DOI: 10.37863/umzh.v73i1.6200

УДК 517.54

О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ДОБУТКІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

We consider the known problem of geometric function theory on extremal partition of the complex plane. For this problem, we obtain estimates for the maximum value of the product of inner radii of n disjoint domains with respect to n arbitrary points in the complex plane. The exact solutions to this problem are currently known only for $n = 2, 3, 4$. In this paper, we found estimates that can be applied to various extremal geometric problems of the theory of functions.

Розглядається відома проблема геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини, і в даній проблемі отримано оцінки максимуму добутку внутрішніх радіусів n довільних взаємно неперетинних областей відносно n довільних точок комплексної площини, одна з яких може бути нескінченно віддаленою. Точні розв'язки цієї проблеми на даний момент відомі тільки для випадків $n = 2, 3, 4$. В даній роботі знайдено оцінки, які можуть бути застосовані в різних екстремальних задачах геометричної теорії функцій.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина і $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B з полюсом у скінченній точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B \backslash a$, яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B, і для якої в деякому околі точки a правильним є асимптотичний розклад

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \gamma + o(1), \quad z \to a;$$

якщо ж $a = \infty$, то

$$g_B(z, a) = \ln|z| + \gamma + o(1), \quad z \to a.$$

Внутрішнім радіусом $r(B, a)$ області B відносно точки a називається величина e^{γ} (див., наприклад, [1, с. 13, 14]).

У даній роботі вивчається така проблема.

Проблема 1.1. *Знайти максимум виразу* $\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, *де* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини, області* B_k, $k = \overline{1, n}$, *такі, що* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *причому* $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ *для* $1 \leq i, j \leq n$ *та* $i \neq j$.

Іншими словами, потрібно знайти максимум добутку внутрішніх радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Поява в теорії однолистих функцій екстремальних задач про неперетинні області пов'язана з роботою М. О. Лаврентьєва [2]. В цій роботі вперше поставлено і розв'язано задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Згідно з результатом М. О. Лаврентьєва, якщо a_1 і a_2 — скінченні точки, то для будь-якої пари неперетинних однозв'язних областей D_1 і D_2 такої, що $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$, виконується нерівність

$$r(D_1, a_1) r(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2,$$

в якій знак рівності має місце для півплощин D_k і точок a_k, симетричних відносно їхньої спільної межі.

Цей результат викликав значний інтерес у спеціалістів із геометричної теорії функцій і узагальнювався в багатьох напрямках (див., наприклад, [1 – 34]).

В 1947 р. Г. М. Голузін узагальнив задачу М. О. Лаврентьєва на випадок скінченного числа n $(n \geq 3)$ взаємно неперетинних однозв'язних областей B_k і точок $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ $\big(\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини$\big)$, а при $n = 3$ отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей [3, с. 165]

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_2 - a_1||a_3 - a_1||a_3 - a_2|,$$

в якій знак рівності має місце, з точністю до конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини, лише для областей, які є рівними кутами, і точок, які лежать на бісектрисах цих кутів на однакових відстанях від їхньої спільної вершини.

Зазначимо, що більшість задач, які розглядалися до початку 70-х років 20-го століття, належать до класу задач із фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Фундаментальну роль квадратичних диференціалів як зручного засобу дослідження екстремальних задач геометричної теорії функцій уперше зазначив Тейхмюллер (див., наприклад, [5]), який сформулював принцип, згідно з яким розв'язок кожної такої задачі пов'язаний із деяким квадратичним диференціалом.

Випадок $n > 3$ виявився значно складнішим і істотно відрізняється від випадку $n \leq 3$, оскільки дробово-лінійним відображенням будь-які три наперед задані точки можна перевести в довільні три точки комплексної площини, наприклад у вершини правильного трикутника, що значно спрощує дослідження. Для випадку $n = 4$ Г. В. Кузьміна в 1980 р. в роботі [4] отримала точну нерівність

$$\prod_{k=1}^{4} r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Знак рівності в ній має місце лише у випадку, коли з точністю до конформного автоморфізму $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i\big(2 - \sqrt{3}\big)$, а межа множини $\bigcup\limits_{k=1}^{4} D_k$ складається із відрізків $\big[\sqrt{3} - 2, 2 - \sqrt{3}\big]$, променів $\{z \mid z = it,\ t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z \mid z = it,\ t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги ρ, яка проходить через точки $-1,\ i,\ 2 - \sqrt{3}$ і знаходиться в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з ρ перетвореннями $w \to -w$, $w \to \overline{w}$, $w \to -\overline{w}$.

Для $n \geq 5$ повного розв'язку даної проблеми на даний час не отримано.

Сформульовані вище задачі зводяться до оцінки виразу

$$T_n := \frac{\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)}{\left\{ \prod'_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l| \right\}^{\frac{2}{n-1}}}$$

(штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю), який є інваріантним відносно дробово-лінійних відображень площини. Таким чином, виходячи з результатів робіт [2 – 4], отримуємо оцінки

$$T_2 \leq 1, \qquad T_3 \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \approx 0{,}45618, \qquad T_4 \leq \frac{9}{4^{8/3}} \approx 0{,}22323.$$

Для зручності величину

$$d_n\left(\{a_p\}_{p=1}^n\right) := \left(\prod_{1\leq k<l\leq n} |a_k - a_l|\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

будемо називати n-м діаметром системи точок $\{a_p\}_{p=1}^n$, $a_p \in \mathbb{C}$.

В 1968 р. П. М. Тамразов у роботі [12] зауважив, що значний інтерес викликають задачі, де точки a_k не є фіксованими, а мають певну „свободу”. Такі задачі отримали назву задач із вільними полюсами. Відповідно до цієї ідеї, Г. П. Бахтіна (див., наприклад, [13 – 16]) сформулювала ряд нових екстремальних задач і отримала їхні розв'язки для деяких часткових випадків. Внаслідок цього тематика отримала новий поштовх для свого розвитку.

Зауважимо, що в той же час В. М. Дубінін розробив метод відокремлюючого перетворення (див. [1, 20 – 23]), за допомогою якого було отримано значний прогрес у розв'язанні екстремальних задач геометричної теорії функцій. На основі цього методу було розроблено метод керуючих функціоналів, за допомогою якого вдалося суттєво послабити вимоги щодо систем точок, що розглядаються (див., наприклад, [32]).

В подальшому екстремальні задачі з вільними полюсами дуже активно вивчалися багатьма спеціалістами і були узагальнені для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Однак, не зважаючи на значну кількість робіт з даної тематики, багато екстремальних задач на даний момент не розв'язано. Тому актуальною є задача отримання якщо не точних розв'язків, то достатньо ефективних оцінок відповідних функціоналів. Саме цьому і присвячено дану роботу.

Зазначимо, що оцінки добутку внутрішніх радіусів, отримані в задачах, де полюси відповідних квадратичних диференціалів зафіксовано, можуть бути застосовані і до задач з вільними полюсами. Щоб проілюструвати їхнє використання, розглянемо екстремальну задачу, яку було сформульовано в роботі [1].

Проблема 1.2. *Знайти максимум функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1.1}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ *для* $0 \leq i, j \leq n$ *та* $i \neq j$.

Дана проблема належить до так званих задач із вільними полюсами, оскільки точки a_k для $k = \overline{1, n}$ не є фіксованими, а лежать на одиничному колі. На даний час цю проблему розв'язано лише для деяких окремих випадків, зокрема, в роботах [32 – 37].

Для кожної конфігурації областей $B_k,\ k = \overline{1,n}$, і точок a_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, а також для довільного набору індексів $k_1, k_2, \ldots, k_p,\ k_i \leq n,\ i = \overline{1,p}$, введемо вектор із дійсними координатами

$$\vec{r}_{k_1,k_2,\ldots,k_p} := \big(r(B_{k_1}, a_{k_1}), r(B_{k_2}, a_{k_2}), \ldots, r(B_{k_p}, a_{k_p})\big).$$

Далі під вектором $\vec{r}_{k_1,k_2,\ldots,k_p}$ будемо розуміти саме вектор з координатами $r(B_{k_i}, a_{k_i})$, якщо не зазначено інше.

Для довільного вектора $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ норма цього вектора визначається за формулою $\|\vec{r}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} r_k^2}$.

2. Основні результати. Справджуються такі теореми.

Теорема 2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір відповідно фіксованих точок і областей комплексної площини таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тоді виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.1}$$

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, в нерівності (2.1) всі множники, які містять дану точку, перетворяться на одиницю. Зокрема, правильною є така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $B_k,\ a_k,\ k = \overline{1,n}$, — деякий набір відповідно областей і фіксованих точок розширеної комплексної площини таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, і $a_n = \infty$. Тоді виконується нерівність*

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.2}$$

Нерівність (2.1) можна застосувати і для оцінки функціонала (1.1). Зауважимо також, що в роботі [37] повністю розв'язано проблему 1.2 для випадку $n = 2$, тому достатньо розглядати випадок $n \geq 3$. Правильною є така теорема.

Теорема 2.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ і $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} n^{-\frac{\gamma}{2}} (n-1)^{-\frac{n-\gamma}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}} \tag{2.3}$$

у випадку $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, або нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} n^{-\frac{\gamma}{2}} (n-1)^{-\frac{n-\gamma}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}, \tag{2.4}$$

якщо $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що проблема 1.2 має розв'язок лише для випадку $0 < \gamma \leq n$, оскільки для $\gamma > n$ функціонал (1.1) необмежений, однак для деяких підкласів множини допустимих конфігурацій областей функціонал (1.1) обмежений для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Правильною є така теорема.

Теорема 2.4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$ і $\varepsilon > 0$. Тоді для довільного набору точок a_k таких, що $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, причому $\|\vec{r}_{1,2,\ldots,n}\| \geq \varepsilon$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{2} r(B_k,a_k) \leq 4\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}$$

у випадку $n = 2$, нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq 2^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

у випадку $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, або нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq 2^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}},$$

якщо $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

***Доведення теореми* 2.1.** Скористаємось ідеєю, запропонованою в роботі [30], а також при доведенні теореми 1 із роботи [37]. Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ (див., наприклад, [3, с. 286]). Зафіксуємо деяке натуральне $1 \leq k \leq n$, і нехай $B^{(k)}$ — образ множини B при відображенні $w = \dfrac{1}{z-a_k}$. З конформної інваріантності функції Гріна випливає співвідношення

$$r(B_k,a_k) = r\big(B_k^{(k)},\infty\big). \tag{2.5}$$

Згідно з теоремою 3 [3, с. 304] (див. також [1, с. 15]), внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, дорівнює величині, оберненій до трансфінітного діаметра доповнення до даної області, тобто справджується рівність

$$r(B_k^{(k)},\infty) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}\right)}. \tag{2.6}$$

Далі, згідно з відомою теоремою Пойа [38, с. 28], виконується нерівність

$$d(E) \geq \sqrt{\frac{\mu E}{\pi}},$$

де μE позначає міру Лебега компактної множини E. Звідси отримуємо

$$\frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}\right)}}. \tag{2.7}$$

Враховуючи монотонність та адитивність міри Лебега, маємо

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}\right)}} \leq \left(\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\overline{B_p^{(k)}}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\mu\overline{B_p^{(k)}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Враховуючи співвідношення (2.5) – (2.8), одержуємо

$$r(B_k,a_k) \leq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\mu\overline{B_p^{(k)}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далі, за теоремою про мінімізацію площі [3, с. 34] отримуємо нерівність $\mu B \geq \pi r^2\,(B,a)$, а тому

$$r(B_k,a_k) \leq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\mu\overline{B_p^{(k)}}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r^2\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Зауваження. Нерівність (2.9) можна записати у вигляді

$$r(B_k,a_k) \leq \|\vec{r}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}\|^{-1},$$

де координатами вектора $\vec{r}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}$ є величини $r\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big)$.

Далі, за нерівністю Коші маємо

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r^2\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big) \geq (n-1)\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big)\right)^{\frac{2}{n-1}},$$

звідки одержуємо

$$\left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r^2\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big)\right)^{-\frac{1}{2}} \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big)\right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.10}$$

Покажемо, що

$$r\big(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\big) = \frac{r(B_p,a_p)}{|a_p-a_k|^2}, \quad p\neq k. \tag{2.11}$$

За означенням функції Гріна для $z\to a_p$ має місце асимптотичний розклад

$$G_{B_p}(z,a_p) = \ln\frac{1}{|z-a_p|} + \ln r(B_p,a_p) + o(1).$$

З іншого боку, використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \dfrac{1}{z-a_k}$, отримуємо

$$G_{B_p}(z,a_p) = G_{B_p^{(k)}}\big(w, a_p^{(k)}\big) = \ln\frac{1}{|w-a_p^{(k)}|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{\left|\dfrac{1}{z-a_k} - \dfrac{1}{a_p-a_k}\right|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{|z-a_k||a_p-a_k|}{|z-a_p|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{|z-a_p|} + \ln|a_p-a_k||a_p-a_k+z-a_p| + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{|z-a_p|} + \ln|a_p-a_k|^2 + \ln\left|1+\frac{z-a_p}{a_p-a_k}\right| + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{|z-a_p|} + \ln|a_p-a_k|^2 r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1).$$

Це означає, що $r(B_p,a_p) = |a_p-a_k|^2 r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big)$, звідки і випливає рівність (2.11).

Далі, використовуючи (2.9) і (2.10), маємо

$$r(B_k,a_k) \le$$

$$\le (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|a_1-a_k|^2|a_2-a_k|^2\ldots|a_{k-1}-a_k|^2|a_{k+1}-a_k|^2\ldots|a_n-a_k|^2}{r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)\ldots r(B_{k-1},a_{k-1})r(B_{k+1},a_{k+1})\ldots r(B_n,a_n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$= (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r(B_p,a_p)\right)^{-\frac{1}{n-1}},$$

тобто виконуються нерівності

$$r(B_1,a_1) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|a_2-a_1|^2|a_3-a_1|^2\ldots|a_n-a_1|^2}{r(B_2,a_2)r(B_3,a_3)\ldots r(B_n,a_n)}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

$$r(B_2,a_2) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|a_1-a_2|^2|a_3-a_2|^2\ldots|a_n-a_2|^2}{r(B_1,a_1)r(B_3,a_3)\ldots r(B_n,a_n)}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

. . . .

$$r(B_p,a_p) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|a_1-a_p|^2|a_2-a_p|^2\ldots|a_{p-1}-a_p|^2|a_{p+1}-a_p|^2\ldots|a_n-a_p|^2}{r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)\ldots r(B_{p-1},a_{p-1})r(B_{p+1},a_{p+1})\ldots r(B_n,a_n)}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

. . . .

$$r(B_n, a_n) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_1 - a_n|^2 |a_2 - a_n|^2 \ldots |a_{n-1} - a_n|^2}{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \ldots r(B_{n-1}, a_{n-1})} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Перемножаючи отримані нерівності, одержуємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} \left((n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}} \right) =$$

$$= (n-1)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.12}$$

Зауважимо, що

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} = \left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^{n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} = \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}},$$

а також

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{k=1}^{n} r^{n-1}(B_k, a_k) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k).$$

З цього та з нерівності (2.12) маємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}}}{\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)},$$

звідки маємо

$$\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^2 \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}}.$$

Добуваючи корінь з обох частин попередньої нерівності, отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (2.1).

Теорему 2.1 доведено.

Доведена теорема дозволяє оцінити вираз T_n для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Правильним є такий результат.

***Наслідок* 2.1.** *Нехай для довільного натурального* $n \geq 2$ *області* B_k *і точки* $a_k,\ k = \overline{1,n}$, *задовольняють усі умови теореми* 2.1. *Тоді виконується нерівність*

$$T_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}. \tag{2.13}$$

Порівняємо цю оцінку з точними оцінками, отриманими в роботах [2–4]. Так, для $n = 2$ за формулою (2.13) отримуємо $T_2 \leq 1$, що збігається з точною оцінкою, встановленою в роботі [2]. Для $n = 3$ одержуємо $T_3 \leq 2^{-\frac{3}{4}} \approx 0{,}5947$, тоді як в роботі [3] отримано точне значення $T_3 = \dfrac{64}{81\sqrt{3}} \leq 0{,}4562$ (відносна похибка $\delta_3 \approx 30\%$); для $n = 4$ отримуємо $T_4 \leq \dfrac{1}{3} \approx 0{,}3334$, тоді як в роботі [4] отримано точне значення $T_4 = \dfrac{9}{4^{8/3}} \leq 0{,}2233$ (відносна похибка $\delta_4 \approx 49\%$).

Також було висловлено припущення (див. [28]), що $T_5 \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} = 8{,}656 \cdot 10^{-2}$, причому рівність має місце, зокрема, якщо $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \left\{1, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, 0, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \infty\right\}$, а області $B_k,\ k = \overline{1,5}$, є відповідно круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^2 + 1}{z^2(z^3-1)^2}dz^2.$$

Згідно з нерівністю (2.13) отримуємо $T_5 \leq 4^{-\frac{5}{4}} \approx 0{,}1769$ (відносна похибка $\delta_5 \approx 104\%$).

Теорему 2.1, використовуючи раніше введене поняття n-го діаметра системи точок, можна записати в дещо іншій формі.

Теорема 2.1*. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *— деяке натуральне число,* $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *— деякий набір відповідно точок і областей комплексної площини таких, що* $a_k \in B_k,\ k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j$. *Тоді виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} d_n\left(\{a_p\}_{p=1}^{n}\right).$$

***Доведення теореми* 2.2.** Як і в теоремі 2.1, зафіксуємо деяке натуральне k так, що $1 \leq$ $\leq k \leq n-1$. Провівши аналогічні перетворення, як і в (2.10), отримаємо

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.14}$$

Доведемо, що $r(B_n^{(k)}, a_n^{(k)}) = r\big(B_n^{(k)}, 0\big) = r(B_n, \infty)$.

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \dfrac{1}{z - a_k}$ і враховуючи, що $a_n^{(k)} = 0$, маємо

$$G_{B_n}(z, \infty) = G_{B_n^{(k)}}(w, 0) = \ln\frac{1}{|w|} + \ln r\big(B_n^{(k)}, 0\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{\left|\dfrac{1}{z-a_k}\right|} + \ln r\big(B_n^{(k)}, 0\big) + o(1) = \ln|z - a_k| + \ln r\big(B_n^{(k)}, 0\big) + o(1) =$$

$$= \ln|z| + \ln\left|1 - \frac{a_k}{z}\right| + \ln r\big(B_n^{(k)}, 0\big) + o(1) =$$
$$= \ln|z| + \ln r\big(B_n^{(k)}, 0\big) + o(1),$$

звідки і випливає рівність $r\big(B_n^{(k)}, 0\big) = r(B_n, \infty)$.

Для $1 \leq p \leq n-1$, $p \neq k$, провівши перетворення, як і в доведенні теореми 2.1, отримаємо рівність $r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) = \dfrac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}$.

Таким чином, з (2.14) для $1 \leq k \leq n-1$ знаходимо

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.15}$$

Якщо ж $k = n$, то з (2.14) отримуємо

$$r(B_n, \infty) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.16}$$

Аналогічно до теореми 2.1, враховуючи (2.15) і (2.16), маємо

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}}{r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k)}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left(r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \right)^2 \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

з якої одержуємо

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (2.2).

Теорему 2.2 доведено.

Теорему 2.2 теж можна записати в дещо іншій формі.

Теорема 2.2*. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, B_k, a_k, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір відповідно областей і точок розширеної комплексної площини таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, і $a_n = \infty$. Тоді виконується нерівність*

$$r(B_n,\infty)\prod_{k=1}^{n-1} r(B_k,a_k)\leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}d_{n-1}\Big(\{a_p\}_{p=1}^{n-1}\Big).$$

***Доведення теореми* 2.3.** Згідно з теоремою 1 із роботи [37], виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{\frac{n-\gamma}{n}}. \tag{2.17}$$

Далі, згідно з нерівністю (2.1), маємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{1\leq p<k\leq n}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{2.18}$$

$$0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_n<2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1:=\frac{1}{\pi}(\arg a_2-\arg a_1),\ \ \alpha_2:=\frac{1}{\pi}(\arg a_3-\arg a_2),\ldots,\ \ \alpha_n:=\frac{1}{\pi}(2\pi-\arg a_n).$$

Звідси

$$\prod_{1\leq p<k\leq n}|a_p-a_k|=\prod_{1\leq p<k\leq n}2\sin\frac{\pi(\alpha_p+\ldots+\alpha_{k-1})}{2}. \tag{2.19}$$

Враховуючи, що $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=2$, і використовуючи дослідження добутку, що міститься у правій частині нерівності (2.19), переконуємося, що максимум даного виразу досягається тоді, коли всі α_k рівні між собою, а тому для $n=2m$ отримуємо

$$\prod_{1\leq p<k\leq n}\left(2\sin\frac{\pi(\alpha_p+\ldots+\alpha_{k-1})}{2}\right)\leq 2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n}.$$

Підставляючи отриману нерівність в (2.18), маємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq 2^{n}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}. \tag{2.20}$$

Далі, використовуючи (2.20) і (2.17), отримуємо нерівність (2.3).

Якщо ж $n=2m+1$, то

$$\prod_{1\leq p<k\leq n}\left(2\sin\frac{\pi(\alpha_p+\ldots+\alpha_{k-1})}{2}\right)\leq 2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n},$$

тому

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq 2^{n}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}. \tag{2.21}$$

Далі, підставляючи отриману нерівність в (2.18) і (2.17), одержуємо (2.4).

***Доведення теореми* 2.4.** Правильною є така лема.

Лема. *Нехай області* B_k *і точки* $a_k,\ k=\overline{0,n}$, *задовольняють усі умови теореми* 2.4. *Тоді виконується нерівність*

$$r(B_0,0)\le\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.22}$$

Доведення. Розглянемо відображення $w=\dfrac{1}{z}$. Враховуючи (2.11), переконуємося, що $r\big(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\big)=r(B_k,a_k)$. Тоді, повторюючи міркування з доведення теореми 2.1, згідно з нерівністю (2.9), отримуємо

$$r(B_0,0)\le\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}r^2\big(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\big)}}=\|\vec{r}_{1,2,\ldots,n}\|^{-1}.$$

Враховуючи, що $\|\vec{r}_{1,2,\ldots,n}\|\ge\varepsilon$, маємо

$$r(B_0,0)\le\frac{1}{\varepsilon},$$

що і доводить нерівність (2.22).

Лему доведено.

Використовуючи доведену лему, одержуємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\le\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k). \tag{2.23}$$

Далі, для випадку $n=2$ за теоремою Лаврентьєва [2] $\prod_{k=1}^{2}r(B_k,a_k)\le 4$, а тому нерівність (2.23) набирає вигляду

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{2}r(B_k,a_k)\le 4\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}.$$

Для випадку $n=2m,\ m\ge 2$, враховуючи (2.20), отримуємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\le 2^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Якщо ж $n=2m+1$, то, підставляючи (2.21) в (2.23), маємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\le 2^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma}(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Теорему 2.4 доведено.

Наслідок 2.2. *Нехай області* B_k *і точки* $a_k,\ k=\overline{0,n}$, *задовольняють усі умови теореми* 2.4, *причому* $\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\ge\varepsilon$. *Тоді у випадку* $n=2$ *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{2}r(B_k,a_k)\le 4\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^{\gamma},$$

у випадку $n = 2m,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2,$ *— нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}\sqrt{n}} \right)^{\gamma} (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}},$$

а у випадку $n = 2m + 1,\ m \in \mathbb{N},$ *— нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}\sqrt{n}} \right)^{\gamma} (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Для доведення наслідку достатньо зауважити, що за нерівністю між середнім геометричним і середнім квадратичним маємо

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} r^2(B_k, a_k)},$$

звідки випливає, що $\|\vec{r}_{1,2,\ldots,n}\| \geq \sqrt[n]{\varepsilon}\,\sqrt{n}$, а далі використовуємо доведену лему і нерівності (2.20), (2.21).

Література

1. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук, **49**, № 1(295), 3 – 76 (1994).
2. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений*, Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5**, 159 – 245 (1934).
3. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
4. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **100**, 131 – 145 (1980).
5. O. Teichmuller, *Collected papers*, Springer, Berlin etc. (1982).
6. Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
7. Ю. Е. Аленицын, *Конформные отображения многосвязной области на многолистные канонические поверхности*, Изв. АН СССР, сер. мат., **28**, № 3, 607 – 644 (1964).
8. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, Москва (1975).
9. П. М. Тамразов, *Теоремы покрытия линий при конформном отображении*, Мат. сб., **66 (108)**, № 4, 502 – 524 (1965).
10. П. М. Тамразов, *Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений*, Мат. сб., **67 (109)**, № 3, 329 – 337 (1965).
11. П. М. Тамразов, *К общей теореме о коэффициентах*, Мат. сб., **72 (114)**, № 1, 59 – 71 (1967).
12. П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов*, Изв. АН СССР, сер. мат., **32**, № 5, 1033 – 1043 (1968).
13. Г. П. Бахтина, *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук, Киев (1975).
14. Г. П. Бахтина, *Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях*, Укр. мат. журн., **27**, № 2, 202 – 204 (1975).
15. Г. П. Бахтина, *Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях*, Киев (1975), 35 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 75.2).
16. Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей*, Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, **149**, 21 – 27 (1984).
17. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **49,** № 2, 179 – 185 (1997).

18. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы*, Доп. НАН України, № 8, 13 – 15 (2005).
19. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 273 – 284 (2006).
20. В. Н. Дубинин, *О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих” областей*, Вопросы метрической теории отображений и ее применение, 24 – 31 (1978).
21. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168**, 48 – 66 (1988).
22. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **237**, 56 – 73 (1997).
23. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука ДВО РАН, Владивосток (2009).
24. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **160**, 91 – 98 (1987).
25. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **286**, 103 – 114 (2002).
26. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Наука, Москва (1980).
27. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций, I, II*, Алгебра и анализ, **9**, № 3, 41 – 103; № 5, 1 – 50 (1997).
28. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **276**, 253 – 275 (2001).
29. Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности*, Дальневост. мат. сб., **2**, 96 – 98 (1996).
30. Л. В. Ковалев, *О трех непересекающихся областях*, Дальневост. мат. журн., **1**, № 1, 3 – 7 (2000).
31. Л. В. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей*, Изв. вузов, математика, № 6, 82 – 87 (2000).
32. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці Ін-ту математики НАН України, **73** (2008).
33. A. L. Targonskii, I. I. Targonskaya, *Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere*, J. Math. Sci., **235**, № 1, 74 – 80 (2018).
34. A. L. Targonskii, *About one extremal problem for the projections of points on a unit circle*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 90 – 100 (2019).
35. Я. В. Заболотний, *Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області*, Доп. НАН України, № 9, 11 – 14 (2011).
36. I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane*, Complex Var. and Elliptic Equat., **62**, № 11, 1611 – 1618 (2017).
37. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **71**, № 7, 996 – 1002 (2019).
38. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, Москва (1962).

Одержано 02.07.20