DOI: 10.37863/umzh.v73i12.6550

УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПЕРІОДИЧНА КУЛОНІВСЬКА ДИНАМІКА ТРЬОХ РІВНИХ НЕГАТИВНИХ ЗАРЯДІВ У ПОЛІ ФІКСОВАНИХ ЧОТИРЬОХ РІВНИХ ПОЗИТИВНИХ ЗАРЯДІВ

We found periodic solutions of the Coulomb d-dimensional $(d = 1, 2, 3)$ equations of motion for three equal negative point charges in the field of four equal positive point charges fixed at the vertices of a rectangle. These systems possess an equilibrium configuration. The periodic solutions are obtained with the help of the Lyapunov central theorem.

Знайдено періодичні розв'язки d-вимірних $(d = 1, 2, 3)$ рівнянь руху Кулона трьох негативних точкових однакових зарядів у полі чотирьох однакових позитивних зарядів, зафіксованих у вершинах прямокутника. Ці системи мають рівноважний стан. Періодичні розв'язки отримано за допомогою центральної теореми Ляпунова.

1. Вступ. У цій статті знайдено рівновагу у системі Кулона трьох негативних однакових зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника зі сторонами $2a,\ 2b$. Це дає змогу знайти у ній періодичні розв'язки лінійного, площинного та просторового рівнянь руху Кулона. Раніше автором були знайдені періодичні та квазіперіодичні розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох негативних однакових зарядів у полі двох однакових позитивних зарядів [1 – 4]. Періодичні розв'язки було знайдено в системах двох негативних однакових зарядів у полі чотирьох та шістьох однакових позитивних зарядів [5, 6], а також в системі трьох негативних однакових зарядів у полі шістьох однакових позитивних зарядів [7].

Вказані результати було отримано так само, як і у цій статті, завдяки тому, що для симетричної матриці U^0 частинних других похідних потенціальної енергії у рівновазі було знайдено в явному вигляді власні значення, серед яких були додатні, що породжують періодичні чи квазіперіодичні розв'язки. Існування періодичних розв'язків випливає з центральної теореми Ляпунова [5 – 9], якщо немає нульових та вироджених власних значень U^0. При цьому потенціальна енергія повинна бути дійсною аналітичною функцією в околі рівноваги. Саме такою є кулонівська потенціальна енергія.

Існування квазіперіодичних розв'язків було доведено у випадку наявності нульового власного значення U^0 за допомогою методу небесної механіки вилучення вузла [8] та центральної теореми Ляпунова [8 – 12]. При цьому враховувалось, що нульове власне значення є наслідком обертальної інваріантності системи. Площинна та просторова системи в цій статті не мають обертальної інваріантності, а також нульового власного значення U^0.

Виникає питання: чи можливо довести існування періодичних розв'язків у кулонівських системах, коли немає рівноваги? В статті [13] дано ствердну відповідь на це питання, тобто доведено їхнє існування у нейтральній системі n однакових негативних зарядів у полі n однакових позитивних зарядів. Метод доведення цього результату ґрунтується на узагальненні методу мажорант Зігеля [14], що застосовувався ним для знаходження розв'язків задачі трьох тіл небесної механіки.

Центральна теорема Ляпунова стосується гамільтонових систем, рівновага яких збігається з початком координат, і формулюється так.

Теорема 1.1. *Нехай n-вимірна гамільтонова система визначається дійсним аналітичним гамільтоніаном, розклад Тейлора якого збігається абсолютно та рівномірно в околі початку координат і починається з квадратичних доданків. Нехай також $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — власні значення матриці, що визначає лінійну частину гамільтонового векторного поля, такі що $\lambda_s,\ s = 1, \ldots, k$, є уявними і нерезонансними: $\lambda_j \neq n'\lambda_s,\ s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, 2n,\ j \neq s$, де n' — довільне ціле число. Тоді рівняння Гамільтона допускає існування k періодичних розв'язків, таких що кожен із них залежить від дійсного параметра c_j для деякого $j = 1, \ldots, k$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \ldots, \tau_k(c_k)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = \dfrac{2\pi}{|\lambda_j|}$.*

Рівняння руху d-вимірної системи N точкових зарядів з масами $m_j,\ j = 1, \ldots, N$, є рівнянням руху електромеханічної системи частинок з потенціальною енергією U, заданою парним кулонівським потенціалом, і має вигляд

$$
\begin{gathered}
m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, N, \\
x_{(N)} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = \left(x_j^1, \ldots, x_j^d\right).
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Відомо [15], що для (1.1) з $m_j = m$ власні значення з теореми 1.1 збігаються з $\lambda_j = \pm\sqrt{-m^{-1}\sigma_j},\ j = 1, \ldots, dN$, де σ_j — власні значення U^0. Таким чином, існування періодичних розв'язків (1.1) можна отримати з теореми 1.1, що ми і зробимо в цій статті.

Результати цієї статті, як і попередніх, можуть бути використані в теорії плазми та квантових моделей іонізованих молекул у наближенні Борна – Оппенгеймера, в якому нерухомі позитивні та рівні негативні заряди асоціюються відповідно з важкими ядрами та легкими електронами.

Дана стаття організована таким чином. У другому, третьому та четвертому пунктах знайдено періодичні розв'язки відповідно в лінійних, площинних та просторових системах. Отримані результати сформульовано у вигляді теорем наприкінці цих пунктів.

2. Лінійна динаміка Кулона. Ми розглядаємо динаміку на (координатній) прямій трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника зі сторонами $2a,\ 2b$, який симетрично розташований на площині щодо двох координатних осей (див. наступний пункт).

Потенціальна енергія цієї системи визначається таким чином:

$$
\begin{gathered}
U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k = 1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - \\
-2e_0 e' \sum_{j=1}^{3} \left[\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2} \right)^{-1} + \left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2} \right)^{-1} \right], \quad x_j \in \mathbb{R}.
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Рівноважні рівняння мають вигляд $\dfrac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(3)}) = 0,\ j = 1, 2, 3$. Підставимо рівності

$$\frac{\partial}{\partial x_1}|x_1-x_2|^{-k}=-k\frac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|^{k+2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{(x_1-a)^2+b^2}\right)^{-k}=-k\frac{x_1-a}{\left(\sqrt{(x_1-a)^2+b^2}\right)^{k+2}}$$

в ці рівняння при $k=1$. Отже,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}U(x_{(3)})=-e_0^2\sum_{j\neq k,k=1}^{3}\frac{x_j-x_k}{|x_j-x_k|^3}+2e_0e'\left[\frac{x_j-a}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\,\right)^3}+\frac{x_j+a}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\,\right)^3}\right].$$

В результаті отримуємо з цієї рівності для $j=1,2$ рівноважне співвідношення для рівноваги $x^0,\ x_1=x_1^0=-a,\ x_2=x_2^0=0,\ x_3=x_3^0=a$:

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2}+\frac{e_0^2}{a^2}=\frac{2e'(2a)e_0}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\,\right)^3},\qquad \frac{5e_0}{(2a)^3}=\frac{2e'}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\,\right)^3}.$$

Рівність $\dfrac{\partial}{\partial x_2}U(x_{(3)})=0$ є правильною, оскільки $\left|x_2^0-x_1^0\right|=\left|x_3^0-x_2^0\right|,\ x_1^0=-x_3^0,\ x_2^0=0.$

Тепер необхідно знайти матрицю U^0 других частинних похідних потенціальної енергії в рівновазі. Із рівності

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_l\partial x_j}=\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j\partial x_l}=-2e_0^2|x_j-x_l|^{-3}$$

видно, що недіагональні елементи матриці U^0 задано таким чином:

$$U^0_{1,3}=U^0_{3,1}=-\frac{e_0^2}{4a^3}=-u',\qquad U^0_{1,2}=U^0_{2,1}=U^0_{2,3}=U^0_{3,2}=-8u'.$$

З рівності

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U(x_{(2)})=\sum_{j\neq k,k=1}^{3}\frac{2e_0^2}{|x_j-x_k|^3}+$$

$$+2e_0e'\left[\frac{1}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\,\right)^3}-\frac{3(x_j-a)^2}{\left(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2}\,\right)^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\,\right)^3}-\frac{3(x_j+a)^2}{\left(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2}\,\right)^5}\right]$$

випливає, що її діагональні елементи мають вигляд

$$U^0_{1,1}=U^0_{3,3}=\frac{9e_0^2}{4a^3}+2e_0e'\left[b^{-3}+\frac{1}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\,\right)^3}-\frac{3(2a)^2}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\,\right)^5}\right],$$

$$U^0_{2,2}=\frac{16e_0^2}{4a^3}+2e_0e'\left[\frac{2}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}-\frac{6a^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5}\right].$$

З рівноважного співвідношення випливає, що

$$\left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2a}=\frac{1}{\sqrt{(2a)^2+b^2}},\qquad 2a=(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\eta}b,\qquad \eta=\left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{2}{3}}<1. \tag{2.2}$$

Як наслідок отримуємо

$$a^2+b^2=a^2[4(\eta^{-1}-1)+1]=a^2\eta^{-1}(4-3\eta),$$

$$2e_0e'b^{-3}=5(2a)^{-3}e_0^2(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}=\frac{5u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{2e_0e'}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^3}=2e_0e'\frac{5e_0}{2e'}\left(\frac{1}{2a}\right)^3=\frac{5u'}{2},$$

$$\frac{6e_0e'(2a)^2}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^5}=6e_0e'\left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{5}{3}}(2a)^{-3}=\frac{15u'}{2}\eta.$$

Ці рівності дозволяють записати діагональні елементи матриці U^0 у простому вигляді в термінах u' і η:

$$U_{1,1}^0=U_{3,3}^0=u'v,\qquad v=\frac{23}{2}+\frac{5}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}-\frac{15}{2}\eta,$$

$$U_{2,2}^0=u'g=16u'+4e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{3}{2}}(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}}-12e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{5}{2}}(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}=$$

$$=u'\left[16+40(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}}-120\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}\right]=u'\big[16+40(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}(4-3\eta-3\eta)\big],$$

$$g=8\big[2+10(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}(2-3\eta)\big].$$

Таким чином, матрицю U^0 визначено так:

$$U^0=u'U_1',\qquad U_1'=\begin{pmatrix}v & -8 & -1\\ -8 & g & -8\\ -1 & -8 & v\end{pmatrix}=-2U_{*1}+(v+1)I,$$

$$U_*(g_1)=U_{*1}=2^{-1}\begin{pmatrix}1 & 8 & 1\\ 8 & 2g_1 & 8\\ 1 & 8 & 1\end{pmatrix},\qquad 2g_1=-g+v+1,$$

де I — одинична матриця, U_{*1} має однакові перший і третій рядки, а отже, $\operatorname{Det}U_{*1}=0$. Це дозволяє знайти корені характеристичних поліномів p_{*1} і p_1' відповідно матриць U_{*1} і U_1' за допомогою формули

$$p_*(\lambda,q)=\operatorname{Det}(\lambda I-U_*(q))=\big[\lambda^2-(q+1)\lambda+q-32\big]\lambda.$$

Щоб довести цю рівність, необхідно відняти третій рядок $-U_*(q)+\lambda I$ від першого. При цьому детермінант не зміниться:

$$\begin{pmatrix} \lambda-2^{-1} & -4 & 2^{-1} \\ -4 & \lambda-q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda-2^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -4 & \lambda-q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda-2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Після цього розкладемо детермінант останньої матриці за елементами першого рядка:

$$p_*(\lambda,q)=\lambda\big[(\lambda-q)(\lambda-2^{-1})-16-16-2^{-1}(\lambda-q)\big]=\lambda\big[(\lambda-q)(\lambda-1)-32\big].$$

Корені $p_*(q)$ визначено так:

$$2\lambda=q+1\pm\sqrt{(q-1)^2+128},\quad \lambda=0.$$

В результаті корені p_1' матриці U_1' мають вигляд

$$p_1'(\lambda)=-2^3p_*\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{v+1}{2},g_1\right),$$

$$\lambda=v-g_1\pm\sqrt{(g_1-1)^2+128},\qquad \lambda=v+1=\zeta_1'.$$

Нехай ζ_2', ζ_3' збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня:

$$\zeta_2'=\frac{g+v-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2+128},$$

$$\zeta_3'=\frac{g+v-1}{2}-\sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2+128}.$$

Тоді

$$\zeta_1'>0,\ \zeta_3'<\zeta_2',\ \eta\le\frac{2}{3}\ \to\ \zeta_2'>0.$$

При цьому ми врахували, що $g\ge 16$, якщо $0<\eta\le 3^{-1}\cdot 2$.

Тепер покажемо, що $\zeta_3'>0$, якщо $0<\eta\le 3^{-1}$. Очевидно, що

$$\zeta_3'>\frac{g+v-1}{2}-\sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2}-\sqrt{128}=$$

$$=\frac{g+v-1}{2}-\left(\frac{g-v+1}{2}\right)-\sqrt{128}=v-1-\sqrt{128}.$$

Нехай $0\le\eta\le\dfrac{1}{6}$. Тоді

$$v-1>\frac{23}{2}+\frac{5}{2}-\frac{5}{4}-1>\frac{23}{2}>\sqrt{128}\to\zeta_3'>0.$$

Нехай $\frac{1}{6} \leq \eta \leq \frac{1}{4}$. Тоді

$$v - 1 > \frac{23}{2} + \frac{5}{2}(1 - 6^{-1})^{-\frac{3}{2}} - \frac{15}{8} - 1,$$

$$\frac{5}{2}(1 - 6^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\frac{6\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} > 3 \to v - 1 > \frac{23}{2} > \sqrt{128} \to \zeta_3' > 0.$$

Нехай $\frac{1}{4} \leq \eta \leq \frac{1}{3}$. Тоді $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$ і

$$v - 1 > \frac{23}{2} + \frac{5}{2}(1 - 4^{-1})^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2} - 1,$$

$$\frac{5}{2}(1 - 4^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\frac{8}{3\sqrt{3}} > 5\frac{16}{21} = \frac{80}{21} \to v - 1 > \frac{23}{2} + \frac{80}{21} - \frac{7}{2} > \frac{23}{2},$$

тобто $\zeta_3' > 0$.

Твердження 2.1. *Якщо* $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$, *то немає резонансу по* ζ_2' *і квадратичного резонансу по* ζ_1', *тобто* $\zeta_s'\zeta_1'^{-1} \neq k^2$, $s = 2, 3$, *де* k *— ціле число.*

Доведення. З нерівностей

$$g \geq 8\left(2 + \frac{10}{32}\right) = 16 + \frac{5}{2}, \qquad v \leq \frac{23}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} < 12 + 5\left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{1}{2}} < 17, \quad g - v > 1,$$

випливає, що $\zeta_2' > g > v + 1 = \zeta_1' > 0$, тобто $\frac{\zeta_1'}{\zeta_2'} < 1$ і $\zeta_1' \neq \zeta_2'$. Тут ми використали нерівність

$$\sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128} \geq \frac{g - v + 1}{2}.$$

Далі,

$$v + 16 > g,$$

оскільки

$$g < 8\big(2 + 3^{-\frac{5}{2}} \cdot 20\big) = 8\left(2 + \frac{20}{9\sqrt{3}}\right) < 8\left(2 + \frac{4}{3}\right) < 27,$$

$$v \geq \frac{23}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 11\frac{1}{2}.$$

Тут враховано, що $\frac{5}{3} < \sqrt{3}$. З

$$\left(\frac{v - g - 1}{2}\right)^2 = 4^{-1}(v - g + 16)^2 - \frac{17}{2}(v - g + 16) + \frac{17^2}{4} < 4^{-1}(v - g + 16)^2 + 73 \to$$

$$\to \sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128} < 2^{-1}(v - g + 16) + 15 \to \zeta_2' < \zeta_1' + 22$$

випливає, що

$$v > \frac{19}{3} \to \zeta_1' > \frac{22}{3} \to \frac{\zeta_2'}{\zeta_1'} < 1 + \frac{22}{\zeta_1'} < 4.$$

Крім того,

$$\zeta_3' - \zeta_1' = \frac{g-v-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2 + 128}.$$

Оскільки $g > v$, отримуємо

$$\zeta_3' - \zeta_1' < \frac{g-v-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2} < -2$$

і $\dfrac{\zeta_3'}{\zeta_1'} < 1,\ \zeta_1' \neq \zeta_3'$.

Твердження доведено.

Порядок зарядів на прямій зберігається завдяки необмеженому відштовхуванню між ними, і тому ми можемо замінити потенціал $|x_j - x_k|^{-1}$ на дійсну аналітичну функцію $(x_j - x_k)^{-1}$ в околі рівноваги.

З того, що власні значення U^0 рівні: $\zeta_j = u'\zeta_j'$, і з центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $\eta = \left(\dfrac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{2}{3}} \le \dfrac{1}{3}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 1,\ N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (2.1) *має рівновагу* $x_1^0 = -a,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = a > 0$ *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1),\ \tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}\left(\sqrt{\zeta_j}\right)^{-1}$.

3. Площинна динаміка. У цьому пункті розглядаємо динаміку на площині трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника $b_j,\ 1 \le j \le 4,\ b_j = \left(b_j^1, b_j^2\right) \in \mathbb{R}^2$, зі сторонами $2a,\ 2b$, який симетрично розташований на площині щодо двох координатних осей, тобто

$$b_1 = (a, b), \qquad b_2 = (a, -b), \qquad b_3 = (-a, b), \qquad b_4 = (-a, -b).$$

Потенціальна енергія динаміки визначається таким чином:

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k = 1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{4} |x_j - b_k|^{-1}, \tag{3.1}$$

де

$$x_j = (x_j^1, x_j^2) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2, \quad e_j = -e_0 < 0.$$

Рівновага $x_j^0,\ j = 1, 2, 3$, задається так: $x_1^1 = x_1^{01} = -a,\ x_2^1 = x_2^{01} = 0,\ x_3^1 = x_3^{01} = a$, $x_j^\alpha = x_j^{0\alpha} = 0,\ \alpha = 2$. Частинні похідні потенціальної енергії U визначено таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} U(x_{(3)}) = -e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{x_j^\alpha - x_k^\alpha}{|x_j - x_k|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{4} \frac{x_j^\alpha - b_k^\alpha}{|x_j - b_k|^3}. \tag{3.2}$$

Це приводить до рівноважного співвідношення між e_0, e', a, b, такого, як у попередньому пункті. Прирівнюючи до нуля праві частини цих рівностей при $j = 1, 3$ (результат той самий) і беручи до уваги рівність $x_1^{01} - x_3^{01} = -2a$, отримуємо

$$|x_3^0 - b_1|^2 = |x_3^0 - b_2|^2 = b^2, \qquad |x_3^0 - b_3|^2 = |x_3^0 - b_4|^2 = (2a)^2 + b^2,$$
$$|x_1^0 - b_1|^2 = |x_1^0 - b_2|^2 = (2a)^2 + b^2, \qquad |x_1^0 - b_3|^2 = |x_1^0 - b_4|^2 = b^2,$$
$$|x_2^0 - b_j|^2 = a^2 + b^2, \quad j = 1, 2, 3,$$

і

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{x_1^{01} - b_k^1}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\frac{4a}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\,\right)^3},$$
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{x_1^{02} - b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^{4} \frac{b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0.$$

Права частина формули (3.2) є нулем для $\alpha = 2$ й $j = 2$, тому що $\left|x_2^0 - x_1^0\right| = \left|x_3^0 - x_2^0\right|$, $x_1^{01} = -x_3^{01}$, $x_2^0 = 0$. Рівноважні співвідношення мають вигляд

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2} + \frac{e_0^2}{a^2} = \frac{2e'(2a)e_0}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\,\right)^3}, \qquad \frac{5e_0}{(2a)^3} = \frac{2e'}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\,\right)^3}.$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії (3.1) визначаються таким чином:

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha \partial x_k^\beta} = \frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_k^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} - 3\frac{\left(x_j^\alpha - x_k^\alpha\right)\left(x_j^\beta - x_k^\beta\right)}{|x_j - x_k|^5} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad j \neq k,$$

і

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \left[-\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} + 3\frac{\left(x_j^\alpha - x_k^\alpha\right)\left(x_j^\beta - x_k^\beta\right)}{|x_j - x_k|^5} \right] +$$
$$+ e_0\, e' \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - b_k|^3} - 3\frac{\left(x_j^\alpha - b_k^\alpha\right)\left(x_j^\beta - b_k^\beta\right)}{|x_j - b_k|^5} \right].$$

Нехай η, u' — такі, як і в попередньому пункті. Тоді справджуються рівності

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{1}{\left|x_j^0 - x_k^0\right|^3} = e_0^2\left[((2a)^{-3} + a^{-3})(1 - \delta_{j,2}) + 2a^{-3}\delta_{j,2}\right] =$$
$$= \frac{9u'}{2}\left[(1 - \delta_{j,2}) + 8u'\delta_{j,2}\right], \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.3}$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{4} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} 2 e_0 e' \big(b^{-3} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}\big) =$$

$$= 5\delta_{\alpha,\beta}\left[\frac{u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{u'}{2}\right], \quad j = 1, 3,$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{4} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_2^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} \cdot 4 e_0 e' (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = \delta_{\alpha,\beta} \cdot 40 u' (4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}}. \tag{3.4}$$

Нехай

$$T_j(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\big(x_j^\alpha - b_k^\alpha\big)\big(x_j^\beta - b_k^\beta\big)}{|x_j - b_k|^5}.$$

Припустимо, що $T_j^0(\alpha,\beta)$ також є рівноважним значенням $T_j(\alpha,\beta)$. Доведемо рівності

$$T_j^0(\alpha,\beta) = \delta_{\alpha,\beta}\Big[8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,1} + 2b^2(b^{-5} + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}})\delta_{\alpha,2}\Big], \quad j = 1, 3, \tag{3.5}$$

$$T_2^0(\alpha,\beta) = 4(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,\beta}\big(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}\big), \tag{3.6}$$

використавши формули

$$T_3^0(1,2) = -\Big[b^{-5}((a-b_1^1)b_1^2 + (a-b_2^1)b_2^2) + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}((a-b_3^1)b_3^2 + (a-b_4^1)b_4^2)\Big] = 0,$$

$$T_1^0(1,2) = -\Big[((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\big((-a-b_1^1)b_1^2 + (-a-b_2^1)b_2^2\big) +$$

$$+ b^{-5}\big((-a-b_3^1)b_3^2 + (-a-b_4^1)b_4^2\big)\Big] = 0,$$

$$T_3^0(1,1) = b^{-5}\big[(a-b_1^1)^2 + (a-b_2^1)^2\big] + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\big[(a-b_3^1)^2 + (a-b_4^1)^2\big] =$$

$$= 8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_1^0(1,1) = ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\big[(-a-b_1^1)^2 + (-a-b_2^1)^2\big] + b^{-3}\big[(-a-b_3^1)^2 + (-a-b_4^1)^2\big] =$$

$$= 8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_j^0(2,2) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0 - b_k|^5}, \quad j = 1, 3, \qquad T_1^0(2,2) = T_3^0(2,2) = 2b^2\big[b^{-5} + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\big],$$

$$T_2^0(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{4} \frac{b_k^\alpha b_k^\beta}{|x_2^0 - b_k|^5} = (a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{4} b_k^\alpha b_k^\beta = 4(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,\beta}\big(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}\big).$$

Отже, рівності (3.5), (3.6) є правильними. Беручи до уваги (3.3) – (3.5) і

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{\left(x_j^{0\alpha} - x_k^{0\alpha}\right)\left(x_j^{0\beta} - x_k^{0\beta}\right)}{\left|x_j^0 - x_k^0\right|^5} = e_0^2(a^{-3} + (2a)^{-3})\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = \frac{9u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}, \quad j = 1, 3,$$

отримуємо

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{3,\alpha;3,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v' - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_*),$$

де

$$v' = \frac{5}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - 2, \qquad u'u'_* + \frac{27u'}{2} = 6e_0e' \cdot 4a^2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$u'u''_* = 6e_0e'b^2(b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}),$$

$$u'_* = \frac{15}{2}\eta - \frac{27}{2}, \qquad u''_* = \frac{15}{2}\big[1 - \eta + (1-\eta)^{-\frac{3}{2}}\big].$$

При цьому ми застосували рівноважне співвідношення, (2.2) і рівності

$$u'u'_* + \frac{27u'}{2} = 6e_0e'(2a)^2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= 6e_0e'(2a)^2\left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 = \frac{15u'}{2}\eta,$$

$$u'_* = \frac{15}{2}\eta - \frac{27}{2}, \qquad 6e_0e'b^{-3} = \frac{15u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$6e_0e'b^2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0e'(2a)^2(1-\eta)\eta^{-1}\left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 = \frac{15u'}{2}(1-\eta).$$

Із рівності

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq 2}^{3} \frac{\left(x_2^{0\alpha} - x_k^{0\alpha}\right)\left(x_2^{0\beta} - x_k^{0\beta}\right)}{\left|x_2^0 - x_k^0\right|^5} = e_0^2 2a^{-3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = 8u'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}$$

і (3.4), (3.6) одержуємо

$$U^0_{2,\alpha;2,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v_1 - u_1\delta_{\alpha,1} - \delta_{\alpha,2}u'_1),$$

де

$$v_1 = -8 + 40(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$u'u_1 = 12e_0e'(a^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}a^2, \qquad u_1 = 120\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} - 24,$$

$$u'u'_1 = 12e_0e'(a^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}b^2, \qquad u'_1 = 480(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}.$$

При цьому ми скористались рівностями

$$2a=(1-\eta)^{-\frac12}\sqrt{\eta}b,\qquad a^2+b^2=a^2\eta^{-1}(4-3\eta),$$
$$e_0e'(a^2+b^2)^{-\frac52}a^2=e_0e'a^{-3}\eta^{\frac52}(4-3\eta)^{-\frac52}=10u'\eta(4-3\eta)^{-\frac52},$$
$$e_0e'(a^2+b^2)^{-\frac52}b^2=e_0e'a^{-3}\eta^{\frac32}(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac52}(2a)^2=40u'(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac52}.$$

Ми також маємо

$$e_0^2\frac{\left(x_2^{0\alpha}-x_k^{0\alpha}\right)\left(x_2^{0\beta}-x_k^{0\beta}\right)}{\left|x_2^0-x_k^0\right|^5}=e_0^2\frac{x_k^{0\alpha}x_k^{0\beta}}{a^5}=e_0^2a^{-3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}=4u'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1},\quad k=1,3,$$
$$e_0^2\frac{(x_1^{0\alpha}-x_3^{0\alpha})(x_1^{0\beta}-x_3^{0\beta})}{|x_1^0-x_3^0|^5}=e_0^2(2a)^{-3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}=\frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1},$$
$$\frac{1}{|x_1^0-x_2^0|^3}=\frac{1}{|x_2^0-x_3^0|^3}=a^{-3},\qquad \frac{1}{|x_1^0-x_3^0|^3}=(2a)^{-3}.$$

Ці рівності приводять до співвідношень

$$U^0_{1,\alpha;3,\beta}=U^0_{3,\alpha;1,\beta}=\frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1-3\delta_{\alpha,1}),$$
$$U^0_{2,\alpha;3,\beta}=U^0_{3,\alpha;2,\beta}=U^0_{2,\alpha;1,\beta}=U^0_{1,\alpha;2,\beta}=4u'\delta_{\alpha,\beta}(1-3\delta_{\alpha,1}).$$

Тепер ми визначаємо дві тривимірні матриці $U^0_\alpha,\ \alpha=1,2,$ за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta}=\delta_{\alpha,\beta}U^0_{\alpha;j,k}$$

і перенумеровуємо індекси координат таким чином:

$$(1,1)=1,\qquad (2,1)=2,\qquad (3,1)=3,\qquad (1,2)=4,\qquad (2,2)=5,\qquad (3,2)=6,$$

до того ж перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми й верхніми індексами координат. Звідси отримуємо

$$U^0=U^0_1\oplus U^0_2.$$

Елементи симетричної матриці U^0_1 мають вигляд

$$U^0_{1;1,1}=U^0_{1,1;1,1}=U^0_{1;3,3}=U^0_{3,1;3,1}=u'(v'-u'_*),\qquad U^0_{1;2,2}=U^0_{2,1;2,1}=u'(v_1-u_1),$$
$$U^0_{1;2,1}=U^0_{1;1,2}=U^0_{1,1;2,1}=-8u',\qquad U^0_{1;3,1}=U^0_{1;1,3}=U^0_{1,1;3,1}=-u',$$
$$U^0_{1;3,2}=U^0_{1;2,3}=U^0_{1,1;3,1}=-8u',$$

а елементи симетричної матриці U^0_2 —

$$U^0_{2;1,1}=U^0_{1,2;1,2}=U^0_{2;3,3}=U^0_{3,2;3,2}=u'(v'-u''_*)=-u'u''+\frac{u'}{2},$$
$$U^0_{2;2,2}=U^0_{2,2;2,2}=u'(v_1-u'_1)=u'g',$$
$$U^0_{2;2,1}=U^0_{2;1,2}=U^0_{1,2;2,2}=4u',\qquad U^0_{2;3,1}=U^0_{2;1,3}=U^0_{1,2;3,2}=\frac{u'}{2},$$

$$U^0_{2;3,2} = U^0_{2;2,3} = U^0_{2,2;3,2} = 4u'.$$

Параметри цих матриць обчислюються за формулами

$$u'v' - u'_* = \frac{5u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - 2u' - \frac{15u'}{2}\eta + \frac{27u'}{2} = u'v,$$

$$u'(v_1 - u_1) = -8u' + 40u'(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} - 120u'\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} + 24u' = u'g,$$

де v, g визначено у другому пункті,

$$-u''u' = u'v' - u'u''_* - \frac{u'}{2} = u'\left\{\frac{5}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - 2 - \frac{15}{2}\big[1-\eta+(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}\big]\right\} - \frac{u'}{2},$$

$$u'' = 10 - \frac{15\eta}{2} + 5(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}, \quad u'' > 0,$$

$$u'g' = u'(v_1 - u'_1) = -8u' + 40u'(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} - 480u'(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= u'\big\{-8 + 40(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}[4 - 3\eta - 12(1-\eta)]\big\},$$

$$g' = -8\big[1 + 5(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}(8-9\eta)\big].$$

В результаті отримуємо

$$U^0_1 = u'\begin{pmatrix} v & -8 & -1 \\ -8 & g & -8 \\ -1 & -8 & v \end{pmatrix} = u'U'_1, \qquad U'_1 = -2U_*(g_1) + (v+1)I, \qquad 2g_1 = -g + v + 1,$$

$$U^0_2 = u'2^{-1}\begin{pmatrix} -2u''+1 & 8 & 1 \\ 8 & 2g' & 8 \\ 1 & 8 & -2u''+1 \end{pmatrix} = u'U'_2, \qquad U'_2 = U_*(g_2) - u''I, \quad g_2 = g' + u'',$$

де матриця U_* визначена у другому пункті, в якому ми знайшли її власні значення як корені $p_*(q)$. Тепер легко знайти власні значення матриці U'_2 як корені полінома p'_2:

$$p'_2(\lambda) = p_*(\lambda + u'', g_2).$$

Маємо

$$2\lambda = g_2 - 2u'' + 1 \pm \sqrt{(g_2-1)^2 + 128}, \quad \lambda = -u'' = \zeta'_4 < 0.$$

Нехай ζ'_5, ζ'_6 збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня. Тоді

$$2\zeta'_5 = g' - u'' + 1 + \sqrt{(g' + u'' - 1)^2 + 128},$$

$$2\zeta'_6 = g' - u'' + 1 - \sqrt{(g' + u'' - 1)^2 + 128}.$$

Якщо $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$, то

$$(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} \le (1-3^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{28}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.$$

В результаті отримуємо

$$12 < u'' \le 20, \quad -g' > 8,$$

$\zeta_5' < 0$, якщо $g' < 0$, і

$$\big(|g'| - u'' + 1\big)^2 + 128 < \big(|g'| + u'' - 1\big)^2, \quad 4(u''-1)|g'| > 128.$$

Це справедливо, якщо $0 < \eta \le \frac{1}{3}$. У цьому випадку $\zeta_6' < \zeta_5' < 0$.

Твердження 3.1. *Якщо* $0 < \eta \le \frac{1}{3}$, *то немає резонансу по* $\zeta_2 = u'\zeta_2'$ *і квадратичного резонансу по* $\zeta_1 = u'\zeta_1'$, *тобто* $\zeta_s'\zeta_1'^{-1} \ne k^2$, $s = 2, 3$, *де* k *— ціле число, для власних значень* U^0 *площинної системи Кулона.*

Це твердження та центральна теорема Ляпунова доводять таку теорему.

Теорема 3.1. *Нехай* $\eta = \left(\frac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{2}{3}} \le \frac{1}{3}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 2,\ N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (3.1) *має рівновагу* $x_1^{01} = -a,\ x_2^{01} = 0,\ x_3^{01} = a > 0$, $x_j^{02} = 0,\ j = 1, 2, 3$, *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1),\ \tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}\big(\sqrt{\zeta_j}\,\big)^{-1}$.

4. Просторова динаміка Кулона. У цьому пункті ми розглядаємо динаміку у просторі $\mathbb{R}^3$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника $b_j,\ 1 \le j \le 4,\ b_j = \big(b_j^1, b_j^2, 0\big) \in \mathbb{R}^3$, зі сторонами $2a,\ 2b$, який симетрично розташований на площині щодо двох перших координатних осей, тобто

$$b_1 = (a, b, 0), \quad b_2 = (a, -b, 0), \quad b_3 = (-a, b, 0), \quad b_4 = (-a, -b, 0).$$

Потенціальна енергія визначається таким чином:

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2}\sum_{j\ne k=1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} |x_j - b_k|^{-1}, \tag{4.1}$$

де

$$|x|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2 + (x_j^3)^2, \quad e_j = -e_0 < 0.$$

Неважко бачити, повторюючи розрахунки з попереднього пункту, що елементи матриці других частинних похідних потенціальної енергії у рівновазі $x_1^1 = x_1^{01} = -a,\ x_2^1 = x_2^{01} = 0,\ x_3^1 = x_3^{01} = a,\ x_j^\alpha = x_j^{0\alpha} = 0,\ \alpha = 2, 3$, мають для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ такий вигляд:

$$U^0_{1,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}),$$
$$U^0_{2,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = U^0_{1,\alpha;2,\beta} = 4u'\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}),$$

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{3,\alpha;3,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v' - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_*),$$
$$U^0_{2,\alpha;2,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v_1 - u_1\delta_{\alpha,1} - \delta_{\alpha,2}u'_1).$$

Тепер ми визначимо три тривимірні матриці U^0_α, $\alpha = 1, 2, 3$, за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}U^0_{\alpha;j,k}$$

і перенумеруємо індекси координат таким чином:

$$(1,1) = 1, \quad (2,1) = 2, \quad (3,1) = 3, \quad (1,2) = 4, \quad (2,2) = 5, \quad (3,2) = 6,$$
$$(1,3) = 7, \quad (2,3) = 8, \quad (3,3) = 9,$$

де перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми й верхніми індексами координат. Звідси отримуємо

$$U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2 \oplus U^0_3.$$

Елементи симетричних матриць U^0_1, U^0_2 визначено у попередньому пункті, а

$$U^0_{3;1,3} = U^0_{3;3,1} = U^0_{1,3;3,3} = U^0_{3,3;1,3} = \frac{u'}{2},$$
$$U^0_{3;1,2} = U^0_{3;2,1} = U^0_{3;2,3} = U^0_{3;3,2} = U^0_{2,3;3,3} = U^0_{3,3;2,3} = U^0_{2,3;1,3} = U^0_{1,3;2,3} = 4u',$$
$$U^0_{3;1,1} = U^0_{1,3;1,3} = U^0_{3;3,3} = U^0_{3,3;3,3} = u'v', \qquad U^0_{3;2,2} = U^0_{2,3;2,3} = u'v_1.$$

Матриця U^0_3 виражається також через U_*:

$$U^0_3 = u' \cdot 2^{-1}\begin{pmatrix} 2v' & 8 & 1 \\ 8 & 2v_1 & 8 \\ 1 & 8 & 2v' \end{pmatrix} = u'U'_3, \qquad U'_3 = U_*(g_3) + (v' - 1)I, \qquad g_3 = v_1 - v' + 1.$$

Корені p'_3 матриці U'_3 мають вигляд

$$p'_3(\lambda) = p_*(\lambda + 1 - v', g_3),$$
$$2\lambda = g_3 - 2(1 - v') + 1 \pm \sqrt{(g_3 - 1)^2 + 128}, \quad \lambda = v' - 1 = \zeta'_7.$$

Нехай ζ'_8, ζ'_9 збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня. Тоді

$$2\zeta'_8 = v_1 + v' - 1 + \sqrt{(v_1 - v')^2 + 128},$$
$$2\zeta'_9 = v_1 + v' - 1 - \sqrt{(v_1 - v')^2 + 128}.$$

Нагадаємо, що

$$v_1 = -8 + 40(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}}, \qquad v' = \frac{5}{2}(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} - 2.$$

Припустимо, що $0 < \eta \le \dfrac{1}{3}$. Тоді

$$(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} \le (1-3^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{28}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\frac{1}{8} < (4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} \le 3^{-\frac{3}{2}} = (27)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ці нерівності доводять, що

$$\frac{1}{2} \le v' \le 3, \qquad -8+5 < v_1 < -8 + \frac{40}{\sqrt{27}} < 0,$$

$$-6 < v_1 - v' < -\frac{1}{2}, \qquad -\frac{5}{2} < v_1 + v' < 3 \to \zeta_9' < 0,$$

$$\sqrt{(v_1 - v')^2 + 128} < \sqrt{164} < 13, \qquad 2\zeta_8' < 15.$$

В результаті отримуємо

$$-\frac{7}{2} + 11 < \zeta_8' < \zeta_1' < \zeta_2', \quad \zeta_7' < \zeta_1' < \zeta_2',$$

тому що $\zeta_2' > \zeta_1 > 11$.

Отже, ми встановили таке твердження.

Твердження 4.1. *Якщо* $0 < \eta \le \dfrac{1}{3}$, *то немає резонансу по* $\zeta_2 = u'\zeta_2'$ *і квадратичного резонансу по* $\zeta_1 = u'\zeta_1'$, *тобто* $\zeta_s'\zeta_1'^{-1} \ne k^2$, $s = 2, 3$, *де* k *— ціле число, для власних значень* U^0 *просторової системи Кулона. При цьому* $\zeta_7' \ne 0$, *якщо*

$$\eta \ne 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Це твердження та центральна теорема Ляпунова доводять таку теорему.

Теорема 4.1. *Нехай* $\eta = \left(\dfrac{5e_0}{2e'}\right)^{\frac{2}{3}} \le \dfrac{1}{3}$ *і* $\eta \ne 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 3$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (4.1) *має рівновагу* $x_1^{01} = -a$, $x_2^{01} = 0$, $x_3^{01} = a > 0$, $x_j^{0\alpha} = 0$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha = 2, 3$, *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1)$, $\tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}\left(\sqrt{\zeta_j}\right)^{-1}$.

Література

1. W. Skrypnik, *Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line*, Ukr. Math. J., **66**, № 5, 668 – 682 (2014).
2. W. Skrypnik, *Coulomb planar dynamics of two and three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 11, 1528 – 1539 (2016).
3. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics near equilibrium of two equal negative charges in the field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1273 – 1285 (2016).
4. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics of three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, J. Geom. and Phys., **127**, 101 – 111 (2018).

5. В. Скрипник, *Періодична кулонівська динаміка двох рівних від'ємних зарядів у полі фіксованих чотирьох рівних додатних зарядів*, Укр. мат. журн., **72**, № 10, 1432 – 1442 (2020).
6. В. Скрипник, *Періодична кулонівська динаміка двох рівних від'ємних зарядів у полі фіксованих шістьох рівних додатних зарядів*, Укр. мат. журн., **72**, № 12, 1682 – 1696 (2020).
7. W. Skrypnik, *Periodic Coulomb dynamics of three equal negative charges in the field of equal positive charges fixed in octagon vertices*, Adv. Math. Phys., **2020**, Article ID 35467136 (2020), 12 p.; https://doi.org/10.1155/2020/3547136.
8. A. Lyapunov, *General problem of stability of motion*, Moscow (1950); *English translation*: Internat. J. Control, **55**, № 3, 521 – 790 (1992).
9. M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Lect. Nonlinear Problems in Math. Analysis, Acad. Press, New York etc. (1977).
10. J. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York (1976).
11. C. Siegel, J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
12. В. Немыцкий, В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва, Ленинград (1947).
13. W. Skrypnik, *Coulomb planar periodic motion of n equal charges n the field of n equal positive charges fixed at a line and constant magnetic field*, Adv. Math. Phys., **2018**, Article ID 2548074 (2018), 10 p.; https://doi.org/10.1155/2548074.
14. C. Siegel, *Über eine periodische Lösung in ebenen Drei Körper Problem*, Math. Nachr., **4**, 28 – 35 (1950 – 1951).
15. W. Skrypnik, *Mechanical systems with singular equilibria and Coulomb dynamics of three charges*, Ukr. Math. J., **70**, № 4, 519 – 533 (2018).

Одержано 31.01.21