||\omega_n(t)| \le M_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^b \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Оскільки $\rho > r$, одержаний ряд збігається і, відповідно, ряд в (2.28) збігається рівномірно у зазначених областях.

Твердження 2.4. *Якщо виконуються умови твердження* 2.1, *то коефіцієнти функції* (1.2) *визначаються за формулою*

$$\gamma_{2n} = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n} R_k^{2k}} \begin{vmatrix} R_{n-1}^{2n} & R_{n-2}^{2n} & \dots & R_1^{2n} & R_0^{2n} \\ R_{n-1}^{2n-2} & R_{n-2}^{2n-2} & \dots & R_1^{2n-2} & R_0^{2n-2} \\ 0 & R_{n-2}^{2n-4} & \dots & R_1^{2n-4} & R_0^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_1^2 & R_0^2 \end{vmatrix}, \tag{2.30}$$

де $R_m^{2n} = C_{2n}^{2m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \beta_{n-k}^{2(n-k)}$.

Доведення. Розглянемо співвідношення ортогональності $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_{2n}(x)Q_{2m}(x)du(x) = 0$, де $0 \le m \le n-1$. Вважаємо, що $m = 0$, а індекс n пробігає значення $1, 2, \dots$. Тоді ліву частину цього співвідношення з урахуванням формул (1.6), (2.13) і (1.4) записуємо у вигляді

$$\int_{-1}^{1} Q_{2n}(x)du(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} \int_{-1}^{1} x^{2k} du(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} \beta_k^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=n-k}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n}^{2m} C_m^{n-k} \beta_k^{2k} \gamma_{2m} = \sum_{m=0}^{n} \gamma_{2m} C_{2n}^{2m} \sum_{k=n-m}^{n} (-1)^{n-k} C_m^{n-k} \beta_k^{2k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \gamma_{2m} C_{2n}^{2m} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_m^l \beta_{n-l}^{2(n-l)} = \sum_{m=0}^{n} R_m^{2n} \gamma_{2m}.$$

Для визначення величин γ_{2n} одержимо систему рівнянь $\gamma_0 = 1$, $\sum_{m=0}^{n} R_m^{2n} \gamma_{2m} = 0$, де $n = 1, 2, \ldots$, або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ R_0^2 & R_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ R_0^4 & R_1^4 & R_2^4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_0^{2n} & R_1^{2n} & R_2^{2n} & \ldots & R_n^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \ldots \\ \gamma_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь зображується у вигляді (2.30).

3. Розвинення функцій за побудованою системою поліномів.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови теореми* 2.2, $f(z)$ — *функція комплексної змінної, однозначна й аналітична у відкритій області* D_R^0, *межею якої є еліпс* Γ_R, $1 < R \leq \infty$, *а також обмежена на* Γ_R, *тобто*

$$|f(z)| \leq M, \tag{3.1}$$

де $M = \mathrm{const}$. *Тоді ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) Q_n(z), \tag{3.2}$$

де $L_n(f)$ *визначені співвідношенням* (2.3), *рівномірно збігається в замкненій області* $\overline{D_r^0}$, *обмеженій еліпсом* Γ_r, $1 \leq r < R$.

Доведення. За формулою (2.8) знайдемо коефіцієнти ряду (3.2), коли контур інтегрування — еліпс Γ_R з рівнянням (1.12), і оцінимо їх з урахуванням нерівностей (2.25), (2.27) і (3.1):

$$|L_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} |f(z)||\omega_n(z)||dz| \leq \frac{2M}{\pi \|Q_n\|^2 R^{n-3}(R^2-1)^2} \int\limits_{\Gamma_R} dz \leq$$

$$\leq \frac{2M(n+1)^b}{\pi R^{n-3}(R^2-1)^2 M(b)} \int\limits_{\Gamma_R} dz.$$

Оскільки еліпс Γ_R має півосі $a = \dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right)$ і $b = \dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right)$, то

$$\int\limits_{\Gamma_R} dz = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 + \frac{1}{R^2} - 2\cos 2\varphi}\, d\varphi \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(R + \frac{1}{R}\right) d\varphi = \frac{\pi(R^2+1)}{R}$$

і

$$|L_n(f)| \leq \frac{B(n+1)^b}{R^n},$$

де $B = \dfrac{2MR^2}{(R-1)^2 M(b)}$.

Тепер для ряду (3.2) в області $\overline{D_r^0}$ з урахуванням оцінки (1.14) знаходимо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) Q_n(z)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |L_n(f)||Q_n(z)| \leq B \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^b \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Останній ряд збігається при $r < R$, тому ряд (3.2) рівномірно збігається в зазначеній області.

***Приклад* 3.1.** Розкладемо функцію $f(z) = \dfrac{1}{a-z}$ в ряд за поліномами $Q_n(z)$.

Із співвідношення (2.28) одержуємо

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z), \quad |z| < |a|,$$

де $\omega_n(a)$ визначені співвідношенням (2.5).

***Приклад* 3.2.** Розкладемо функцію $f(z) = \dfrac{a}{a^2 - z^2}$ в ряд за поліномами $Q_n(z)$.

Згідно з (1.3) отримуємо

$$Q_n(z) = (-1)^n Q_n(z). \tag{3.3}$$

Використовуючи рівність

$$\frac{1}{a^2 - z^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right),$$

співвідношення (3.3) і приклад 3.1, знаходимо

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(-z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \omega_n(a) Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $n = 2k$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k}(a) Q_{2k}(z), \quad |z| < |a|.$$

***Приклад* 3.3.** Розкладемо функцію $\dfrac{z}{a^2 - z^2}$ в ряд за поліномами $Q_n(z)$.

Використовуючи рівність

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \frac{a + z - a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a-z} - \frac{a}{a^2 - z^2},$$

приклади 3.1 і 3.2, маємо

$$\frac{z}{a^2-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)Q_n(z)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\omega_n(a)Q_n(z)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\omega_n(a)Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $n=2k+1$, тому

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k+1}(a)Q_{2k+1}(z),\quad |z|<|a|.$$

Висновки. Методи розвинення функцій у степеневі ряди та ряди за ортогональними поліномами й іншими ортогональними функціями однієї чи кількох змінних широко використовують при вивченні математичних моделей у фундаментальних і прикладних науках. Не менш перспективним є метод розвинення функцій за біортогональними системами функцій у комплексних областях. За певних умов для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею. Відшукання коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності, і вони виражаються через похідні функцій, що розкладаються в ці ряди.

У даній роботі побудовано асоційовані функції, біортогональні на замкнених кривих комплексної площини з поліномами, які задаються у вигляді контурних інтегралів з ядерними функціями, аналітичними в нескінченно віддаленій точці. Встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розвинути в ряди за цією системою поліномів.

З проведених досліджень можна одержати як окремий випадок результати щодо розвинень функцій за системами класичних ортогональних поліномів у комплексних областях. Наприклад, система похідних від поліномів Чебишова $Q_n(z)=\dfrac{1}{(n+1)^2}\dfrac{d}{dz}T_{n+1}(z)$ і система поліномів Лежандра $P_n(z)$ зображуються у вигляді (1.9), якщо відповідно вибрати $\nu_1(x)=\dfrac{x}{2}$ і $\nu_2(x)=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x,\ |x|\leq 1$. Функції $\gamma_i(t),\ i=1,2,$ з формули (1.1) є такими:

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{t^{2k+1}},\qquad \gamma_2(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\frac{1}{t^{2k+1}},\qquad |t|>1.$$

Відповідні вагові функції $u_i(x),\ i=1,2,$ й асоційовані функції нульового порядку мають вигляд

$$du_1(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx,\qquad du_2(x)=\frac{1}{2}dx,\qquad |x|\leq 1,$$
$$\omega_{01}(z)=\frac{2}{z+\sqrt{z^2-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(k+1)}\frac{1}{z^{2k+1}},$$
$$\omega_{02}(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{z^{2k+1}},\qquad |z|>1.$$

Інтегральні вирази класичних поліномів, залежності степенів змінної z від них та інші співвідношення можна одержати безпосередньо з наведених у роботі формул.

Розвинення аналітичних функцій за біортогональними системами поліномів у комплексній площині є основою методик розв'язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними з поліноміальними коефіцієнтами.

Література

1. А. И. Маркушевич, *Избранные главы теории аналитических функций*, Наука, Москва (1976).
2. С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, Москва (1983).
3. Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, ч. 1, Наука, Москва (1978).
4. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
5. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, Москва (1962).
6. М. А. Сухорольський, *Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 238 – 254 (2010).
7. М. А. Сухорольський, *Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній площині*, Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка", № 643, 3 – 14 (2009).
8. М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, *Розклад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра*, Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка", № 687, 105 – 121 (2010).
9. М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, О. В. Веселовська, *Многочлени, споріднені з многочленами Чебишова*, Прикл. проблеми механіки і математики, **15**, 35 – 41 (2017).
10. М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, О. В. Веселовська, *Система функцій, біортогональна з многочленами, спорідненими з многочленами Чебишова*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика, механіка, № 1, 53 – 59 (2018).
11. O. V. Veselovska, V. V. Dostoina, *A system of functions biorthogonal with the derivatives of Chebyshev second-kind polynomials of a complex variable*, J. Math. Sci., **249**, № 5, 785 – 803 (2020).

Одержано 20.04.21