DOI: 10.37863/umzh.v73i12.6739

УДК 512.554

О. О. Пипка (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО ДЕЯКІ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ УЗАГАЛЬНЕНО ЦЕНТРАЛЬНИМИ РЯДАМИ АЛГЕБР ЛЕЙБНІЦА

The purpose of this article is to show a close relationship between the generalized central series of Leibniz algebras. Some analogues of the classical group-theoretical theorems by Schur and Baer for Leibniz algebras are proved.

Показано тісний зв'язок між узагальнено центральними рядами алгебр Лейбніца. Доведено деякі аналоги класичних теоретико-групових теорем Шура та Бера для алгебр Лейбніца.

1. Вступ. Для відтворення повної картини досліджуваних питань наведемо спочатку деякі класичні теоретико-групові результати. У 1951 р. Б. Нейман [12] довів так звану теорему Шура [10]: якщо фактор-група $G/\zeta(G)$ скінченна, то комутант $[G,G]$ також є скінченним і $\big|[G,G]\big| \le t^{t^2+1}$, де $t = |G/\zeta(G)|$. Пізніше Дж. Віголд [17] та Б. Верфріц [16] значно покращили цю оцінку. Існує велика кількість аналогів теореми Шура для груп (див., наприклад, оглядову статтю [5]). Серед них є результати, які пов'язані з групами автоморфізмів. Нехай G — група, A — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Покладемо

$$C_G(A) = \big\{g \in G|\ \alpha(g) = g \text{ для кожного } \alpha \in A\big\},$$
$$[G,A] = \langle [g,\alpha] = g^{-1}\alpha(g)|\ g \in G, \alpha \in A\rangle.$$

Підгрупи $C_G(A)$ та $[G,A]$ називають A-*центром* та A-*комутаторною підгрупою* групи G. П. Хегарті [6] довів, що якщо $A = \mathrm{Aut}(G)$, а фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, то підгрупа $[G,A]$ також є скінченною. В роботі [4] було розглянуто більш загальний випадок: $\mathrm{Inn}(G) \le A$, фактор-група $A/\mathrm{Inn}(G)$ скінченна, де $\mathrm{Inn}(G)$ — група внутрішніх автоморфізмів групи G. Для цього випадку було доведено аналог теореми Шура: якщо фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, то підгрупа $[G,A]$ також є скінченною. І навіть більше, було знайдено оцінку для порядку підгрупи $[G,A]$ у термінах порядків $|G/C_G(A)|$ та $|A/\mathrm{Inn}(G)|$. Зокрема, якщо $A = \mathrm{Inn}(G)$ або $A = \mathrm{Aut}(G)$, то отримуємо звичайні теореми Шура та Хегарті.

Відомо, що існує тісний зв'язок між групами та алгебрами Лі. Для алгебр Лі доведено багато теоретико-групових результатів і навпаки. Ця тематика не стала винятком. Зокрема, аналог теореми Шура для алгебр Лі добре відомий (див., наприклад, [15]). Е. Л. Стітцінгер та Р. М. Тьорнер довели [14] ліївський аналог теореми Хегарті. Нехай L — алгебра Лі над полем F, $\mathrm{Der}(L)$ — алгебра диференціювань алгебри L. Відповідно до [14] покладемо

$$H = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Der}(L)} \mathrm{Ker}(\alpha), \qquad L^* = \sum_{\alpha \in \mathrm{Der}(L)} \mathrm{Im}(\alpha).$$

Таким чином, підалгебри H і L^* є ліївськими аналогами підгруп $C_G\big(\mathrm{Aut}(G)\big)$ і $\big[G, \mathrm{Aut}(G)\big]$. З основного результату статті [14] випливає, що якщо фактор-алгебра L/H має скінченну вимірність, то підалгебра L^* також є скінченновимірною.

Розглянемо тепер (ліві) алгебри Лейбніца. Нехай L — алгебра над полем F із бінарними операціями $+$ і $[\ ,\ ]$. Тоді L називатимемо *лівою алгеброю Лейбніца*, якщо $\big[[x,y],z\big] = \big[x,[y,z]\big] - \big[y,[x,z]\big]$ для всіх $x,y,z \in L$ [2, 11]. Зазначимо, що кожна алгебра Лі L є алгеброю Лейбніца. І навіть більше, алгебри Лі можна охарактеризувати, як алгебри Лейбніца, в яких $[x,x]=0$ для кожного $x \in L$.

Одним із напрямків розвитку теорії алгебр Лейбніца є пошук аналогічних результатів з теорії алгебр Лі. Водночас між цими типами алгебр існує суттєва відмінність (див., наприклад, оглядові статті [3, 7, 9]). Наведемо деякі необхідні означення. *Лівий* (відповідно, *правий*) *центр* $\zeta^l(L)$ (відповідно, $\zeta^r(L)$) алгебри Лейбніца L визначають за правилом $\zeta^l(L) = \{x \in L|\ [x,y] = 0$ для кожного $y \in L\}$ $\big($відповідно, $\zeta^r(L) = \big\{x \in L|\ [y,x] = 0$для кожного $y \in L\big\}\big)$. Лівий центр є ідеалом алгебри L, але це не так для правого центра. Він є лише підалгеброю алгебри L, і в загальному випадку лівий і правий центри різні. І навіть більше, вони можуть мати різні вимірності (див. приклад 2.1 у [8]). *Центр* $\zeta(L)$ алгебри L — перетин лівого і правого центрів, тобто

$$\zeta(L) = \big\{x \in L|\ [x,y] = 0 = [y,x] \text{ для кожного } \ y \in L\big\}.$$

Очевидно, що $\zeta(L)$ є ідеалом алгебри L. Отже, можна розглядати фактор-алгебру $L/\zeta(L)$.

У роботі [8] доведено таку модифікацію аналога теореми Шура: якщо L є алгеброю Лейбніца над полем F, а ковимірності $\operatorname{codim}_F\big(\zeta^l(L)\big) = l$ та $\operatorname{codim}_F(\zeta^r(L)) = r$ скінченні, то $\dim_F([L,L]) \leq l(l+r)$. У зв'язку з цим виникає природне питання. Припустимо, що лише ковимірність $\operatorname{codim}_F(\zeta^l(L))$ скінченна. Чи буде тоді вимірність $\dim_F([L,L])$ скінченною? Приклад 3.1 з [8] дає негативну відповідь на це питання. Проте маємо прямий аналог теореми Шура для алгебр Лейбніца: якщо L є алгеброю Лейбніца над полем F, а ковимірність $\operatorname{codim}_F\big(\zeta(L)\big) = d$ скінченна, то $\dim_F\big([L,L]\big) \leq d^2$ [8].

З огляду на всі попередні аргументи природно розглянути аналоги результатів статті [4] для алгебр Лейбніца. Спочатку визначимо аналоги A-центра та A-комутаторної підгрупи для алгебр Лейбніца. Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, D — підалгебра алгебри $\operatorname{Der}(L)$. Покладемо

$$\operatorname{Ann}_L(D) = \bigcap_{\alpha \in D} \operatorname{Ker}(\alpha), \qquad [L,D] = \sum_{\alpha \in D} \operatorname{Im}(\alpha).$$

Нехай $a \in L$. Розглянемо відображення $\mathrm{l}_a : L \to L$, визначене за правилом $\mathrm{l}_a(x) = [a,x]$. Відомо, що l_a є диференціюванням алгебри L, а множина $\operatorname{Ad}^l(L) = \{\mathrm{l}_a|\ a \in L\}$ — ідеалом алгебри $\operatorname{Der}(L)$ (див., наприклад, [7]).

Припустимо, що $\operatorname{Ad}^l(L) \leq D$. Тоді $\operatorname{Ann}_L(D) \leq \operatorname{Ann}_L(\operatorname{Ad}^l(L)) = \zeta^r(L)$. Отже,

$$\operatorname{Ann}_L(D) \cap \zeta^l(L) \leq \operatorname{Ann}_L(\operatorname{Ad}^l(L)) \cap \zeta^l(L) = \zeta^r(L) \cap \zeta^l(L) = \zeta(L).$$

Зокрема, $\operatorname{Ann}_L(D) \cap \zeta^l(L)$ є ідеалом в L.

Говоритимемо, що $\mathrm{A}_L(D) = \operatorname{Ann}_L(D) \cap \zeta^l(L)$ є *D-центром* алгебри L. Зазначимо, що якщо $\mathrm{A}_L(D) \leq \zeta(L)$ і $D = \operatorname{Ad}^l(L)$, то D-центр є звичайним центром алгебри L. Говоритимемо, що $[L,D]$ є *D-похідною підалгеброю* алгебри L. Якщо $D = \operatorname{Ad}^l(L)$, то $[L,D] = \big[L, \operatorname{Ad}^l(L)\big]$.

Нехай $x \in [L, \mathrm{Ad}^l(L)]$, тоді $x = [y, \mathrm{l}_a] = \mathrm{l}_a(y) = [a, y]$ для всіх $a, y \in L$. Це означає, що у цьому випадку D-похідна підалгебра $[L, D]$ є звичайною похідною підалгеброю $[L, L]$ алгебри L.

Першим основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема А. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, D — така підалгебра алгебри* $\mathrm{Der}(L)$, *що* $\mathrm{Ad}^l(L) \le D$, *а вимірність* $\dim_F(D/\mathrm{Ad}^l(L)) = k$ *скінченна. Якщо вимірність* $\dim_F\big(L/\mathrm{A}_L(D)\big) = t$ *скінченна, то* $\dim_F\big([L, D]\big) \le t(k + t)$.

У статті [1] Р. Бер узагальнив теорему Шура таким чином. Він довів, що якщо фактор-група $G/\zeta_k(G)$ скінченна, тоді скінченною є й підгрупа $\gamma_{k+1}(G)$. Тут через $\zeta_k(G)$ позначено k-й член верхнього центрального ряду групи G, а через $\gamma_{k+1}(G)$ — $(k+1)$-й член нижнього центрального ряду групи G. Автоморфний аналог цього результату було доведено в роботі [4]. Я. Н. Стюарт [13] довів, що якщо L — така алгебра Лі, що фактор-алгебра $L/\zeta_k(L)$ скінченновимірна, то $\gamma_{k+1}(L)$ також є скінченновимірною підалгеброю. І навіть більше, знайдено верхню оцінку для вимірності $\dim_F(\gamma_{k+1}(L))$ [8]. У цій же статті було доведено аналог теореми Бера для алгебр Лейбніца.

Починаючи з $\mathrm{A}_L(D)$ та $[L, D]$, де $\mathrm{Ad}^l(L) \le D$, можна побудувати верхній і нижній D-центральні ряди алгебри Лейбніца L. Нехай $\zeta_1(L, D) = \mathrm{A}_L(D)$. Це дає можливість визначити зростаючий ряд ідеалів $\zeta_\nu(L, D)$ алгебри L, де $\zeta_{\nu+1}(L, D)/\zeta_\nu(L, D) = \zeta_1(L/\zeta_\nu(L, D), D)$. Як завжди, якщо λ є граничним порядковим числом, то $\zeta_\lambda(L, D) = \bigcup_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L, D)$. Останній член $\zeta_\infty(L, D) = \zeta_\delta(L, D)$ цього ряду називатимемо *верхнім D-гіперцентром* алгебри L, а число δ — *верхньою D-центральною довжиною* алгебри L, яку позначатимемо $\mathrm{zl}(L, D)$.

Нижній D-центральний ряд алгебри L — це спадний ряд

$$L = \gamma_1(L, D) \ge \gamma_2(L, D) \ge \ldots \ge \gamma_\nu(L, D) \ge \gamma_{\nu+1}(L, D) \ge \ldots,$$

де $\gamma_2(L, D) = [L, D]$, а для кожного порядкового числа ν покладемо $\gamma_{\nu+1}(L, D) = [\gamma_\nu(L, D), D]$. Нехай для граничного порядкового числа λ $\gamma_\lambda(L, D) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L, D)$.

Другим основним результатом статті є така теорема.

Теорема Б. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, D — така підалгебра алгебри* $\mathrm{Der}(L)$, *що* $\mathrm{Ad}^l(L) \le D$, *а вимірність* $\dim_F(D/\mathrm{Ad}^l(L)) = k$ *скінченна. Нехай Z — верхній D-гіперцентр алгебри L. Припустимо, що верхня D-центральна довжина* $\mathrm{zl}(L, D) = m$ *і вимірність* $\dim_F(L/Z) = t$ *скінченна. Тоді підалгебра $\gamma_{m+1}(L, D)$ скінченновимірна й існує така функція f, що* $\dim_F(\gamma_{m+1}(L, D)) \le f(k, m, t)$.

2. Доведення теореми А. Оскільки $\mathrm{Ad}^l(L) \le D$, то $\mathrm{A}_L(D) \le \zeta(L)$, звідки випливає, що

$$\dim_F(L/\zeta(L)) \le \dim_F\big(L/\mathrm{A}_L(D)\big) = t.$$

Тоді похідна підалгебра $K = [L, L]$ скінченновимірна й $\dim_F([L, L]) \le t^2$ [8].

Покладемо $L_{ab} = L/K$. Для кожного $\alpha \in D$ визначимо відображення $\alpha_{ab} \colon L_{ab} \to L_{ab}$ за таким правилом: $\alpha_{ab}(x + K) = \alpha(x) + K$ для кожного $x \in L$. Нехай $x, y \in L$, $\lambda \in F$. Оскільки

$$\alpha_{ab}\big((x + K) + (y + K)\big) = \alpha_{ab}\big((x + y) + K\big) = \alpha(x + y) + K =$$
$$= \alpha(x) + \alpha(y) + K = (\alpha(x) + K) + (\alpha(y) + K) = \alpha_{ab}(x + K) + \alpha_{ab}(y + K)$$

і

$$\alpha_{ab}(\lambda(x+K)) = \alpha_{ab}(\lambda x+K) = \alpha(\lambda x)+K = \lambda\alpha(x)+K =$$
$$= \lambda(\alpha(x)+K) = \lambda\alpha_{ab}(x+K),$$

то α_{ab} є ендоморфізмом алгебри L_{ab}.

Нехай знову $x, y \in L$. Тоді

$$\alpha_{ab}\big([x+K, y+K]\big) = \alpha_{ab}\big([x,y]+K\big) =$$
$$= \alpha\big([x,y]\big)+K = [\alpha(x),y]+[x,\alpha(y)]+K =$$
$$= \big([\alpha(x),y]+K\big)+\big([x,\alpha(y)]+K\big) =$$
$$= [\alpha(x)+K, y+K]+[x+K,\alpha(y)+K] =$$
$$= \big[\alpha_{ab}(x+K), y+K\big]+\big[x+K,\alpha_{ab}(y+K)\big],$$

тобто $\alpha_{ab} \in \mathrm{Der}(L_{ab})$.

Нехай $\alpha \in D$. Розглянемо відображення $d(\alpha)\colon L_{ab} \to L_{ab}$, визначене за правилом $d(\alpha)(x) = [x, \alpha_{ab}] = \alpha_{ab}(x),\ x \in L_{ab}$. Тоді

$$d(\alpha)(x+y) = [x+y, \alpha_{ab}] = \alpha_{ab}(x+y) =$$
$$= \alpha_{ab}(x)+\alpha_{ab}(y) = [x,\alpha_{ab}]+[y,\alpha_{ab}] = d(\alpha)(x)+d(\alpha)(y),$$
$$d(\alpha)(\lambda x) = [\lambda x, \alpha_{ab}] = \alpha_{ab}(\lambda x) = \lambda\alpha_{ab}(x) = \lambda[x,\alpha_{ab}] = \lambda d(\alpha)(x).$$

Інакше кажучи, $d(\alpha)$ є ендоморфізмом алгебри L_{ab}.

І навіть більше, $\mathrm{Im}\big(d(\alpha)\big) = [L_{ab}, \alpha_{ab}]$, $\mathrm{Ker}(d(\alpha)) \geq \mathrm{A}_{L_{ab}}(\alpha_{ab})$, звідки випливає, що $\dim_F\Big(L_{ab}/\mathrm{Ker}\big(d(\alpha)\big)\Big) \leq \dim_F(L_{ab}/\mathrm{A}_{L_{ab}}(\alpha_{ab}))$. Отже,

$$[L_{ab}, \alpha_{ab}] = \mathrm{Im}\big(d(\alpha)\big) \cong L_{ab}/\mathrm{Ker}\big(d(\alpha)\big).$$

Якщо $x \in \mathrm{A}_L(\alpha)$, то $\alpha_{ab}(x+K) = \alpha(x)+K = K$, тобто $x+K \in \mathrm{A}_{L_{ab}}(\alpha_{ab})$. Таким чином, $\big(\mathrm{A}_L(\alpha)+K\big)/K \leq \mathrm{A}_{L_{ab}}(\alpha_{ab})$. Із включення $\mathrm{A}_L(D) \leq \mathrm{A}_L(\alpha)$ випливає, що

$$\dim_F\big(L/\mathrm{A}_L(\alpha)\big) \leq \dim_F\big(L/\mathrm{A}_L(D)\big) = t.$$

Отже, $\dim_F\big(L_{ab}/\mathrm{A}_{L_{ab}}(\alpha_{ab})\big) \leq t$, а тому $\dim_F\big([L_{ab}, \alpha_{ab}]\big) \leq t$ для кожного $\alpha \in D$.

Нехай $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — базис фактор-алгебри $D/\mathrm{Ad}^l(L)$, $\beta \in \mathrm{Ad}^l(L)+\alpha$. Тоді $\beta = \mathrm{l}_z+\alpha$ для деякого $z \in L$. Для довільного елемента $y \in L$ маємо

$$[y,\beta] = \beta(y) = (\mathrm{l}_z+\alpha)(y) = \mathrm{l}_z(y)+\alpha(y) = [z,y]+[y,\alpha].$$

Це означає, що

$$[y,\beta]+K = [z,y]+[y,\alpha]+K = ([z,y]+K)+\big([y,\alpha]+K\big) = [z+K, y+K]+\big([y,\alpha]+K\big).$$

Оскільки фактор-алгебра L/K абелева, то $[z+K, y+K] = 0$, тобто $[y,\beta]+K = [y,\alpha]+K$. З іншого боку,

$$[x+K, \alpha_{ab}] = \alpha_{ab}(x+K) = \alpha(x)+K = [x,\alpha]+K,$$

звідки випливає, що $[L_{ab}, \alpha_{ab}] = \big([L, \alpha] + K\big)/K$.

Очевидно, що $[L, D] = \langle [L, \beta] |\ \beta \in D \rangle = \langle [L, \beta] |\ \beta \in \mathrm{Ad}^l(L) + \alpha_j, 1 \le j \le k \rangle$, а тому

$$\big([L, D] + K\big)/K = \sum_{\substack{\beta \in \mathrm{Ad}^l(L) + \alpha_j \\ 1 \le j \le k}} ([L, \beta] + K)/K =$$

$$= \sum_{1 \le j \le k} \big([L, \alpha_j] + K\big)/K = \sum_{1 \le j \le k} [L_{ab}, (\alpha_j)_{ab}].$$

Це означає, що $\dim_F\big(([L, D] + K)/K\big) \le tk$, звідки випливає, що

$$\dim_F\big([L, D]\big) \le tk + t^2 = t(k + t).$$

Теорему А доведено.

Якщо $D = \mathrm{Ad}^l(L)$, то $\mathrm{A}_L(D) = \zeta(L)$, $[L, D] = [L, L]$, і як наслідок отримуємо прямий аналог теореми Шура для алгебр Лейбніца.

***Наслідок* 2.1** [8]. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F([L, L]) \le t^2$.*

Зокрема, якщо L є алгеброю Лі, то отримуємо прямий аналог теореми Шура для алгебр Лі.

***Наслідок* 2.2** [15]. *Нехай L — алгебра Лі над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F([L, L]) \le t(t + 1)/2$.*

Повторюючи майже дослівно доведення теореми 1 з роботи [14], можна переконатися, що якщо вимірність $\dim_F(L/\mathrm{A}_L(\mathrm{Der}(L)))$ скінченна, то алгебра $\mathrm{Der}(L)$ також скінченновимірна. Таким чином, якщо $D = \mathrm{Der}(L)$, то отримуємо такий прямий аналог теореми Хегарті для алгебр Лейбніца.

***Наслідок* 2.3.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\mathrm{A}_L\big(\mathrm{Der}(L)\big)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F\big([L, \mathrm{Der}(L)]\big) \le t(t + 1)$.*

Зокрема, якщо L є алгеброю Лі, то отримуємо такий прямий аналог теореми Хегарті для алгебр Лі.

***Наслідок* 2.4** [14]. *Нехай L — алгебра Лі над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\mathrm{A}_L\big(\mathrm{Der}(L)\big)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F\big([L, \mathrm{Der}(L)]\big) \le t(t + 1)/2$.*

3. Доведення теореми Б. Розглянемо верхній D-центральний ряд алгебри L:

$$\langle 0 \rangle = Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_{m-1} \le Z_m = Z.$$

Скористаємося індукцією по m. Якщо $m = 1$, то $Z_1 = \mathrm{A}_L(D)$, $\dim_F(L/Z_1) = t$, і з теореми А випливає, що підалгебра $[L, D] = \gamma_2(L, D)$ скінченновимірна, а її вимірність не перевищує $t(k + t)$.

Припустимо, що результат правильний для деякого $m - 1$, і нехай L — алгебра Лейбніца, яка задовольняє умови теореми при $\mathrm{zl}(L, D) = m$. Покладемо $U = L/Z_1$. Для кожного $\alpha \in D$ визначимо відображення $\alpha_U : U \to U$ за правилом

$$\alpha_U(x + Z_1) = \alpha(x) + Z_1$$

для кожного $x \in L$. Оскільки

$$\alpha_U\big((x + Z_1) + (y + Z_1)\big) = \alpha_U(x + Z_1) + \alpha_U(y + Z_1)$$

і

$$\alpha_U(\lambda(x + Z_1)) = \lambda\alpha_U(x + Z_1),$$

то α_U є ендоморфізмом алгебри U. І навіть більше,

$$\alpha_U\big([x + Z_1, y + Z_1]\big) = \big[\alpha_U(x + Z_1), y + Z_1\big] + \big[x + Z_1, \alpha_U(y + Z_1)\big].$$

Отже, $\alpha_U \in \mathrm{Der}(U)$.

Розглянемо відображення $\eta\colon D \to \mathrm{Der}(U)$, визначене за правилом $\eta(\alpha) = \alpha_U$. Очевидно, що η є гомоморфізмом. Нехай $\alpha \in \mathrm{Ad}^l(L)$, тобто $\alpha = \mathrm{l}_a$ для деякого $a \in L$. Тоді $\eta(\alpha) = \alpha_U = (\mathrm{l}_a)_U$ і

$$(\mathrm{l}_a)_U(x + Z_1) = \mathrm{l}_a(x) + Z_1 = [a, x] + Z_1 = [a + Z_1, x + Z_1] = \mathrm{l}_{a+Z_1}(x + Z_1),$$

звідки випливає, що $\eta\big(\mathrm{Ad}^l(L)\big) = \mathrm{Ad}^l(U)$. Це означає, що $\mathrm{Ad}^l(U) = \eta\big(\mathrm{Ad}^l(L)\big) \le \eta(D)$, а вимірність $\eta(D)/\mathrm{Ad}^l(U)$ скінченна і не перевищує k. І навіть більше, ряд

$$\langle 0\rangle = Z_1/Z_1 \le Z_2/Z_1 \le \ldots \le Z_{m-1}/Z_1 \le Z_m/Z_1$$

є верхнім D-центральним рядом L/Z_1. Оскільки $\mathrm{zl}\big(L/Z_1, \eta(D)\big) = m - 1$, то за індуктивним припущенням підалгебра $\gamma_m\big(L/Z_1, \eta(D)\big)$ скінченновимірна й існує така функція $\beta(k, m-1, t)$, що $\dim_F\Big(\gamma_m\big(L/Z_1, \eta(D)\big)\Big) \le \beta(k, m - 1, t)$.

Маємо $\gamma_m(L/Z_1, D) = \big(\gamma_m(L, D) + Z_1\big)/Z_1$. Нехай

$$K/Z_1 = \gamma_m\big(L/Z_1, \eta(D)\big) = \gamma_m(L/Z_1, D).$$

Зауважимо, що фактор-алгебра K/Z_1 скінченновимірна і

$$\dim_F(K/Z_1) \le \beta(k, m - 1, t) = r.$$

Отже, можемо застосувати теорему А до K. Отримуємо, що підалгебра $[K, D]$ скінченновимірна і $\dim_F\big([K, D]\big) \le r(k + r)$. Нарешті, оскільки

$$\gamma_{m+1}(L, D) = \big[\gamma_m(L, D), D\big] \le [K, D],$$

то підалгебра $\gamma_{m+1}(L, D)$ скінченновимірна, а її вимірність не перевищує

$$r(k + r) = \beta(k, m, t).$$

Теорему Б доведено.

Функція $\beta(k, m, t)$ визначена за правилом $\beta(k, 1, t) = t(k + t)$, а в загальному випадку

$$\beta(k, m + 1, t) = \beta(k, m, t)\big(k + \beta(k, m, t)\big).$$

Якщо $D = \mathrm{Ad}^l(L)$, то $\zeta_k(L, D) = \zeta_k(L)$, $\gamma_k(L, D) = \gamma_k(L)$, і як наслідок отримуємо такий прямий аналог теореми Бера для алгебр Лейбніца.

***Наслідок* 3.1** [8]. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\zeta_k(L)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \le 2^{k-1}t^{k+1}$.*

Насамкінець, якщо L є алгеброю Лі, то отримуємо такий прямий аналог теореми Бера для алгебр Лі.

***Наслідок* 3.2** [8, 13]. *Нехай L — алгебра Лі над полем F. Якщо $L/\zeta_k(L)$ має скінченну вимірність t, то $\dim_F\big(\gamma_{k+1}(L)\big) \le t^k(t + 1)/2$.*

Література

1. R. Baer, *Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen*, Math. Ann., **124**, 161 – 177 (1952); DOI:10.1007/BF01343558.
2. A. Blokh, *On a generalization of the concept of Lie algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, № 3, 471 – 473 (1965) (in Russian).
3. V. A. Chupordia, A. A. Pypka, N. N. Semko, V. S. Yashchuk, *Leibniz algebras: a brief review of current results*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 2, 250 – 257 (2019); DOI:10.15330/cmp.11.2.250-257.
4. M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, *On some variants of theorems of Schur and Baer*, Milan J. Math., **82**, № 2, 233 – 241 (2014); DOI:10.1007/s00032-014-0215-9.
5. M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, *The theorems of Schur and Baer: a survey*, Int. J. Group Theory, **4**, № 1, 21 – 32 (2015); DOI:10.22108/ IJGT.2015.7376.
6. P. Hegarty, *The absolute centre of a group*, J. Algebra, **169**, 929 – 935 (1994); DOI:10.1006/jabr.1994.1318.
7. V. V. Kirichenko, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin, *Some aspects of Leibniz algebra theory*, Algebra and Discrete Math., **24**, № 1, 1 – 33 (2017).
8. L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka, *Relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras*, Eur. J. Math., **2**, № 2, 565 – 577 (2016); DOI:10.1007/s40879-016-0093-5.
9. L. A. Kurdachenko, N. N. Semko, I. Ya. Subbotin, *Applying group theory philosophy to Leibniz algebras: some new developments*, Adv. Group Theory and Appl., **9**, 71 – 121 (2020); DOI:10.32037/agta-2020-004.
10. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, *A brief history of an important classical theorem*, Adv. Group Theory and Appl., **2**, 121 – 124 (2016); DOI:10.4399/97888548970148.
11. J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbras de Leibniz*, Enseign. Math., **39**, 269 – 293 (1993).
12. B. H. Neumann, *Groups with finite classes of conjugate elements*, Proc. London Math. Soc. (3), **1**, № 1, 178 – 187 (1951); DOI:10.1112/plms/s3-1.1.178.
13. I. N. Stewart, *Verbal and marginal properties of non-associative algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **28**, № 1, 129 – 140 (1974); DOI:10.1112/plms/s3-28.1.129.
14. E. Stitzinger, R. Turner, *Concerning derivations of Lie algebras*, Linear and Multilinear Algebra, **45**, № 4, 329 – 331 (1999); DOI:10.1080/03081089908818596.
15. M. R. Vaughan-Lee, *Metabelian BFC p-groups*, J. London Math. Soc. (2), **5**, № 4, 673 – 680 (1972); DOI:10.1112/jlms/s2 – 5.4.673.
16. B. A. F. Wehrfritz, *Schur's theorem and Wiegold's bound*, J. Algebra, **504**, 440 – 444 (2018); DOI:10.1016/j.jalgebra.2018.02.023.
17. J. Wiegold, *Multiplicators and groups with finite central factor-groups*, Math. Z., **89**, № 4, 345 – 347 (1965); DOI:10.1007/BF01112166.

Одержано 11.05.21