DOI: 10.37863/umzh.v73i12.93

УДК 517.9

А. С. Омуралієв, Е. Абилаєва (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек)

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ БАГАТОВИМІРНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ ЗІ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИМ ВІЛЬНИМ ЧЛЕНОМ

The regularized asymptotics of a solution of the first boundary-value problem for a two-dimensional differential equation of parabolic type is constructed when the phase derivative vanishes at one point. It is shown that angular and multidimensional boundary layer functions appear in such problems in addition to other boundary layers.

Побудовано регуляризовану асимптотику розв'язку першої крайової задачі для двовимірного диференціального рівняння параболічного типу, коли похідна фази дорівнює нулю в одній точці. Показано, що в таких задачах поряд з іншими примежовими шарами виникають кутові та багатовимірні функції примежового шару.

1. Вступ. Сингулярно збурені звичайні диференціальні рівняння зі швидкоосцилюючим вільним членом вивчалися в роботі [1]. Там побудовано асимптотику розв'язків різних задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Параболічні рівняння, що містять швидкоосцилюючі вільні члени, методом [2] вивчені в [3, 5]. Побудовані асимптотики, крім функцій примежового шару, що мають швидкоосцилюючий характер зміни, містять і параболічні функції примежового шару. В цих роботах припускається, що вільний член є відмінним від нуля похідної фази.

Випадок, коли фаза вільного члена має стаціонарні точки, для скалярного диференціального рівняння параболічного типу вивчено в [4, 5]. Показано, що асимптотика містить додатково новий тип сингулярності вигляду

$$\int_0^t \exp\left(\frac{i[\theta(s)-\theta(0)]}{\varepsilon}\right) ds,$$

який при $\varepsilon \to 0$ має степеневий характер спадання.

В цій статті вивчається перша крайова задача для двовимірного параболічного рівняння, асимптотика якої, крім зазначених вище функцій примежового шару, містить кутові [6] і багатовимірні [7] функції примежового шару.

2. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу для двовимірного рівняння:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{2} \alpha_l(x_l)\partial_{x_l}^2 - b(x,t)u = f(x,t)\exp\left(\frac{i\theta(t)}{\varepsilon}\right), \quad (x,t)\in\Omega, \\ u|_{t=0}=0, \quad u|_{x_l=r-1=0}=0, \quad l=1,2, \quad r=1,2, \end{gathered} \tag{1}$$

де ε — малий параметр, $u=u(x,t,\varepsilon),\ x=(x_1,x_2),\ \Omega=(0,1)\times(0,1)\times(0,T]$.

Задачу (1) будемо розв'язувати при таких припущеннях:

1) $a_l(x_l)\in C^\infty[0,1],\ b(x,t),f(x,t)\in c^\infty(\bar\Omega)$;

2) $\theta(t)\in C^\infty[0,T],\ \theta'(0)=0$.

3. Регуляризація задачі. Дотримуючись [2, 3], введемо регуляризуючі змінні

$$\eta = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \tau = \frac{i[\theta(t) - \theta(0)]}{\varepsilon}, \quad \xi_{l,r} = \frac{\varphi_{lr}(x_r)}{\varepsilon},$$
$$\varsigma_{l,r} = \frac{\varphi_{lr}(x_r)}{\varepsilon^2}, \quad l, r = 1, 2, \tag{2}$$
$$\sigma = \int\limits_0^t \exp\left(\frac{i[\theta(s) - \theta(0)]}{\varepsilon}\right) ds \equiv \psi(t, \varepsilon), \quad \varphi_{l,r}(x_r) = (-1)^{l-1} \int\limits_{l-1}^{x_r} \frac{ds}{\sqrt{a_r(s)}}$$

і розширену функцію $\tilde{u}(M, \varepsilon)$, $M = (x, t, \xi, \varsigma, \eta, \tau, \sigma)$, $\xi = (\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,2})$, $\varsigma = (\varsigma_{1,1}, \varsigma_{2,1}, \varsigma_{1,2}, \varsigma_{2,2})$ таку, що

$$\tilde{u}(M, \varepsilon)|_{\mu=\nu(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x, t, \varepsilon), \quad \mu = (\xi, \varsigma, \eta, \tau, \sigma),$$
$$\nu = \left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^2}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{i(\theta(t) - \theta(0))}{\varepsilon}, \psi(t, \varepsilon)\right). \tag{3}$$

Використовуючи (2) і (3), знаходимо

$$\partial_t u = \left(\partial_t \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\eta \tilde{u} + \frac{i\theta'(t)}{\varepsilon} \partial_\tau \tilde{u} + \exp(\tau) \partial_\sigma \tilde{u}\right)_{\mu=\nu(x,t,\varepsilon)},$$
$$\partial^2_{x_r} u = \left(\partial^2_{x_r} \tilde{u} + \sum_{l=1}^{2} \left\{ \left(\frac{\varphi'_{l,r}(x_r)}{\varepsilon}\right)^2 \partial^2_{\xi_{l,r}} \tilde{u} + \left(\frac{\varphi'_{l,r}(x_r)}{\varepsilon^2}\right)^2 \partial^2_{\varsigma_{l,r}} \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon} L_{\xi_{l,r}} + \frac{1}{\varepsilon^2} L_{\varsigma_{l,r}} \right\}\right)_{\mu=\nu(x,t,\varepsilon)}, \tag{4}$$
$$L_{\xi_{l,r}} = 2\varphi'_{l,r}(x_r) \partial^2_{\xi_{l,r} x_r} + \varphi''_{l,r}(x_r) \partial_{\xi_{l,r}}.$$

Тоді на основі (1), (3), (4) сформулюємо розширену задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M, \varepsilon) = \partial_t \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2}[\partial_\eta \tilde{u} - \Delta_\varsigma \tilde{u}] + \frac{1}{\varepsilon} i\theta'(t) \partial_\tau \tilde{u} - \Delta_\xi \tilde{u} + \exp(\tau) \partial_\sigma \tilde{u} - b(x, t)\tilde{u} -$$
$$- L_\varsigma \tilde{u} - \varepsilon L_\xi \tilde{u} + \varepsilon^2 L_x \tilde{u} = f(x, t) \exp\left(i\tau + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right),$$
$$\tilde{u}|_{t=\tau=\sigma=\varsigma=0} = 0, \quad \tilde{u}|_{x_r=l-1, \xi_{l,r}=\varsigma_{l,r}=0} = 0, \tag{5}$$
$$\Delta_\xi \equiv \sum_{l,r=1}^{2} \partial^2_{\xi_{l,r}}, \quad L_\xi \equiv \sum_{l,r=1}^{2} a_r(x_r) L_{\xi_{l,r}}, \quad L_x \equiv \sum_{r=1}^{2} a_r(x_r) \partial^2_{x_r}.$$

Розширена задача (5) є регулярною щодо ε при $\varepsilon \to 0$. При цьому справджується тотожність

$$\left(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}\right)_{\mu=\nu(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u. \tag{6}$$

Розв'язок задачі (5) будемо визначати у вигляді ряду

$$\tilde{u}(M, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(M). \tag{7}$$

Для коефіцієнтів цього ряду, використовуючи (5), отримуємо ітераційні рівняння

$$T_0u_0 \equiv \partial_\eta u_0 - \Delta_\varsigma u_0 = 0, \quad T_0u_1 \equiv -i\theta'(t)\partial_\tau u_0,$$

$$T_0u_2 \equiv -i\theta'(t)\partial_\tau u_1 - T_1u_0 + L_\varsigma u_0 + f(x,t)\exp\left(\tau + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right), \tag{8}$$

$$T_0u_k \equiv -i\theta'(t)\partial_\tau u_{k-1} - T_1u_{k-2} + L_\varsigma u_{k-2} + L_\xi u_{k-3} + L_x u_{k-4},$$

де $T_1 = \partial_t - \Delta_\xi + \exp(\tau)\partial_\sigma - b(x,t)$.

4. Розв'язність ітераційних задач. Введемо клас функцій, в якому будемо розв'язувати ітераційні задачі:

$$U_1 = \left\{ u_k(M)\colon u_k(M) = v_k(x,t) + c_k^1(x,t)\exp(\tau) + \right.$$

$$+ \sum_{l,r=1}^{2}\left(w_k^{l,r}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right) + w^{l,r+2}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right) erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right),$$

$$\left. v_k(x,t),\ c_k^1(x,t),\ w_k^{l,r}(x,t),\ w^{l,r+2}(x,t) \in C^\infty(\bar\Omega)\right\},$$

$$U_2 = \left\{ u_k(M)\colon u_k(M) = \sum_{l,r=1}^{2}(Y_k^{l,r}(N_{l,r}) + Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2}))\exp(\tau)\right\},$$

$$N_{l,r} = (x,t,\varsigma_{l,r},\eta),$$

$$N_{l,r+2} = (x,t,\varsigma_{l1},\varsigma_{r2},\eta),$$

$$\left|Y_k^{l,r}(N_{l,r})\right| < c\exp\left(-\frac{\varsigma_{l,r}^2}{8\eta}\right), \quad \left|Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2})\right| < c\exp\left(-\frac{\varsigma_{l,1}^2 + \varsigma_{r,2}^2}{8\eta}\right),$$

$$U_3 = \left\{ u_k(M)\colon u_k(M) = \right.$$

$$\left. = \left[c_k^2(x,t) + \sum_{l,r=1}^{2}\left(z_k^{l,r}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right) + z^{l,r+2}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right) erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right]\sigma\right\},$$

$$c_k^2(x,t), \quad z_k^{l,r}(x,t), \quad z^{l,r+2}(x,t) \in C^\infty(\bar\Omega),$$

і побудуємо новий клас функцій: $U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Довільний елемент $u_k(M) \in U$ запишемо у вигляді

$$u_k(M) = v_k(x,t) + \sum_{l,r=1}^{2}\left(w_k^{l,r}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right) + w^{l,r+2}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right) erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right) +$$

$$+\exp(\tau)\left[c_k^1(x,t) + \sum_{l,r=1}^{2}(Y_k^{l,r}(N_{l,r}) + Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2}))\right] +$$

$$+\left[c_k^2(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left(z_k^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+z^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right]\sigma. \tag{9}$$

Теорема 1. *Рівняння*

$$T_0u_k=F_k(M) \tag{10}$$

при додаткових умовах:

1) $u|_{t=\tau=\varsigma=0}=u|_{x_l=l-1,\xi_{l,r}=0}=0,$
2) $T_1u_{k-2}+i\theta'(t)\partial_\tau u_{k-1}+F_k(M)\in U_2,$
3) $L_\xi u_k=L_\varsigma u_k=0$

має в U єдиний розв'язок.

Доведення. Підпорядковуючи функцію $u_k(M)\in U$ крайовій умові 1, визначаємо

$$\begin{gathered}
v_k(x,0)=-c_k^1(x,0),\\
Y_k^{l,r}(N_{l,r})|_{\eta=t=0}=0,\\
Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2})|_{t=\eta=0}=0,\\
w_k^r(x,t)|_{x_r=l-1}=-v_k(x,t)|_{x_r=l-1},\\
w_k^{l,r+2}(x,t)|_{x_1=l-1}=-w_k^{r,2}(x,t)|_{x_1=l-1},\\
w_k^{l,r+2}(x,t)|_{x_2=r-1}=-w_k^{l,1}(x,t)|_{x_2=r-1},\\
z_k^{l,r}(x,t)|_{x_r=l-1}=-c_r^2(x,t)|_{x_r=l-1},\\
z_k^{l,r+2}(x,t)|_{x_1=l-1}=-z_k^{r,2}(x,t)|_{x_1=l-1},\\
z_k^{l,r+2}(x,t)|_{x_2=r-1}=-z_k^{l,1}(x,t)|_{x_2=r-1},\\
Y_k^{l,r}(N)|_{\varsigma_{l,r}=0}=d_k^{l,r}(x,t),\\
d_k^{l,r}(x,t)|_{x_r=l-1}=-c_k^1(x,t)|_{x_r=l-1},\\
Y_k^{l,r+2}|_{\varsigma_{l,1}=0}=-Y^{r,2}(\varsigma_{r,2}),\\
Y_k^{l,r+2}|_{\varsigma_{r,2}=0}=-Y^{l,r}(\varsigma_{l,1}),\quad l,r=1,2.
\end{gathered} \tag{11}$$

Тут ми знехтували доданками, що містять $erfc\left(\dfrac{\varphi_{l,1}(1)}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)$, $erfc\left(\dfrac{\varphi_{r,2}(0)}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)$. Розглянемо умову 2 теореми 1. Підставляючи в цю умову функцію $u_k(M)$, а також вільний член

$$F_k(M)=f_{k,v}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left(f_{k,w}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+f_{k,w}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right)+$$

$$+\exp(\tau)\left[f_c^1(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}(f_{k,Y}^{l,r}(N_{l,r})+f_{k,Y}^{l,r+2}(N_{l,r+2}))\right]+$$

$$+\left[f_{k,c}^{2}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left(f_{k,z}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+f_{k,z}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right]\sigma,$$

маємо

$$H(M)\equiv T_1u_{k-2}+i\theta'(t)\partial_\tau u_{k-1}+F_k(M)=\partial_t v_{k-2}(x,t)+$$
$$+\sum_{l,r=1}^{2}\left\{\partial_t w_k^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+\partial_t w^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right\}+$$
$$+\exp(\tau)\left[\partial_t c_{k-2}^{1}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}(\partial_t Y_{k-2}^{l,r}+\partial_t Y_{k-2}^{l,r+2})\right]+\sigma\left[\partial_t c_{k-2}^{2}(x,t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l,r=1}^{2}\left\{\partial_t z_{k-2}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+\partial_t z^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]+$$
$$+\exp(\tau)\left[c_{k-2}^{2}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left[z_{k-2}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+z_{k-2}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right]-$$
$$-\,b\,(x,t)\left\{v_{k-2}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left[w_{k-2}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+w_{k-2}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\right.$$
$$+\exp(\tau)\left[c_{k-2}^{1}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}(Y_{k-2}^{l,r}+Y_{k-2}^{l,r+2})\right]+\left[c_{k-2}^{2}(x,t)+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{l,r=1}^{2}\left\{z_{k-2}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+z_{k-2}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]\sigma\right\}+$$
$$+\,i\,\theta'(t)\left\{c_{k-1}^{1}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}(Y_{k-1}^{l,r}+Y_{k-1}^{l,r+2})\right\}\exp(\tau)+f_{k,v}(x,t)+$$
$$+\sum_{l,r=1}^{2}\left[f_{k,w}^{l,r}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+f_{k,w}^{l,r+2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$$
$$+\exp(\tau)\left\{f_{k,c}^{1}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left[f_{k,Y}^{l,r}(N_{l,r})+f_{k,Y}^{l,r+2}(N_{l,r+2})\right]\right\}+$$
$$+\,\sigma\left\{f_{k,c}^{1}(x,t)+\sum_{l,r=1}^{2}\left[f_{k,z}^{l,r}(N_{l,r})\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)+f_{k,z}^{l,r+2}(N_{l,r+2})\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}. \tag{12}$$

Задовольняючи умову 2 і зважаючи на те, що функції $erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right)$, $erfc\left(\frac{\xi_{l,r+2}}{2\sqrt{t}}\right)$ є розв'язками рівняння $\partial_t u - \Delta_\xi u = 0$, покладаємо

$$\begin{gathered}
i\theta'(t)c^1_{k-1}(x,t) - b(x,t)c^1_{k-2}(x,t) + c^2_{k-2}(x,t) + f^1_{k,c}(x,t) + \partial_t c^1_{k-2}(x,t) = 0,\\
\partial_t v_{k-2}(x,t) - b(x,t)v_{k-2}(x,t) + f_{k,v}(x,t) = 0,\\
\partial_t c^2_{k-2}(x,t) - b(x,t)c^2_{k-2}(x,t) + f^2_{k,c}(x,t) = 0,\\
\partial_t w^{l,r}_{k-2}(x,t) - b(x,t)w^{l,r}_{k-2}(x,t) + f^{l,r}_{k,w}(x,t) = 0,\\
\partial_t w^{l,r+2}_{k-2}(x,t) - b(x,t)w^{l,r+2}_{k-2}(x,t) + f^{l,r+2}_{k,w}(x,t) = 0,\\
\partial_t z^{l,r}_{k-2}(x,t) - b(x,t)z^{l,r}_{k-2}(x,t) + f^{l,r}_{k,z}(x,t) = 0,\\
\partial_t z^{l,r+2}_{k-2}(x,t) - b(x,t)z^{l,r+2}_{k-2}(x,t) + f^{l,r+2}_{k,z}(x,t) = 0,\\
\partial_t Y^{l,r}_{k-2} - b(x,t)Y^{l,r}_{k-2} + f^{l,r}_{k,Y}(x,t) = 0,\\
\partial_t Y^{l,r+2}_{k-2} - b(x,t)Y^{l,r+2}_{k-2} + f^{l,r+2}_{k,Y}(x,t) = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Тоді

$$H(M) \equiv T_1 u_{k-2} + i\theta'(t)\partial_\tau u_{k-1} + F_k(M) =$$

$$= \exp(\tau)\sum_{l,r=1}^{2}\left\{z^{l,r}_{k-2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}\right) + z^{l,r+2}_{k-2}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_{l,1}}{2\sqrt{t}}\right)\,erfc\left(\frac{\xi_{r,2}}{2\sqrt{t}}\right)\right\} +$$

$$+ i\theta'(t)\sum_{l,r=1}^{2}(Y^{l,r}_{k-1} + Y^{l,r+2}_{k-1})\exp(\tau).$$

Переходячи тут від $\frac{\xi_{l,r}}{2\sqrt{t}}$ до змінних $\frac{\varsigma_{l,r}}{2\sqrt{\eta}}$, $l,r = 1,2$, забезпечуємо належність $H(M)$ до U_2. Перше рівняння з (13) розв'язне, якщо

$$c^2_{k-2}(x,t)|_{t=0} = -\left(f^1_{k,c}(x,t) + \partial_t c^1_{k-2}(x,t) - b(x,t)c^1_{k-2}(x,t)\right)_{t=0}.$$

Це співвідношення використовується як початкова умова для рівняння щодо $c^2_{k-2}(x,t)$ із (13). Підставимо функцію $u_k(M) \in U$ з (9) у рівняння (10). Вона буде розв'язком, якщо функції $Y^{l,r}_k(N_{l,r})$, $Y^{l,r+2}_k(N_{l,r+2})$є розв'язками рівнянь

$$T_0 Y^{l,r}_k = T_2 Y^{l,r}_k(N_{l,r}) = \partial_\varsigma Y^{l,r}_k - \partial_{\xi_{l,r}} Y^{l,r} = f^{l,r}_{k,Y}(N_{l,r}),$$

$$T_0 Y^{l,r+2}_k = T_3 Y^{l,r+2}_k(N_{l,r+2}) = \partial_\varsigma Y^{l,r+2}_k - \Delta_\varsigma \partial_{\varsigma_{l,r}} Y^{l,r+2} = f^{l,r+2}_{k,Y}(N_{l,r+2}), \quad l,r = 1,2.$$

Розв'язки цих рівнянь при крайових умовах з (11) мають вигляд [9, с. 62]

$$Y^{l,r}_k(N_{l,r}) = d^{l,r}_k(x,t)\,erfc\left(\frac{\varsigma_{l,r}}{2\sqrt{\eta}}\right) + I_1(N_{l,r}),$$

$$Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2}) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} f_{k,Y}^{l,r+2} G(N_{l,r+2}, z, \eta - \tau) dz d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{\varsigma}\int\limits_0^{\infty} (-Y^{l,1}) \left[\partial_\varsigma G(N_{l,r+2}, z, \eta - \tau)\right]_{\varsigma=0} dz d\tau, \tag{14}$$

$$G(N_{l,r+2}, \varsigma, \sigma, \eta) = \frac{1}{4\pi\eta}\left\{\exp\left(\frac{-(\varsigma_{l,1} - \sigma)^2}{4\eta}\right) + \exp\left(\frac{-(\varsigma_{l,1} + \sigma)^2}{4\eta}\right)\right\} \times$$

$$\times \left\{\exp\left(\frac{-(\varsigma_{r,2} - \sigma)^2}{4\eta}\right) + \exp\left(\frac{-(\varsigma_{r,2} + \sigma)^2}{4\eta}\right)\right\}.$$

На підставі теорем 2 і 3 з роботи [7] для цих функцій маємо оцінки

$$\left|Y_k^{l,r}(N_{l,r})\right| < c \exp\left(-\frac{\varsigma_{l,r}^2}{8\eta}\right),$$

$$\left|Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2})\right| < c \exp\left(-\frac{\varsigma_{l,1}^2 + \varsigma_{r,2}^2}{8\eta}\right). \tag{15}$$

Функції $Y_k^{l,r}$ і $Y_k^{l,r+2}$ містять довільні функції $d_k^{l,r}(x,t)$, які задовольняють при $x_r = l - 1$ умови з (11). Оскільки функція $d_k^{l,r}(x,t)$ множиться на функцію $erfc\left(\frac{\varsigma_{l,r}}{2\sqrt{\eta}}\right)$, яка при $t = \eta = 0$ дорівнює нулю, то за значення $d_k^{l,r}(x,t)$ при $t = 0$ візьмемо довільну функцію $\tilde{d}_k^{l,r}(x)$:

$$d_k^{l,r}(x,t)|_{t=0} = \tilde{d}_k^{l,r}(x). \tag{16}$$

Підставимо значення $Y_k^{l,r}(N_{l,r})$ і $Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2})$ в рівняння з (13). Тоді отримаємо рівняння щодо $d_k^{l,r}(x,t)$, з якого при початковій умові (16) визначимо $d_k^{l,r}(x,t)$, що залежить від $\tilde{d}_k^{l,r}(x)$. Це дозволить задовольнити умову 3. Підставляючи функцію (9) в умову $L_\varsigma u_k = 0$, отримуємо диференціальне рівняння щодо $\tilde{d}_k^{l,r}(x)$, яке розв'язуємо при початковій умові

$$d_k^{l,1}(x,t)|_{x_r=l-1} = -c_k^1(x,t)|_{x_r=l-1}. \tag{17}$$

Цей процес буде детально описано при побудові розв'язків ітераційних задач у наступному пункті. У такий спосіб однозначно визначається функція $Y_k^{l,r}(N_{l,r})$, а отже і $Y_k^{l,r+2}(N_{l,r+2})$. Із таких же міркувань, забезпечуючи умову $L_\xi u_k = 0$, однозначно визначають функції $w_k^{l,r}(x,t)$, $z_k^{l,r}(x,t)$. Решта рівнянь (13) при початкових умовах з (11) мають однозначні розв'язки.

Теорему 1 доведено.

5. Розв'язання ітераційних задач. Використовуючи теорему 1, послідовно визначаємо $u_k(M)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Рівняння $T_0 u_0(M) = 0$ має розв'язок в U, що зображується у вигляді (9) при $k = 0$, якщо функції $Y_0^{l,r}(N_{l,r})$ і $Y_0^{l,r+2}(N_{l,r+2})$ — розв'язки рівнянь $\partial_\eta Y_0^{l,r} = \partial^2_{\varsigma_{l,r}} Y_0^{l,r}$, $\partial_\eta Y_0^{l,r+2} = \Delta_\varsigma Y_0^{l,r+2}$, які при крайових умовах з (11) мають розв'язки вигляду

$$
\begin{gathered}
Y_0^{l,r} = d_0^{l,r}(x,t)\, erfc\left(\frac{\varsigma_{l,r}}{2\sqrt{\eta}}\right), \\
Y_0^{l,r+2} = \int_0^{\eta}\int_0^{\infty}(-Y^{l,1})\left[\partial_\varsigma G(N_{l,r+2},\sigma,\eta-\tau)\right]_{\varsigma=0} d\sigma d\tau - \\
-\int_0^{\eta}\int_0^{\infty}(Y^{r,2})\left[\partial_\sigma G(N_{l,r+2},\sigma,\eta-\tau)\right]_{\sigma=0} d\sigma d\tau.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Вони на підставі теорем 2 і 3 з [7] належать U_2. Підставимо функцію $u_0(M)$ у вільний член рівняння (8) при $k=1$:

$$
F_1(M) = -i\theta'(t)\partial_\tau u_0 = -i\theta'(t)\exp(\tau)\left[c_0^1(x,t) + \sum_{l,r=1}^{2}(Y_0^{l,r} + Y_0^{l,r+2})\right].
$$

Задовольняючи умову $F_1(M) \in U_2$, покладаємо $c_0^1(x,t) = 0$. Рівняння з таким вільним членом має розв'язок в U, якщо функції $Y_1^{l,r}(N_{l,r})$ і $Y_1^{l,r+2}(N_{l,r+2})$ є розв'язками рівнянь

$$
\begin{gathered}
\partial_\varsigma Y_1^{l,r} = \partial^2_{\varsigma_{l,r}} Y_1^{l,r} - i\theta'(t)Y_0^{l,r}(N_{l,r}), \\
\partial_\varsigma Y_1^{l,r+2} = \Delta_\varsigma Y_1^{l,r+2} - i\theta'(t)Y_0^{l,r+2}(N_{l,r+2}).
\end{gathered}
$$

Розв'язуючи ці рівняння при крайових умовах (11), знаходимо розв'язки у вигляді (14), для яких справджуються оцінки (15). Згідно з обчисленнями (12) і умовою 2 теореми 1, на наступному кроці ітерації $(k=2)$ отримуємо однорідні рівняння (13), а замість першого одержуємо таке:

$$
i\theta'(t)c_1^1(x,t) = -c_0^2(x,t) + f(x,t)\exp\left(\frac{-\theta(0)}{\varepsilon}\right).
$$

Це рівняння розв'язне, якщо

$$
c_0^2(x,t)|_{t=0} = f(x,0)\exp\left(\frac{-\theta(0)}{\varepsilon}\right).
$$

Отримане співвідношення буде використано в початковій умові рівняння щодо $c_0^2(x,t)$. Рівняння щодо $w_0^{l,r}(x,t),\ w_0^{l,r+2}(x,t)$ розв'язуємо при довільних початкових умовах

$$
\begin{gathered}
w_0^{l,r}(x,t)|_{t=0} = \tilde{w}_0^{l,r}(x), \\
w_0^{l,r+2}(x,t)|_{t=0} = \tilde{w}_0^{l,r+2}(x).
\end{gathered}
$$

При цьому отримуємо

$$
\begin{gathered}
w_0^{l,r+2}(x,t) = \tilde{w}_0^{l,r+2}(x)p_0(x,t), \\
w_0^{l,r}(x,t) = \tilde{w}_0^{l,r}(x)p_0(x,t), \\
p_0(x,t) = \exp\left(\int_0^t b(x,s)ds\right).
\end{gathered}
$$

Таке припущення випливає з того, що функції $w_0^{l,r}(x,t)$ і $w_0^{l,r+2}(x,t)$ множаться на функції, які дорівнюють нулю при $t=0.$ Це справедливо і щодо функцій $z_0^{l,r}(x,t)$ і $z_0^{l,r+2}(x,t),$ тобто для них маємо співвідношення

$$z_0^{l,r}(x,t)|_{t=0} = \tilde{z}_0^{l,r}(x),$$
$$z_0^{l,r+2}(x,t)|_{t=0} = \tilde{z}_0^{l,r+2}(x).$$

Використовуючи їх, визначаємо

$$z_0^{l,r+2}(x,t) = \tilde{z}_0^{l,r+2}(x)p_0(x,t),$$
$$z_0^{l,r}(x,t) = \tilde{z}_0^{l,r}(x)p_0(x,t).$$

Підставляючи $u_0(M)$ в умову 3 теореми 1, з урахуванням знайдених $w_0^{l,r}(x,t),$ $w_0^{l,r+2}(x,t),$ $z_0^{l,r}(x,t)$ і $z_0^{l,r+2}(x,t)$ отримуємо рівняння

$$T_\varsigma^{l,r} w_0^{l,r}(x,t) \equiv 2\varphi_{l,r}'(x_r)(\tilde{w}_0^{l,r}(x)p_0(x,t))_{x_r}' + \varphi_{l,r}''(x_r)\tilde{w}_0^{l,r}(x)p_0(x,t) = 0,$$
$$T_\varsigma^{l,r} w_0^{l,r+2} = 0, \quad T_\varsigma^{l,r} z_0^{l,r}(x,t) = 0, \quad T_\varsigma^{l,r} z_0^{l,r+2}(x,t) = 0.$$

Із (11) визначимо початкові умови у вигляді таких співвідношень:

$$w_0^{l,r}(x,t)|_{x_r=l-1} = \tilde{w}_0^{l,r}(x)p_0(x,t)|_{x_r=l-1} = -v_0(x,t)|_{x_r=l-1},$$
$$z_0^{l,r}(x,t)|_{x_r=l-1} = \tilde{z}_0^{l,r}(x)p_0(x,t)|_{x_r=l-1} = -c_k^2(x,t)|_{x_r=l-1},$$
$$w_0^{l,r+2}(x,t)|_{x_1=l-1} = \tilde{z}_0^{l,r+2}(x)p_0(x,t)|_{x_1=l-1} = -\tilde{w}_0^{l,2}(x)p_0(x,t)|_{x_1=l-1},$$
$$w_0^{l,r+2}(x,t)|_{x_2=r-1} = \tilde{w}_0^{l,r+2}(x)p_0(x,t)|_{x_2=r-1} = -\tilde{w}_0^{l,1}(x)p_0(x,t)|_{x_2=r-1},$$
$$z_0^{l,r+2}(x,t)|_{x_1=l-1} = \tilde{z}_0^{l,r+2}(x)p_0(x,t)|_{x_1=l-1} = -\tilde{z}_0^{l,2}(x)p_0(x,t)|_{x_1=l-1}, \quad l,r = 1,2.$$

Вибором $\tilde{w}_0^{l,r},$ $\tilde{w}_0^{l,r+2}$ ми забезпечимо виконання умови $L_\xi u_0(M) = 0.$ Підставляючи перше співвідношення з (18) у друге, знаходимо

$$Y_0^{l,r+1}(N_{l,r}) = d_0^{l,1}(x,t)I_1(N_{l,r}) + d_0^{r,2}(x,t)I_1(N_{l,r}),$$

де $I_0(N_{l,r})$ і $I_1(N_{l,r})$ — відомі функції. Знайдені функції $Y_0^{l,r}(N_{l,r})$ і $Y_0^{l,r+2}(N_{l,r+2})$ підставимо в останнє рівняння з (13). Тоді отримаємо таке рівняння щодо $d_0^{l,r}(x,t),$ $d_0^{l,r+2}(x,t)$:

$$\partial_t d_0^{l,r}(x,t) - b(x,t)d_0^{l,r}(x,t) = 0, \quad l = 1,2, \quad r = 1,2,3,4.$$

Розв'язуємо ці рівняння при довільних початкових умовах (16). Тоді, підставляючи в $L_\varsigma u_0(M) =$ $= 0$ $\tilde{d}_0^{l,r}(x),$ отримуємо рівняння, яке розв'язуємо при початковій умові, що визначається з (17). Далі, повторюючи описаний вище процес, знаходимо всі коефіцієнти частинної суми:

$$u_{\varepsilon,n}(M) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_k(M).$$

Для залишкового члена $R_{\varepsilon,n}(M) = u(M,\varepsilon) - u_{\varepsilon,n}(M)$ сформулюємо задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon R_{\varepsilon,n}(M) = \varepsilon^{n+1} g_{\varepsilon,n}(M), \quad R_{\varepsilon,n}|_{t=\tau=\varsigma=0} = R_{\varepsilon,n}|_{\varsigma_{l,r}=\xi_{l,r}=0} = 0,$$

де $g(M) = L_\varsigma u_{k-1} - T_1 u_{k-1} - i\theta'(t)\partial_\tau u_n + b(x,t)u_{n-1} + L_\xi u_{n-2} + L_x u_{n-3}$.

Проводячи звуження за допомогою регуляризуючих функцій, з урахуванням (6) отримуємо задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,n}(M) = \varepsilon^{n+1} g_n(x,t,\varepsilon), \quad R_{\varepsilon,n}|_{t=0} = 0, \; R_{\varepsilon,n}|_{x_r=l-1} = 0, \quad l,r = 1,2.$$

Згідно з нашими припущеннями і побудовою $u_n(M)$ функція $g(x,t,\varepsilon) = g_n(M)_{\mu=\nu(x,t,\varepsilon)}$ рівномірно обмежена по ε і неперервна по x і $t \in \bar{\Omega}$.

Застосовуючи принцип максимуму [8], можна встановити оцінку

$$|R_{\varepsilon,n}(x,t)| < c\varepsilon^{n+1}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Теорема 2. *Нехай виконано умови* 1, 2. *Тоді для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *справджується оцінка* $|R_{\varepsilon,n}(x,t)| < c\varepsilon^{n+1}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$.

Література

1. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николаенко, *Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений*, Киев (1966).
2. С. А. Ломов, И. С. Ломов, *Основы математической теории пограничного слоя*, Изд-во Моск. гос. ун-та, Москва (2011).
3. А. С. Омуралиев, *Асимптотика решения сингулярно возмущенных параболических задач*, Lambert Acad. Publ. (2017).
4. A. Omuraliev, E. Abylaeva, *Asymptotics of the solution of parabolic problems with multipoint stationary phase*, AIP Conf. Proc. **1880**, 1 – 6 (2017); DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.5000623.
5. А. Омуралиев, Э. Абылаева, *Асимптотика решения параболической задачи со стационарной фазой*, Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 47, 120 – 127 (2014).
6. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. шк., Москва (1990).
7. А. С. Омуралиев, М. Имаш кызы, *Сингулярно возмущенная параболическая задача с многомерными пограничными слоями*, Дифференц. уравнения, **13**, № 12, 1664 – 1678 (2017).
8. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва (1967).
9. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, Физматлит, Москва (2001).

Одержано 22.05.18