DOI: 10.37863/umzh.v73i12.6858

УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ У КІЛЬЦІ $M(n, R)$ І ЙОГО ПІДКІЛЬЦЯХ

In this article, we consider the equivalence of matrices in the ring $M(n, R)$ and its subrings of block triangular matrices $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ and block diagonal matrices $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$, where R is a commutative principal ideal domain, and investigate the connections between these equivalences. Under the conditions that the block triangular matrices are block diagonalizable, i.e., equivalent to their main block diagonals, we establish that these matrices are equivalent in the ring $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ of block triangular matrices if and only if their main diagonals are equivalent in the subring $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ of block diagonal matrices, i.e., the corresponding diagonal blocks of these matrices are equivalent. We also prove that if block triangular matrices A and B with the Smith normal forms $S(A) = S(B)$ are equivalent to the Smith normal forms in the subring $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, then these matrices are equivalent in the subring $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Розглянуто еквівалентність матриць у кільці $M(n, R)$ і його підкільцях $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних і $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, де R — комутативна область головних ідеалів, та досліджено їхні зв'язки. Встановлено, що якщо блочно-трикутні матриці блочно діагоналізовні, тобто еквівалентні до своїх головних блочних діагоналей, то вони еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних матриць тоді і тільки тоді, коли їхні головні блочні діагоналі еквівалентні у підкільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, тобто їхні відповідні діагональні блоки еквівалентні. Доведено також, що якщо блочно-трикутні матриці A і B з нормальними формами Сміта $S(A) = S(B)$ еквівалентні до нормальних форм Сміта в підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, то ці блочно-трикутні матриці еквівалентні і в підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Нехай R — комутативна область головних ідеалів. Через $M(n, R)$ і $GL(n, R)$ позначаємо кільце $(n \times n)$-матриць і повну лінійну групу кільця, тобто групу оборотних $(n \times n)$-матриць над R, відповідно. Через $M_T(n, R)$ позначатимемо підкільце верхніх трикутних матриць кільця $M(n, R)$.

Далі, через $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ позначатимемо підкільце верхніх блочно-трикутних матриць кільця $M(n, R)$, тобто матриць вигляду

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{bmatrix},$$

яку будемо позначати так: $A = \operatorname{triang}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\} = [A_{ij}]_1^k$, де $A_{ij} = 0$, якщо $i > j$, $A_{ii} \in M(n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Блочну діагональ матриці A позначатимемо $D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\}$.

Через $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ позначатимемо підкільце блочно-діагональних матриць кільця $M(n, R)$, тобто матриць $D = \operatorname{diag}\{D_{11}, \ldots, D_{kk}\}$, де $D_{ii} \in M(n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$. Зокрема, блочна діагональ $D(A)$ матриці A належить підкільцю $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Групи оборотних матриць у підкільцях $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ і $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ позначаємо відповідно $GL_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ і $GL_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$, групу уніблочно-трикутних матриць у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто оборотних верхніх блочно-трикутних матриць, діагональні блоки яких є одиничними матрицями відповідних порядків, позначатимемо $GL_{UBT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.

Нагадаємо, що матриці A і B називають еквівалентними у кільці $M(n,R)$, якщо існують оборотні матриці $P,Q\in GL(n,R)$ такі, що $PAQ=B$. Якщо матриці $P,Q\in GL_{BT}(n_1,\ldots$ $\ldots,n_k,R)$ або $P,Q\in GL_{BD}(n_1,\ldots,n_k,R)$, то матриці A і B називають еквівалентними у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ блочно-трикутних або у підкільці $M_{BD}(n_1,\ldots,n_k,R)$ блочно-діагональних матриць відповідно.

Ми досліджуємо еквівалентність у кільцях матриць та їхніх підкільцях, зокрема блочно-трикутних і блочно-діагональних матриць. Еквівалентність блочно-трикутних і блочно-діагональних матриць використовується, зокрема, при встановленні умов розв'язності відомих матричних рівнянь типу Сильвестра, до яких приводить велика кількість задач (див. [1] і наведену там бібліографію). Матричне рівняння типу Сильвестра $AX-YB=C$, де $A,B,C\in$ $\in M(n,R)$ — відомі, а $X,Y\in M(n,R)$ — невідомі матриці, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли блочно-трикутна матриця

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

є еквівалентною до блочно-діагональної матриці

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \tag{2}$$

У випадку, коли $R=\mathbb{P}$ — поле або $R=\mathbb{P}[\lambda]$ — кільце поліномів над полем $\mathbb{P}$, цей результат встановив В. Рот [2]. Результат Рота поширено для матричних рівнянь над кільцями головних ідеалів [3], комутативними кільцями [4] та іншими областями.

У статті [1] на основі блочної діагоналізації, тобто еквівалентності матриць (1) і (2), наведено умови розв'язності систем різного типу матричних рівнянь Сильвестра. Застосовуючи спеціальну трикутну форму матриць над поліноміальними кільцями відносно напівскалярної еквівалентності до розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра, у [5] описано його розв'язки, зокрема встановлено мінімальні степені цих розв'язків. Еквівалентність і подібність матриць над різними областями застосовують у класифікаційних задачах лінійної алгебри [6, 7].

Матриці блочної будови також виникають і використовуються у різних розділах математики і в прикладних напрямках. Зокрема, супровідні матриці матричних поліномів застосовуються в теорії факторизації матричних поліномів [8], при розв'язуванні рівняння типу Сильвестра від двох змінних над кільцем поліномів $\mathbb{P}[\lambda]$. Останнє за допомогою переходу від матричних поліномів до відповідних супровідних матриць зводиться до лінійного матричного рівняння типу Сильвестра від однієї змінної над полем $\mathbb{P}$ [9, 10], методи розв'язування якого відомі. Такий же підхід до розв'язування матричного поліноміального рівняння Сильвестра пізніше використано у [11]. Блочні матриці застосовуються також у теорії стійкості [12].

Отже, різні задачі потребують дослідження матриць різноманітної блочної структури.

У цій статті розглянуто еквівалентність матриць у кільці $M(n, R)$ і його підкільцях $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних та $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць. Встановлено взаємозв'язки між цими еквівалентностями.

Еквівалентні у кільці $M(n, R)$ блочно-трикутні матриці можуть не бути еквівалентними у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, що випливає з такого прикладу.

***Приклад* 1.** Нехай блочно-трикутні матриці

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

із підкільця $M_{BT}(2, 2, \mathbb{Z})$ блочно-трикутних матриць, де $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел. Блочно-трикутні матриці A і B є еквівалентними у кільці $M(4, \mathbb{Z})$, але не є еквівалентними у підкільці $M_{BT}(2, 2, \mathbb{Z})$.

Очевидно, що коли блочно-трикутні матриці еквівалентні у підкільці блочно-трикутних матриць $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, то їхні відповідні діагональні блоки еквівалентні. Обернене твердження є хибним.

Лема 1. *Якщо блочно-трикутні матриці A і $B \in M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних матриць, то їхні блочні діагоналі $D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\}$ і $D(B) = \operatorname{diag}\{B_{11}, \ldots, B_{kk}\}$ еквівалентні у підкільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, тобто їхні відповідні діагональні блоки A_{ii}, B_{ii} еквівалентні: $P_i A_{ii} Q_i = B_{ii}$, де $P_i, Q_i \in GL(n_i, R)$ для всіх $i = 1, \ldots, k$.*

Теорема 1. *Нехай блочно-трикутні матриці $A, B \in M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно діагоналізовні, тобто еквівалентні у кільці $M(n, R)$ до блочних діагоналей $D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\}$ і $D(B) = \operatorname{diag}\{B_{11}, \ldots, B_{kk}\}$ відповідно. Блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних матриць тоді й лише тоді, коли $D(A)$ і $D(B)$ еквівалентні у підкільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць.*

Доведення. *Необхідність* випливає з леми 1.

Достатність. Нехай матриці $D(A)$ і $D(B)$ еквівалентні у підкільці блочно-діагональних матриць $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто

$$PD(A)Q = D(B), \tag{3}$$

де $P = \operatorname{diag}\{P_1, \ldots, P_k\}$, $Q = \operatorname{diag}\{Q_1, \ldots, Q_k\} \in GL_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

За умовою теореми блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні до своїх діагоналей $D(A)$, $D(B)$. Перетворювальні матриці можна вибрати уніблочно-трикутними [2, 3], тобто існують уніблочно-трикутні оборотні матриці U^A, V^A, U^B, $V^B \in GL_{UBT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ такі, що $U^A A V^A = D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\}$, $U^B B V^B = D(B) = \operatorname{diag}\{B_{11}, \ldots, B_{kk}\}$. Тоді з (3) маємо $PU^A A V^A Q = U^B B V^B$ або $\left(U^B\right)^{-1} PU^A A V^A Q \left(V^B\right)^{-1} = B$, де добутки матриць зліва і справа від матриці A є блочно-трикутними матрицями. Отже, блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що блочно-трикутна матриця другого порядку, тобто при $k=2$, є блочно діагоналізовною, якщо відповідне лінійне матричне рівняння Сильвестра розв'язне [2], а при довільному порядку k система лінійних матричних рівнянь, яка містить і матричні рівняння типу Сильвестра, є розв'язною [3].

***Наслідок* 1.** *Нехай трикутні матриці $A, B \in M_T(n,R)$ еквівалентні у кільці $M(n,R)$ до діагоналей $D(A)=\operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$, $D(B)=\operatorname{diag}(b_{11},\ldots,b_{nn})$ відповідно. Трикутні матриці A і B є трикутно еквівалентними, тобто еквівалентними у підкільці $M_T(n,R)$, тоді й лише тоді, коли їхні відповідні діагональні елементи асоційовані.*

Теорема 2. *Нехай блочні діагоналі*

$$D(A)=\operatorname{diag}\{A_{11},\ldots,A_{kk}\} \quad i \quad D(B)=\operatorname{diag}\{B_{11},\ldots,B_{kk}\}$$

блочно-трикутних матриць $A, B \in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ еквівалентні у підкільці

$$M_{BD}(n_1,\ldots,n_k,R)$$

блочно-діагональних матриць. Якщо

$$(\det A_{ii}, \det B_{i+j,i+j})=1, \quad i=1,\ldots,k-1, \quad j=1,\ldots,k-i, \tag{4}$$

то блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ блочно-трикутних матриць.

Доведення. Блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, якщо існують блочно-трикутні оборотні матриці X і $Y \in GL_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ такі, що $Y^{-1}AX=B$ або $AX=YB$, тобто

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1k} \\ 0 & X_{22} & \ldots & X_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & X_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1k} \\ 0 & Y_{22} & \ldots & Y_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & Y_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \ldots & B_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & B_{kk} \end{bmatrix}.$$

Цю матричну рівність можна записати у вигляді системи лінійних матричних рівнянь

$$\sum_{t=i}^{j} A_{it}X_{tj} = \sum_{s=i}^{j} Y_{is}B_{sj}, \quad i \le j, \quad i,j=1,\ldots,k.$$

Розіб'ємо отриману систему матричних рівнянь на дві частини:

$$A_{ii}X_{ii}=Y_{ii}B_{ii}, \quad i=1,\ldots,k, \tag{5}$$

і

$$A_{ii}X_{ij} - Y_{ij}B_{jj} = \sum_{s=i}^{j-1} Y_{is}B_{sj} - \sum_{t=i+1}^{j} A_{it}X_{tj}, \quad i < j, \quad i = 1, \ldots, k-1, \quad j = 2, \ldots, k. \tag{6}$$

Матричні рівняння вигляду (5) мають розв'язки $X_{ii} = X_{ii}^{(0)}$, $Y_{ii} = Y_{ii}^{(0)}$, причому $X_{ii}^{(0)}$, $Y_{ii}^{(0)}$ — оборотні матриці, бо діагоналі $D(A)$ та $D(B)$ еквівалентні у підкільці $M_{BD}(n_1, \ldots \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, тобто відповідні діагональні блоки блочно-трикутних матриць A і B еквівалентні.

Зважаючи на умову теореми та результати [2, 13], переконуємося, що кожне з матричних рівнянь вигляду (6) також має розв'язок.

Отже, блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що умову (4) можна сформулювати й у такому вигляді:

$$(\det A_{ii}, \det A_{jj}) = 1, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad i \neq j,$$

або

$$(\det B_{ii}, \det B_{jj}) = 1, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad i \neq j.$$

Нагадаємо, що кожна матриця $A \in M(n, R)$ еквівалентна у кільці $M(n, R)$ до нормальної форми Сміта $S(A) = PAQ = \operatorname{diag}\left(\mu_1^A, \ldots, \mu_n^A\right)$, $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, де $P, Q \in \in GL(n, R)$, μ_i^A — інваріантні множники матриці A.

Із теореми 2 отримуємо такі наслідки.

***Наслідок* 2.** *Нехай блочні діагоналі*

$$D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11}, \ldots, A_{kk}\} \quad i \quad D(B) = \operatorname{diag}\{B_{11}, \ldots, B_{kk}\}$$

блочно-трикутних матриць $A, B \in M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ *еквівалентні у підкільці*

$$M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$$

блочно-діагональних матриць. Якщо останні інваріантні множники діагональних блоків A_{ii} *матриці* A *і* $B_{i+j,i+j}$ *матриці* B *взаємно прості, тобто*

$$\left(\mu_{n_i}^{A_{ii}}, \mu_{n_{i+j}}^{B_{i+j,i+j}}\right) = 1, \quad i = 1, \ldots, k-1, \quad j = 1, \ldots, k-i, \tag{7}$$

то матриці A *і* B *еквівалентні у підкільці* $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ *блочно-трикутних матриць.*

Умову (7) можна сформулювати і у такому вигляді:

$$\left(\mu_{n_i}^{A_{ii}}, \mu_{n_j}^{A_{jj}}\right) = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k,$$

або

$$\left(\mu_{n_i}^{B_{ii}}, \mu_{n_j}^{B_{jj}}\right) = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

***Наслідок* 3.** *Нехай відповідні діагональні елементи трикутних матриць* $A, B \in M_T(n, R)$ *асоційовані й діагональні елементи хоча б однієї з матриць* A *або* B *є попарно взаємно простими. Тоді трикутні матриці* A *і* B *є трикутно еквівалентними, тобто еквівалентними у підкільці* $M_T(n, R)$ *трикутних матриць.*

Наступні результати пов'язують еквівалентність матриць у підкільці блочно-трикутних матриць $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ із звідністю їх до нормальних форм Сміта у цьому підкільці.

Теорема 3. *Нехай блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у кільці $M(n,R)$, тобто $S(A)=S(B)$. Якщо матриці A і B еквівалентні до нормальних форм Сміта у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, тобто $S(A)=P^AAQ^A$, $S(B)=P^BBQ^B$, де P^A, P^B, Q^A, $Q^B\in GL_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, то матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, тобто $UAV=B$, де $U,V\in GL_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.*

Доведення. Нехай блочно-трикутні матриці A і B еквівалентні у кільці $M(n,R)$, тобто мають ті самі нормальні форми Сміта $S(A)=S(B)$. З того, що A і $S(A)$, B і $S(B)$ еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, маємо $P^AAQ^A=S(A)$, $P^BBQ^B=S(B)$, де P^A, Q^A, P^B, $Q^B\in GL_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.

Отже, $\left(P^B\right)^{-1}P^AAQ^A\left(Q^B\right)^{-1}=B$ або $UAV=B$, де $U=\left(P^B\right)^{-1}P^A$, $V=Q^A\left(Q^B\right)^{-1}\in GL_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, тобто матриці A і B еквівалентні у підкільці $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай блочно-трикутна матриця*

$$A=\operatorname{triang}\{A_{11},\ldots,A_{kk}\}\in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R),$$

де без обмеження загальності покладемо $n_1\le n_2\le\ldots\le n_k$, і визначники діагональних блоків блочно-трикутної матриці A є попарно взаємно простими, тобто $(\det A_{ii},\det A_{jj})=1$ для всіх $i\ne j$, $i=1,\ldots,k$. Тоді:

1) *нормальна форма Сміта блочно-трикутної матриці A має вигляд*

$$S(A)=\operatorname{diag}\left\{E_{n_1},\ldots,E_{n_{k-1}},(E_{n_k-n_1}\oplus S(A_{11}))(E_{n_k-n_2}\oplus S(A_{22}))\ldots S(A_{kk})\right\}, \qquad (8)$$

де E_{n_i} — одиничні матриці порядку n_i, $S(A_{ii})$ — нормальні форми Сміта діагональних блоків A_{ii}, $i=1,\ldots,k$;

2) *блочно-трикутна матриця A є уніблочно-трикутно еквівалентною до блочної діагоналі $D(A)=\operatorname{diag}\{A_{11},\ldots,A_{kk}\}$, тобто $A=UD(A)V$, де*

$$U=\begin{bmatrix}E_{n_1}&U_{12}&U_{13}&\ldots&U_{1k}\\0&E_{n_2}&U_{23}&\ldots&U_{2k}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&0&E_{n_k}\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}E_{n_1}&V_{12}&V_{13}&\ldots&V_{1k}\\0&E_{n_2}&V_{23}&\ldots&V_{2k}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&0&E_{n_k}\end{bmatrix},$$

$$U_{ij}=\beta^{(ij)}\tilde{A}_{ij}A_{jj}^{adj},\quad V_{ij}=\alpha^{(ij)}A_{ii}^{adj}\tilde{A}_{ij},\quad \tilde{A}_{ij}=A_{ij}-\sum_{s=i+1}^{j-1}U_{is}A_{ss}V_{sj}$$

для всіх $i<j$, $i=1,\ldots,k-1$, $j=2,\ldots,k$, $\alpha^{(ij)}$ і $\beta^{(ij)}$ знаходимо із рівностей $\alpha^{(ij)}\det A_{ii}+\beta^{(ij)}\det A_{jj}=1$.

Доведення теореми отримуємо, використовуючи результати праці [13].

Наслідок 4. *Нехай діагональні елементи трикутної матриці $A=\operatorname{triang}(a_{11},\ldots,a_{nn})$ є попарно взаємно простими. Тоді:*

1) *нормальна форма Сміта трикутної матриці* A *має вигляд*

$$S(A) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varphi);$$

2) *трикутна матриця* A *є унітрикутно еквівалентною до діагональної матриці* $D(A) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, *тобто* $A = UD(A)V$, *де* U, V — *унітрикутні матриці.*

Зауважимо, що у статті [14] описано факторизації матриць у підкільцях блочно-трикутних і блочно-діагональних матриць над областями скінченнопороджених головних ідеалів в залежності від факторизацій їхніх діагональних блоків. Вказано умови існування та єдиності з точністю до асоційовності факторизацій матриць у цих підкільцях і запропоновано метод їхньої побудови. У [15] встановлено властивості інваріантних множників блочно-трикутних матриць та їхніх діагональних блоків, які використано при дослідженні односторонньої еквівалентності матриць й описі їх факторизацій.

Література

1. A. Dmytryshyn, B. Kågström, *Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization*, SIAM J. Matrix Anal. and Appl., **36**, № 2, 580 – 593 (2015).
2. W. E. Roth, *The equations* $AX - YB = C$ *and* $AX - XB = C$ *in matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., **3**, 392 – 396 (1952).
3. R. B. Feinberg, *Equivalence of partitioned matrices*, J. Res. Natl. Bur. Stand., **80B**, № 1, 89 – 97 (1976).
4. W. H. Gustafson, *Roth's theorem over commutative rings*, Linear Algebra and Appl., **23**, 245 – 251 (1979).
5. N. S. Dzhaliuk, V. M. Petrychkovych, *Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure*, Algebra and Discrete Math., **27**, № 2, 243 – 251 (2019).
6. В. М. Бондаренко, *Зображення гельфандових графів*, Праці Ін-т математики НАН України, Київ (2005).
7. V. V. Sergeichuk, *Canonical matrices and related questions*, Праці Ін-ту математики НАН України, **57** (2006).
8. I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrix polynomials*, Acad. Press, New York (1982).
9. V. M. Petrychkovich, *Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices*, Math. Notes, **37**, № 6, 431 – 435 (1985).
10. В. М. Петричкович, *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями*, Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів (2015).
11. S. Chen, Y. Tian, *On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices*, J. Franklin Inst., **351**, № 12, 5376 – 5385 (2014).
12. F. Martins, E. Pereira, *Block matrices and stability theory*, Tatra Mt. Math. Publ., **38**, 147 – 162 (2007).
13. M. Newman, *The Smith normal form of a partitioned matrices*, J. Res. Natl. Bur. Stand., **78B**, № 1, 3 – 6 (1974).
14. V. Petrychkovych, N. Dzhaliuk, *Factorizations in the rings of the block matrices*, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., **85**, № 3, 23 – 33 (2017).
15. V. Shchedryk, *Arithmetic of matrices over rings*, Akademperiodyka, Kyiv (2021).

Одержано 30.07.21