DOI: 10.37863/umzh.v73i1.2398

УДК 519.177

А. Дудко, В. Пивоварчик (Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Ушинського, Одеса)

ОБЕРНЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗІРКОВОГО ГРАФА ЗІ СТІЛЬТЬЄСІВСЬКИХ СТРУН ІЗ ЗАДАНИМИ КІЛЬКОСТЯМИ МАС НА РЕБРАХ

Consider a spectral problem for a star graph of Stieltjes strings. At the central vertex the generalized Neumann conditions are imposed. All but one (called the root) pendant vertices of the graph are clamped. We consider two problems: 1) with the Neumann condition at the root (the Neumann problem), 2) with the Dirichlet condition at the root (the Dirichlet problem). In paper [V. Pivovarchik, N. Rozhenko, C. Tretter, *Dirichlet – Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*, Linear Algebra and Appl., **439**, № 8, 2263 – 2292 (2013)], the spectra of such problems were described and the corresponding inverse problem of recovering the values of masses and lengths of the intervals between them was solved by using the spectra of the two (Neumann and Dirichlet) problems. In the present paper, in contrast to the results mentioned above we solve the inverse problem where the number of point masses on the edges is prescribed. We find necessary and sufficient conditions guaranteeing that two sequences of real numbers are the spectra of the Dirichlet and Neumann problems for a star graph with prescribed numbers of masses on the edges and prescribed lengths of edges.

Розглянуто спектральну задачу для зіркового графа зі стільтьєсівських струн. У центральній вершині накладено узагальнені умови Неймана. Всі висячі вершини, крім однієї (кореня), закріплено. Ми розглядаємо дві задачі: 1) з умовою Неймана у корені (задача Неймана), 2) з умовою Діріхле у корені (задача Діріхле). У статті [V. Pivovarchik, N. Rozhenko, C. Tretter, *Dirichlet – Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*, Linear Algebra and Appl., **439**, № 8, 2263 – 2292 (2013)] описано спектри таких задач і розв'язано відповідну обернену задачу відновлення величин мас і довжин інтервалів між ними, виходячи зі спектрів двох задач (Неймана і Діріхле). На відміну від вказаних результатів ми розв'язуємо обернену задачу, в якій кількості мас на ребрах задано, та знаходимо умови на дві послідовності дійсних чисел, необхідні та достатні, щоб вони були спектрами задач Діріхле та Неймана для зіркового графа з заданими кількостями точкових мас та заданими довжинами ребер.

1. Вступ. Стільтьєсівська струна — це пружна нитка (тобто струна нульової щільності), яка несе на собі скінченну кількість точкових мас. Повну теорію прямої та оберненої задач для однієї струни розвинули Ф. Р. Гантмахер і М. Г. Крейн у [6]. Пряма задача полягає в описі спектра малих поперечних коливань такої струни за різних крайових умов, а обернена задача — у відновленні параметрів струни, виходячи зі спектрів коливань цієї струни.

Коливання графів, ребра яких — стільтьєсівські струни (або задачі механіки, які приводять до таких же рівнянь), розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [3 – 5, 7]). Обернені задачі для зіркового графа зі стільтьєсівських струн розглядались у [2, 12, 13], а для випадку демпфованих коливань графа — у [9, 15]. Зокрема, у [12] було розв'язано таку задачу: задано повні довжини ребер зіркового графа, спектр задачі для цього графа з коренем у висячій вершині, де накладено умову Неймана, та спектр задачі на цьому графі з умовою Діріхле у корені; знайти параметри струн, тобто величини точкових мас та довжини інтервалів між ними.

У даній роботі ми розглядаємо обернену спектральну задачу для зіркового графа зі стільтьєсівських струн з коренем у висячій вершині, але додатково до повних довжин ребер та двох спектрів задано також кількості мас на ребрах. Ми використовуємо деякі результати з робіт [12, 13].

У пункті 2 наведено рівняння, що описують динаміку коливань та крайові умови задачі про коливання зіркового графа.

Пункт 3 присвячено прямій спектральній задачі. Розглянуто чотири спектральні задачі: 1) спектральну задачу для зіркового графа T з $q \geq 3$ ребрами (які є стільтьєсівськими струнами), з коренем в одній із висячих вершин і з умовою Неймана у корені, 2) спектральну задачу для того ж зіркового графа з умовою Діріхле у корені, 3) спектральну задачу на зірковому графі T' з $q-1$ ребром, отриманому видаленням з T кореневого ребра (тобто ребра, інцидентного з коренем), з узагальненою умовою Неймана у центральній вершині, 4) спектральну задачу для графа T' з узагальненою умовою Діріхле у центральній вершині. Задачі 3, 4 є допоміжними, вони були розв'язані у [12, 13]. Ми розглядаємо їх тому, що їхні спектри пов'язані зі спектрами задач 1, 2. Основними у пункті 3 є теореми 6 і 7.

У пункті 4 розв'язано обернену задачу: в теоремі 10 сформульовано умови на дві послідовності дійсних чисел, достатні для того, щоб одна з них була спектром задачі 1, а друга — спектром задачі 2. Ці умови збігаються з необхідними умовами, отриманими в пункті 3.

2. Зірковий граф з коренем у висячій вершині. У цьому пункті будемо розглядати плоский зірковий граф із q, $q \geq 3$, стільтьєсівських струн, з'єднаних у центральній вершині, де знаходиться точкова маса $M \geq 0$, висячі вершини зафіксовано, окрім однієї — кореня, який позначимо через $\mathbf{v}$. Нехай ребра графа розташовано в одній площині, граф розтягнутий і може коливатися у напрямку, перпендикулярному до площини рівноважного стану графа. У центральній вершині виконуються умови неперервності і балансу сил. Розглядаємо два випадки: 1) корінь може вільно рухатись у напрямку, перпендикулярному до площини рівноважного стану графа; 2) корінь закріплено. Ми вивчаємо власні частоти коливань такого графа.

Далі струну (ребро), інцидентну з коренем, будемо називати кореневою, всі інші струни (ребра) матимуть індекси $j = 1, 2, \ldots, q-1$, $q \geq 3$. Коренева струна поділена на $\mathbf{n}+1$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0$, інтервал довжин $\mathbf{l}_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, \mathbf{n}-1$, і $\mathbf{l}_\mathbf{n} \geq 0$ точковими масами величин $\mathbf{m}_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$ (нумерація у напрямку від кореня до центра); повну довжину кореневої струни позначено через $\mathbf{l} := \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k$. Ребро e_j, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, поділено на $n_j + 1$, $n_j \in \mathbb{N}_0$, інтервал довжин $l_k^{(j)} > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_j$, точковими масами величин $m_k^{(j)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$ (нумерація у напрямку від висячої вершини до центра); довжина j-ї струни $l_j := \sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)}$.

Позначимо через $\mathbf{v}_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$, поперечне зміщення k-ї точкової маси $\mathbf{m}_k$ на кореневій струні у момент часу t, а через $\mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}(t)$, поперечні зміщення кінців кореневої струни (якщо $\mathbf{l}_\mathbf{n} = 0$, то $\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}(t) = \mathbf{v}_\mathbf{n}(t)$). Для інших $q-1$ ребер позначимо через $v_k^{(j)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$, поперечне зміщення k-ї маси $m_k^{(j)}$ на j-й струні у момент часу t, а через $v_0^{(j)}(t)$, $v_{n_j+1}^{(j)}(t)$ поперечні зміщення кінців j-ї струни. Вважаємо, що струни натягнуто силою, що дорівнює 1. Тоді рівняння Лагранжа для малих поперечних коливань графа мають вигляд (пор. з [6], гл. III.1):

$$\frac{\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_{k+1}(t)}{\mathbf{l}_k} + \frac{\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_{k-1}(t)}{\mathbf{l}_{k-1}} + \mathbf{m}_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{\mathbf{n}}, \tag{1}$$

$$\frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k^{(j)}} + \frac{v_k^{(j)(t)} - u_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}^{(j)}} + m_k^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_k^{(j)}(t) = 0, \tag{2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_j, \quad j = 1, 2, \ldots, q-1,$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}(t) = v_{n_1+1}^{(1)}(t) = v_{n_2+1}^{(2)}(t) = \ldots = v_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}(t), \tag{3}$$

$$\frac{\mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{n}}+1}(t)-\mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{n}}}(t)}{\mathbf{l}_{\tilde{\mathbf{n}}}}+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{v_{n_j+1}^{(j)}(t)-v_{n_j}^{(j)}(t)}{l_{n_j}^{(j)}}=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{n}}>0,\\ \mathbf{m}_{\mathbf{n}}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{v}_{\mathbf{n}}(t), & \text{якщо}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{n}}=0,\end{cases} \tag{4}$$

$$v_0^{(j)}(t)=0,\quad j=1,2,\ldots,q-1. \tag{5}$$

Тут $\tilde{\mathbf{n}}=\mathbf{n}$, якщо $\mathbf{l}_{\mathbf{n}}>0$, і $\tilde{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-1$, якщо $\mathbf{l}_{\mathbf{n}}=0$. Рівняння (1), (2) описують коливання точкових мас. Рівняння (3) — це умови неперервності у центральній вершині графа. Рівняння (4) описує коливання центральної вершини.

Умова Неймана, що відповідає вільному руху кореня у напрямку, перпендикулярному до площини рівноваги, має вигляд

$$\mathbf{v}_1(t)=\mathbf{v}_0(t),$$

а умова Діріхле у корені графа

$$\mathbf{v}_0(t)=0.$$

3. Спектральні задачі з коренем у висячій вершині. Відокремлюючи змінні у (1) – (5) згідно з $\mathbf{v}_k(t)=\mathbf{u}_k e^{\mathrm{i}\lambda t}$, $v_k^{(j)}(t)=u_k^{(j)}e^{\mathrm{i}\lambda t}$, де λ — спектральний параметр, отримуємо різницеві рівняння для амплітуд $\mathbf{u}_k$ й $u_k^{(j)}$:

$$\frac{\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{l}_k}+\frac{\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{l}_{k-1}}-\mathbf{m}_k\lambda^2\mathbf{u}_k=0,\quad k=1,2,\ldots,\tilde{\mathbf{n}}, \tag{6}$$

$$\frac{u_k^{(j)}-u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}}+\frac{u_k^{(j)}-u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}}-m_k^{(j)}\lambda^2u_k^{(j)}=0, \tag{7}$$

$$k=1,2,\ldots,n_j,\quad j=1,2,\ldots,q-1,$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{n}+1}=u_{n_1+1}^{(1)}=u_{n_2+1}^{(2)}=\ldots=u_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}, \tag{8}$$

$$\frac{\mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{n}}+1}-\mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{n}}}}{\mathbf{l}_{\tilde{\mathbf{n}}}}+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{u_{n_j+1}^{(j)}-u_{n_j}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}}=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{n}}>0,\\ -\mathbf{m}_{\mathbf{n}}\lambda^2\mathbf{u}_{\mathbf{n}}, & \text{якщо}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{n}}=0,\end{cases} \tag{9}$$

$$u_0^{(j)}=0,\quad j=1,2,\ldots,q-1. \tag{10}$$

Умова Неймана у корені має вигляд

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_0. \tag{11}$$

Задачу (6) – (11) назвемо задачею Неймана (N2) і позначимо її спектр через $\{\mu_k\}_{k=-n,k\neq 0}^{n}$. Також ми розглядаємо умову Діріхле у корені:

$$\mathbf{u}_0=0. \tag{12}$$

Задачу (6) – (10), (12) назвемо задачею Діріхле (D2) і позначимо її спектр через $\{\lambda_k\}_{k=-n,k\neq 0}^{n}$.

Разом з цими задачами розглянемо допоміжні спектральні задачі на зірковому графі T', який отримано з вихідного графа T видаленням кореневого ребра $\mathbf{e}$ разом з точковою масою у центральній вершині, якщо така є. Задачу

$$\frac{u_k^{(j)}-u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}}+\frac{u_k^{(j)}-u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}}-m_k^{(j)}\lambda^2u_k^{(j)}=0, \qquad k=1,2,\ldots,n_j, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{13}$$

$$u_{n_1+1}^{(1)}=u_{n_2+1}^{(2)}=\ldots=u_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{q-1}\frac{u_{n_j+1}^{(j)}-u_{n_j}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}}=0, \tag{15}$$

$$u_0^{(j)}=0, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{16}$$

назвемо задачею Неймана (N1) і позначимо її спектр через $\{\xi_k\}_{k=-n+\mathbf{n},k\neq0}^{n-\mathbf{n}}$. Задачу

$$\frac{u_k^{(j)}-u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}}+\frac{u_k^{(j)}-u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}}-m_k^{(j)}\lambda^2u_k^{(j)}=0, \qquad k=1,2,\ldots,n_j, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{17}$$

$$u_{n_j+1}^{(j)}=0, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{18}$$

$$u_0^{(j)}=0, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{19}$$

назвемо задачею Діріхле (D1) і позначимо її спектр через $\{\nu_k\}_{k=-n+\mathbf{n},k\neq0}^{n-\mathbf{n}}$.

Очевидно, що $\{\nu_k\}_{k=-n+\mathbf{n},k\neq0}^{n-\mathbf{n}}=\bigcup\limits_{j=1}^{q-1}\{\nu_k^{(j)}\}_{-n_1,k\neq0}^{n_j}$, де $\{\nu_k^{(j)}\}_{-n_j,k\neq0}^{n_j}$ — спектр задачі Діріхле–Діріхле для струни e_j (на j-му ребрі):

$$\frac{u_k^{(j)}-u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}}+\frac{u_k^{(j)}-u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}}-m_k^{(j)}\lambda^2u_k^{(j)}=0, \quad k=1,2,\ldots,n_j,$$

$$u_{n_j+1}^{(j)}=u_0^{(j)}=0.$$

У цьому пункті ми встановимо зв'язок між задачами (N2), (D2) та задачами (N1) і (D1). При цьому будемо використовувати техніку з монографії [6] (див. також [10]), розглядаючи рівняння на ребрах e_j, $j=1,2,\ldots,q-1$, та на кореневому ребрі.

Таким чином ми отримуємо розв'язки $\mathbf{u}_k$, $k=1,2,\ldots,\mathbf{n}+1$, рекурентних співвідношень (6) та розв'язки $u_k^{(j)}$, $k=1,2,\ldots,n_j+1$, $j=1,2,\ldots,q-1$, рекурентних співвідношень (7):

$$\mathbf{u}_k=\begin{cases}\mathbf{R}_{2k-2}(\mathbf{l}_0,\lambda^2)\mathbf{u}_1 & \text{для умови Діріхле (12)},\\ \mathbf{R}_{2k-2}(\infty,\lambda^2)\mathbf{u}_1 & \text{для умови Неймана (11)},\end{cases} \tag{20}$$

$$u_k^{(j)}=R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2)u_1^{(j)}, \qquad k=1,2,\ldots,n_j, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \tag{21}$$

де $\mathbf{R}_{2k-2}(\cdot,\lambda^2)$ і $R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2)$ — многочлени степеня $2k-2$. Покладемо

$$\mathbf{R}_{2k-1}(\cdot,\lambda^2):=\frac{\mathbf{R}_{2k}(\cdot,\lambda^2)-\mathbf{R}_{2k-2}(\cdot,\lambda^2)}{\mathbf{l}_k}, \quad k=1,2,\ldots,\mathbf{n},$$

$$R_{2k-1}^{(j)}(\lambda^2) := \frac{R_{2k}^{(j)}(\lambda^2) - R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2)}{l_k^{(j)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n_j.$$

Тоді, завдяки (13) та початковим умовам (16), многочлени $R_0^{(j)}(\lambda^2),\ R_1^{(j)}(\lambda^2), \ldots, R_{2n_j}^{(j)}(\lambda^2)$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, задовольняють рівняння

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = -\lambda^2 m_k R_{2k-2}(\lambda^2) + R_{2k-3}(\lambda^2). \tag{22}$$

Многочлени, що відповідають кореневому ребру, задовольняють рекурентні співвідношення

$$\mathbf{R}_{2k-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = -\lambda^2 \mathbf{m}_k \mathbf{R}_{2k-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) + \mathbf{R}_{2k-3}(\mathbf{l}_0, \lambda^2). \tag{23}$$

Використовуючи (10) – (12), отримуємо

$$R_0(l_0, \lambda^2) = 1, \qquad R_{-1}(l_0, \lambda^2) = \frac{1}{l_0}, \tag{24}$$

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = 1, \qquad \mathbf{R}_{-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{l}_0}, & \text{якщо} \quad \mathbf{l}_0 \in (0, \infty), \\ 0, & \text{якщо} \quad \mathbf{l}_0 = \infty. \end{cases} \tag{25}$$

Підставляючи (20), (21) в умови (8), (9), одержуємо систему лінійних рівнянь для $\mathbf{u}_1,\ u_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$:

$$\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}}(\infty, \lambda^2)\mathbf{u}_1 = R_{2n_1}^{(1)}(\lambda^2)u_1^{(1)} = R_{2n_2}^{(2)}(\lambda^2)u_1^{(2)} = \ldots = R_{2n_{q-1}}^{(q-1)}(\lambda^2)u_1^{(q-1)},$$

$$\Big(\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}-1}(\infty, \lambda^2) - M\lambda^2 \mathbf{R}_{2\mathbf{n}-2}(\infty, \lambda^2)\Big)\mathbf{u}_1 + \sum_{j=1}^{q-1} R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2)u_1^{(j)} = 0,$$

де

$$M = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \mathbf{l}_\mathbf{n} > 0, \\ \mathbf{m}_\mathbf{n}, & \text{якщо} \quad \mathbf{l}_\mathbf{n} = 0. \end{cases}$$

Тому спектр задачі (6) – (11) збігається з множиною коренів многочлена

$$\phi(\infty, \lambda^2) = \mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}}(\infty, \lambda^2) \sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1,\ k\neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right] +$$
$$+ \Big(\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}-1}(\infty, \lambda^2) - M\lambda^2 \mathbf{R}_{2\mathbf{n}-2}(\infty, \lambda^2)\Big) \prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2), \tag{26}$$

а спектр задачі (6) – (10), (12) — з множиною коренів многочлена

$$\phi(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = \mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) \sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1,\ k\neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right] +$$
$$+ (\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) - M\lambda^2 \mathbf{R}_{2\mathbf{n}-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2)) \prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2). \tag{27}$$

Твердження 1. 1. *Справджуються рівняння*

$$\phi(\mathbf{l}_0, z) = \mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}_0, z)\phi_{N,q-1}(z) + \Big(\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2\mathbf{n}-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2)\Big)\phi_{D,q-1}(z), \tag{28}$$

$$\phi(\infty, z) = \mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}}(\infty, z)\phi_{N,q-1}(z) + \Big(\mathbf{R}_{2\tilde{\mathbf{n}}-1}(\infty, z) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2\mathbf{n}-2}(\infty, z)\Big)\phi_{D,q-1}(z), \tag{29}$$

де $\phi_{D,q-1}(z)$ — *характеристичний многочлен задачі* (17)–(19), *а* $\phi_{N,q-1}(z)$ — *характеристичний многочлен задачі* (13)–(16).

2. *Якщо* $\phi(\mathbf{l}_0, z) = \phi(\infty, z) = 0$ *для деякого* z, *то* $\phi_{N,q-1}(z) = \phi_{D,q-1}(z) = 0$.

Доведення. 1. Рівняння (28), (29) еквівалентні рівнянням (26), (27).

2. Завдяки тотожності Лагранжа (див. [12], лема 3.5) визначник системи (28), (29) в обох випадках $\mathbf{l}_0 = 0$ і $\mathbf{l}_0 > 0$ має вигляд

$$\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\mathbf{l}_0, z)\mathbf{R}_{2\mathbf{n}-1}(\infty, z) - \mathbf{R}_{2\mathbf{n}-1}(\mathbf{l}_0, z)\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\infty, z) = -\frac{1}{\mathbf{l}_0} \neq 0.$$

Тому $\phi_{N,q-1}(z) = \phi_{D,q-1}(z) = 0$.

Твердження доведено.

Означення 1. *Комплекснозначна функція* ω, *визначена на відкритій підмножині* $\mathbb{C}$, *називається неванліннівською, якщо*:

1) *область її визначення міститься у* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *і* ω *аналітична на* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

2) $\omega(\overline{z}) = \overline{\omega(z)}$ *при* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

3) $\mathrm{Im}z\ \mathrm{Im}\omega(z) \geq 0$ *при* $\mathrm{Im}z \neq 0$;

ця функція називається S-*функцією, якщо додатково*:

4) ω *аналітична при* $z \notin [0, \infty)$,

5) $\omega(z) > 0$ *при* $z \in (-\infty, 0)$;

S-*функція називається* S_0-*функцією, якщо*

6) 0 *не є полюсом* ω.

Теорема 1 ([12], теорема 3.7). *Після скорочення спільних множників (якщо такі є) у чисельнику і знаменнику функція*

$$\frac{\phi(\mathbf{l}_0, z)}{\phi(\infty, z)}$$

стає S_0-*функцією.*

Теорема 2 ([12], теорема 3.12). *Власні значення* $\{\mu_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$, $\mu_{-k} = -\mu_k$, *задачі Неймана* (N2) *та власні значення* $\{\lambda_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, *задачі Діріхле* (D2) *мають такі властивості*:

1) $0 < \mu_1 < \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \lambda_n$;

2) *кратності власних значень* μ_k *і* λ_k *не перевищують* $q-1$; *якщо* $\mu_k = \lambda_k$ (*або* $= \lambda_{k+1}$), *то сума кратностей* μ_k *і* λ_k (*або* λ_{k+1}) *не перевищує* $2q-3$;

3) *якщо* $\mu_k = \lambda_k$ *(або* $= \lambda_{k+1}$), *то* μ_k *є коренем функції* $\phi_{q-1}(z) := \dfrac{\phi_{D,q-1}(z)}{\phi_{N,q-1}(z)}$.

Зауважимо, що максимальна кратність власного значення для довільного графа зі стільтьєсівських струн залежить лише від форми графа (див. [1]).

Щоб сформулювати необхідні умови на можливі кратності власних значень задач Неймана та Діріхле, будемо використовувати поняття векторного мажорування, введене Мюрхедом [11] для випадку векторів із цілими координатами й узагальнене Харді, Літтлвудом та Пойа (див. [8]).

Означення 2. *Нехай* $x = (x_i)_{i=1}^{s}$ *і* $y = (y_i)_{i=1}^{t}$ *— два вектори з невід'ємними координатами, упорядкованими у незростаючому порядку:* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_s \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \ldots \geq y_t \geq 0$. *Нехай* $s = t$. *Тоді кажемо, що* x *мажорує* y $(x \succ y)$, *якщо виконуються такі умови:*

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = \sum_{i=1}^{t} y_i, \qquad \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t-1.$$

Якщо $s \neq t$, *то доповнюємо коротший вектор нулями і покладаємо* $\widetilde{x} = (x_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *і* $\widetilde{y} = (y_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *з* $x_i = 0$ *при* $i = s+1, \ldots, \max\{s,t\}$, $y_i = 0$ *при* $i = t+1, \ldots, \max\{s,t\}$. *Тоді кажемо, що* x *мажорує* y, $x \succ y$, *якщо* $\widetilde{x}$ *мажорує* $\widetilde{y}$, $\widetilde{x} \succ \widetilde{y}$.

***Зауваження* 1.** Якщо вектор $x = (x_i)_{i=1}^{s}$ мажорує вектор $(y_i)_{i=1}^{t}$, то кількість ненульових координат вектора x менша або дорівнює кількості ненульових координат вектора y,

$$x \succ y \ \rightarrow \ \#\big\{i \in \{1, \ldots, s\} : x_i > 0\big\} \leq \#\big\{i \in \{1, \ldots, t\} : y_i > 0\big\}.$$

***Зауваження* 2.** Для вектора $x = (x_i)_{i=1}^{s} \in R^s$ позначимо через $x^{\downarrow} = (x_i^{\downarrow})_{i=1}^{s} \in R^s$ вектор з тими ж координатами, але упорядкованими у незростаючому порядку, тобто існує така перестановка π індексів $\{1, 2, \ldots, s\}$, що

$$x_i^{\downarrow} = x_{\pi(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \quad x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq \ldots \geq x_s^{\downarrow}.$$

Означення 3. *Нехай* $x = (x_i)_{i=1}^{s}$ *і* $y = (y_i)_{i=1}^{s}$ *— два вектори з невід'ємними координатами, упорядкованими у незростаючому порядку:* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_s \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_t \geq 0$. *Тоді говоримо, що* x *слабко мажорує* y, *якщо*

$$x \overset{w}{\succ} y \quad :\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t.$$

Наступна теорема — це теорема 2.10 зі статті [13], сформульована у наших термінах. Ми застосовуємо її до зіркового графа T'.

Теорема 3. *Нехай* $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ *— множина власних значень задачі Неймана* (N1), $\xi_k > > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$, $k > 0$, *з урахуванням можливих кратностей. Позначимо через* r_N *кількість невід'ємних різних власних значень задачі Неймана* ξ_{k_s}, *через* $(p_s(N))_{s=1}^{r_N}$ *вектор їхніх кратностей, а через* $p^{\downarrow}(N) = \big(p_s^{\downarrow}(N)\big)_{s=1}^{r_N}$ *відповідний вектор кратностей у незростаючому порядку.*

Тоді:

1) $0 < \xi_1^2 < \xi_2^2 \leq \xi_3^2 \leq \ldots \leq \xi_{n-\mathbf{n}-1}^2 \leq \xi_{n-\mathbf{n}}^2$;

2) *якщо* $p_i(N) > 1$, *то* $p_{i-1}(N) = p_{i+1}(N) = 1$, $i = 2, \ldots, r_N - 1$, *а якщо* $p_{r_N}(N) > 1$, *то* $p_{r_N-1}(N) = 1$;

3) $\sum_{i=1}^{r_N} p_i(N) = n - \mathbf{n}$;

4) $r_N \geq n_1 + n_2$;

5) $\{N_1 - 1, N_2 - 1, \ldots, N_{n_1} - 1\} \succ \big\{p_1^{\downarrow}(N), p_2^{\downarrow}(N), \ldots, p_{r_N - n_1}^{\downarrow}(N)\big\}$.

Зауважимо, що твердження 4 є неявним наслідком властивості мажорування 5. Узагальнення нерівності з п. 4 на випадок довільного дерева отримано у [14].

Означення 4. *Нехай* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\tau}$ *і* $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\tau}$ *— дві послідовності, що чергуються, тобто*

$$0 < \alpha_1 < \sigma_1 < \ldots < \alpha_\tau < \sigma_\tau.$$

Нехай $\{\alpha_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\tau}}$ *— довільна підпослідовність* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\tau}$, *а* $\{\sigma_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\tau}}$ *— довільна підпослідовність* $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\tau}$, *де* $0 \le \hat{\tau} \le \tau$ *і* $0 \le \check{\tau} \le \tau$.

Назвемо $\left\{\{\alpha_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\tau}}, \{\sigma_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\tau}}\right\}$ *неповною парою довжини* $\le \tau$.

Зауваження **3.** Нехай $\{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1} = \{\mu_k\}_{-n,k\neq 0}^{n} \cap \{\lambda_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$, причому $\beta_{-k} = -\beta_k$ і $0 < \beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_{p_1}$, а $\{\beta_{k_s}\}_{-r,s\neq 0}^{r}$ — послідовність різних елементів у $\{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$, занумерованих так, що $0 < \beta_{k_1} < \beta_{k_2} < \ldots < \beta_{k_r}$. Тоді послідовності $\{\mu_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$ і $\{\lambda_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$ можна записати у вигляді $\{\mu_k\}_{-n,k\neq 0}^{n} = \{\gamma_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$ і $\{\lambda_k\}_{-n,k\neq 0}^{n} = \{\delta_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$, де

$$0 < \gamma_1 < \delta_1 < \ldots < \gamma_{n-p_1} < \delta_{n-p_1}.$$

Позначимо через $\left\{\tilde{p}(\beta_{k_1}), \ldots, \tilde{p}(\beta_{k_r})\right\}$ вектор кратностей елементів послідовності $\{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$. Нехай $\left\{\tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_r})\right\}$ — відповідний упорядкований вектор.

За означенням кожне β_{k_s} є коренем як $\phi(\infty, \lambda^2)$, так і $\phi(\mathbf{l}_0, \lambda^2)$ кратності, яка є кратністю β_{k_s} як кореня функції $\phi_{N,q-1}(\lambda^2)$. Тоді, застосовуючи теорему 3.3 з [13] до графа T', отримуємо таку теорему.

Теорема 4. 1. *Кількість* r *різних елементів* $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^{r}$ *у* $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$ *задовольняє нерівність* $r \le \left\lfloor \dfrac{n-\mathbf{n}}{2} \right\rfloor$, *де* $\lfloor \cdot \rfloor$ *— ціла частина*;

2. *Виконується нерівність* $p(\beta_{k_s}) \le q-2$ *для всіх* k_s.

Позначимо $\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{-\hat{\mathbf{n}},s\neq 0}^{\hat{\mathbf{n}}} = \{\beta_{k_s}\}_{-r,k\neq 0}^{r} \cap \{\gamma_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1}$, $\{\beta_{\check{k}_s}\}_{-\check{\mathbf{n}},s\neq 0}^{\check{\mathbf{n}}} = \{\beta_{k_s}\}_{-r,k\neq 0}^{r} \cap \{\delta_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1}$.

Приклад. Нехай $g = 4$, $\mathbf{n} = n_1 = n_2 = n_3 = 4$. Тоді

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 = \lambda_2 = \mu_3 = \lambda_3 < \mu_4 < \lambda_4 < \mu_5 = \lambda_5 = \mu_6 = \lambda_6 = \mu_7 < \lambda_7 < \mu_8 < \lambda_8 =$$
$$= \mu_9 = \lambda_9 = \mu_{10} = \lambda_{10} < \mu_{11} < \lambda_{11} < \mu_{12} < \lambda_{12} = \mu_{13} = \lambda_{13} = \mu_{14} =$$
$$= \lambda_{14} < \mu_{15} = \lambda_{15} < \mu_{16} < \lambda_{16}.$$

У цьому випадку $p_1 = 9$, $r = 5$ і

$$\beta_1 = \beta_2 = \mu_2, \qquad \beta_3 = \beta_4 = \mu_5, \qquad \beta_5 = \lambda_6 = \mu_9, \qquad \beta_6 = \beta_7 = \mu_{13}, \qquad \beta_8 = \mu_{15},$$
$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 3, \qquad k_3 = 5, \qquad k_4 = 6, \qquad k_5 = 8,$$
$$\hat{k}_1 = k_2 = 3, \qquad \check{k}_1 = k_3 = 5, \qquad \check{k}_2 = k_4 = 6,$$
$$\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{-1,s\neq 0}^{1} = \{\pm\beta_{k_2}\} = \{\pm\beta_3\}, \qquad \{\beta_{\check{k}_s}\}_{-2,k\neq 0}^{2} = \{\pm\beta_{k_3}, \pm\beta_{k_4}\} = \{\pm\beta_5, \pm\beta_6\}.$$

Теорема 5. *Послідовності* $\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ *і* $\{\beta_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ *утворюють неповну пару довжини, що не перевищує* $\mathbf{n}$.

Доведення. За означенням β_{k_s} — корінь обох многочленів $\phi(\infty, \lambda^2)$ і $\phi(\mathbf{l}_0, \lambda^2)$ кратності, що дорівнює принаймні кратності β_{k_s} як кореня $\phi_{N,q-1}(\lambda^2)$.

Кратність $\beta_{\hat{k}_s}$ як кореня $\phi(\infty, \lambda^2)$ перевищує на одиницю кратність $\beta_{\hat{k}_s}$ як кореня $\phi_{N,q-1}(\lambda^2)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\infty, \beta_{\hat{k}_s}^2) = 0$. Тому $0 \le \hat{\mathbf{n}} \le \mathbf{n}$.

Кратність $\beta_{\check{k}_s}$ як кореня $\phi(\mathbf{l}_0, \lambda^2)$ перевищує на одиницю кратність $\beta_{\check{k}_s}$ як кореня $\phi_{N,q-1}(\lambda^2)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\mathbf{l}_0, \beta^2_{\check{k}_s}) = 0$. Отже, $0 \le \check{\mathbf{n}} \le \mathbf{n}$. Оскільки корені $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\mathbf{l}_0, \lambda^2)$ чергуються з коренями $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\infty, \lambda^2)$, приходимо до висновку, що $\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ і $\{\beta_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ — неповна пара довжини, що не перевищує $\mathbf{n}$.

Теорему доведено.

Будемо використовувати таке позначення:

$$N_i(T') := \#\big\{j \in \{1, 2, \ldots, q-1\} : n_j \ge i\big\}.$$

Теорема 6 ([13], теорема 2.7)**.** *Нехай* $\{\xi_k\}_{k=-n-\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ *— послідовність власних значень задачі* (13)–(16), $\xi_k > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$, $k > 0$, *а* $\{\nu_k\}_{k=-n-\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ *— послідовність власних значень задачі* (17)–(19), $\nu_k > 0$, $\nu_{-k} = -\nu_k$, $k > 0$, *обидві з урахуванням кратностей. Позначимо через* $\{\nu_{k_s}\}_{-r_D,s\neq 0}^{r_D}$ *послідовність різних власних значень задачі* (17)–(19), *через* r_D *кількість різних додатних власних значень, а через* $\big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_{r_D}})\big\}$ *вектор їхніх кратностей, упорядкований у незростаючому порядку.*

Тоді:

1) $0 < \xi_1^2 < \nu_1^2 \le \ldots \le \xi_{n-\mathbf{n}}^2 \le \nu_{n-\mathbf{n}}^2$;

2) $\nu_{k-1} = \xi_k$ *тоді й тільки тоді, коли* $\xi_k = \nu_k$;

3) $\big(N_1(T'), N_2(T'), \ldots, N_{n_1}(T')\big) \succ \big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_{r_D}})\big\}$.

Теорема 7. *Нехай* $\big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_r})\big\}$ *— впорядкований вектор кратностей елементів множини* $\big\{\beta_{k_s}\big\}_{-r,s\neq 0}^{r}$. *Тоді* $\{M_1, \ldots, M_m\} \overset{w}{\succ} \big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_r})\big\}$, *де* $M_j = N_j(T') - 1$, *якщо* $N_j(T') \ge 2$ *і* $m = \#\{j : N_j(T') \ge 2\}$.

Доведення. Нехай $\beta_{k_s} \in \{\mu_k\}_{k=-n,k\neq 0}^{n} \cap \{\lambda_k\}_{k=-n,k\neq 0}^{n}$ і $\beta_{k_s} = \xi_k = \nu_k$, тоді за теоремою 2 маємо $p(\beta_{k_s}) = p(\xi_k) = p(\nu_k) - 1$. З твердження 3 теореми 6 випливає, що

$$\big(N_1(T') - 1, N_2(T') - 1, \ldots, N_{n_1}(T') - 1\big) \succ \big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_1}) - 1, \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\nu_{k_{r_D}}) - 1\big\}.$$

Оскільки $p(\beta_{k_s}) > 0$ тоді й тільки тоді, коли $p(\nu_k) \ge 2$, приходимо до висновку, що $\{M_1, \ldots, M_m\} \overset{w}{\succ} \big\{\tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_1}), \ldots, \tilde{p}^{\downarrow}(\beta_{k_r})\big\}$.

Теорему доведено.

4. Обернена задача. У цьому пункті ми покажемо, що твердження 1, 3 теореми 2, твердження 1 теореми 4 та слабке мажорування у теоремі 7 — це не лише необхідні, але й достатні умови для того, щоб дві послідовності були спектрами задач (6)–(11) і (6)–(10), (12).

Лема 3.13 з [12] у наших термінах формулюється таким чином.

Лема 1. *Нехай* $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $n - p_1 \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1 > 0$. *Нехай послідовності* $\{\mu_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1}$, $\{\lambda_k\}_{-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1} \subset \mathbb{R}$ *такі, що*

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-p_1} < \lambda_{n-p_1},$$

і

$$\Phi(z) := \gamma \frac{\prod_{k=1}^{n-p_1}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n-p_1}\left(1-\dfrac{z}{\mu_k^2}\right)} = a_0 + \cfrac{1}{-b_1 z + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{-b_2 z + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-p_1-1} + \cfrac{1}{-b_{n-p_1} z + \cfrac{1}{a_{n-p_1}}}}}}}. \tag{30}$$

Тоді $a_k > 0,\ k = 0,1,\ldots,n-p_1,\ b_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n-p_1,$ *і* Φ *має вигляд*

$$\Phi(z) = a_0 + \cfrac{1}{-b_1 z + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{-b_2 z + \ldots + \cfrac{1}{a_{\mathbf{n}-1} + \cfrac{1}{-b_{\mathbf{n}} z + \cfrac{1}{a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1 + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)}}}}}},$$

де

$$\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z) := a_{\mathbf{n}}^1 + \cfrac{1}{-b_{\mathbf{n}+1} z + \cfrac{1}{a_{\mathbf{n}+1} + \cfrac{1}{-b_{\mathbf{n}+2} z + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-p_1-1} + \cfrac{1}{-b_{n-p_1} z + \cfrac{1}{a_{n-p_1}}}}}}}, \tag{31}$$

$\mathbf{n}$ *вибрано так, що*

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} a_k < \mathbf{l}, \qquad \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} a_k \geq \mathbf{l},$$

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} a_k + a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1 + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(0) = \gamma, \quad \widehat{f}_{\mathbf{n}}(0) > 0,$$

і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)$ — S_0*-функція.*

Теорема 8 ([12], теорема 3.14)**.** *Нехай* $q \in \mathbb{N},\ q \geq 2,\ \{\mathbf{l}\} \cup \{l_j\}_{j=1}^{q-1} \subset (0,\infty),\ n \in \mathbb{N}.$ *Припустимо, що* $\{\mu_k\}_{-n,\,k\neq 0}^{n}$, $\{\lambda_k\}_{-n,\,k\neq 0}^{n} \subset R$ *такі, що*:

0) $\mu_{-k} = -\mu_k,\ \lambda_{-k} = -\lambda_k;$

1) $0 < \mu_1 < \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \lambda_n;$

2) *кратності* μ_k *у* $\{\mu_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$ *і кратності* λ_k *у* $\{\lambda_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$ *не перевищують* $q-1$;

3) *якщо* $\mu_k = \lambda_k$ (*або* $= \lambda_{k+1}$), *то* $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(\lambda_k^2) = 0$ *з* $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, *означеним у лемі* 1.

Тоді існує зірковий граф з q стільтьєсівських струн, тобто числа $\{\mathbf{n}\}$, $\{n_j\}_{j=1}^{q-1} \subset \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, *маси* $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset (0,\infty)$ *і довжини інтервалів* $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{l_n} \geq 0,\ \mathbf{l}_k > 0$ *при* $k = 1,2,\ldots,\mathbf{n}-1)$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j} \subset (0,\infty)$, $j = 1,2,\ldots,q-1$, *між ними з* $\sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k = \mathbf{l}$, $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$ *і*

$$n = \mathbf{n} + \sum_{j=1}^{q-1} n_j$$

такі, що $\{\mu_k\}_{-n,\ k\neq 0}^{n}$ *— спектр задачі Неймана* (13)–(16) *а* $\{\lambda_k\}_{-n,\ k\neq 0}^{n}$ *— спектр задачі Діріхле* (17)–(19).

Наступна теорема — це теорема 3.2 з [13] у наших термінах, застосована до дерева T'.

Теорема 9. *Нехай* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, $(l_j)_{j=1}^{q-1} \subset (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. *Припустимо, що дані послідовності* $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$, $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ *такі, що* $\xi_k,\ \nu_k > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$, $\nu_{-k} = -\nu_k$ *при* $k > 0$, *і задано* $(n_j)_{j=1}^{q-1} \subset \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{q-1}$ *з* $\sum_{j=1}^{q-1} n_j = n - \mathbf{n}$. *Позначимо* $N_i := \#\{j \in \{1,2,\ldots,q-1\} : n_j \geq i\}$ *для* $i = 1,2,\ldots,n_1$, *через* r_D *кількість різних додатних елементів у* $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$, *через* $p(\nu_k)$, $k = 1,2,\ldots,r_D$, *їхні кратності, і нехай* $\big(p^{\downarrow}(\nu_{k_1}), p^{\downarrow}(\nu_{k_2}),\ldots,p^{\downarrow}(\nu_{k_{r_D}})\big)$ *— відповідний вектор кратностей у незростаючому порядку.*

Тоді умови:

1) $0 < \xi_1^2 < \nu_1^2 \leq \ldots \leq \xi_{n-\mathbf{n}}^2 \leq \nu_{n-\mathbf{n}}^2$,

2) $\nu_{k-1} = \xi_k$ *тоді й тільки тоді, коли* $\xi_k = \nu_k$,

3) $\big(N_1(T'), N_2(T'),\ldots,N_{n_1}(T')\big) \succ \big(p^{\downarrow}(\nu_{k_1}), p^{\downarrow}(\nu_{k_2}),\ldots,p^{\downarrow}(\nu_{k_{r_D}})\big)$

є необхідними і достатніми для існування набору додатних мас $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, *набору довжин інтервалів* $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$, $j = 1,\ 2,\ldots,q-1$, *з* $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$ *таких, що спектральна задача Неймана* (13)–(16) *на зірковому графі* T' *має спектр* $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$, *а спектральна задача Діріхле* (17)–(19) *на* T' *— спектр* $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$.

Тепер сформулюємо основний результат цієї статті.

Теорема 10. *Нехай* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, $\{l_j\}_{j=1}^{q-1} \subset (0,\infty)$, $\mathbf{l} \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,q-1$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} + \sum_{j=1}^{q-1} n_j = n$, $p_1 \in \mathbb{N}$, $p_1 \leq n - \mathbf{n}$, $r \in \mathbb{N}$ $(p_1 \geq r \geq n_1 + n_2$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{q-1}$, *і припустимо, що* $\{\mu_k\}_{k=-n,k\neq 0}^{n} = \{\gamma_k\}_{k=-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{k=-p_1,k\neq 0}^{p_1}$, $\{\lambda_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n} = \{\delta_k\}_{k=-n+p_1,k\neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{k=-p_1,k\neq 0}^{p_1} \subset \mathbb{R}$, $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^{r}$ *— різні елементи послідовності* $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$ *такі, що*:

0) $\mu_{-k} = -\mu_k$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$;

1) $0 < \gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n-p_1} < \delta_{n-p_1}$;

2) *кількість* r *різних елементів* β_{k_s} *послідовності* $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$ *задовольняє нерівність* $r \leq \left\lfloor \dfrac{n-\mathbf{n}}{2} \right\rfloor$;

3) *для всіх* β_k $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(\beta_k^2) = 0$ *з* $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, *означеною у* (30), (31) *з* $\gamma = \mathbf{l} + \left(\sum_{k=1}^{q-1} \dfrac{1}{l_k}\right)^{-1}$ *і деяким* $a_{\mathbf{n}}^1$, $0 < a_{\mathbf{n}}^1 \leq a_{\mathbf{n}}$;

4) $\{M_1,\ldots,M_m\} \overset{w}{\succ} \{\tilde{p}_1^{\downarrow}, \tilde{p}_2^{\downarrow},\ldots,\tilde{p}_r^{\downarrow}\}$, *де* $M_j = N_j(T') - 1$ *при* $N_j(T') \geq 2$ *і* $M_j = 0$ *при* $N_j \leq 1$, $m = \#\{j : N_j(T') \geq 2\}$, *а* $\{\tilde{p}_1^{\downarrow}, \tilde{p}_2^{\downarrow},\ldots,\tilde{p}_r^{\downarrow}\}$ *— впорядкований вектор кратностей елементів послідовності* $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^{r}$.

Тоді існує зірковий граф з q стільтьєсівських струн, тобто величини мас $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset (0,\infty)$ *і довжини інтервалів* $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{l_n} \geq 0,\ \mathbf{l}_k > 0$ *при* $k = 0, 1, \ldots, \mathbf{n} - 1$) *з* $\sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k = \mathbf{l}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j} \subset (0,\infty)$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, *між ними з* $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$ *такі, що* $\{\mu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ *— спектр задачі Неймана* (6)–(11), *а* $\{\lambda_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ *— спектр задачі Діріхле* (6)–(10), (12).

Доведення. Як у лемі 1, побудуємо функцію

$$\Phi(z) := \gamma \frac{\prod_{k=1}^{n-p_1}\left(1 - \dfrac{z}{\gamma_k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n-p_1}\left(1 - \dfrac{z}{\delta_k^2}\right)} =$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{-b_1 z + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{-b_2 z + \ldots + \cfrac{1}{a_{\mathbf{n}-1} + \cfrac{1}{-b_{\mathbf{n}} z + \cfrac{1}{a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1 + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)}}}}}, \tag{32}$$

де $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ має вигляд (31) з деяким $a_{\mathbf{n}}^1$, що задовольняє нерівності $0 < a_{\mathbf{n}}^1 \leq a_{\mathbf{n}}$.

Шуканий граф будуємо таким чином. Виберемо $\mathbf{m}_k := b_k$, $k = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$, у якості величин мас на кореневому ребрі, а $\mathbf{l}_k := a_k$ ($k = 0, 1, \ldots, \mathbf{n} - 1$) і $\mathbf{l_n} := a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1$ у якості довжин інтервалів між ними. Для побудови всіх інших ребер використаємо функцію $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ з (31) і теорему 9.

Із зображення $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ у вигляді ланцюгового дробу (31) отримуємо, що $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ — S_0-функція. Крім того, $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ є відношенням двох многочленів $g_{\mathbf{n}}(z)$ і $h_{\mathbf{n}}(z)$ степеня $n - p_1 - \mathbf{n}$:

$$\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z) = \frac{g_{\mathbf{n}}(z)}{h_{\mathbf{n}}(z)},$$

Згідно з лемою 1 корені та полюси $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, тобто корені $g_{\mathbf{n}}$ та $h_{\mathbf{n}}$, строго чергуються.

Покладемо

$$\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(z) := g_{\mathbf{n}}(z) \prod_{k=1}^{p_1} (z - \beta_k^2), \qquad \widetilde{h}_{\mathbf{n}}(z) := h_{\mathbf{n}}(z) \prod_{k=1}^{p_1} (z - \beta_k^2).$$

Кількість коренів ν_k^2 многочлена $\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(z)$ і коренів ξ_k^2 многочлена $\widetilde{h}_{\mathbf{n}}(z)$ з урахуванням кратностей дорівнює $n - \mathbf{n}$.

Покажемо тепер, що послідовності $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ і $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n},k\neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ задовольняють умови теореми 9.

Чергування в умові 1 теореми 9, окрім другої строгої нерівності, справедливе тому, що корені многочленів $g_{\mathbf{n}}$ і $h_{\mathbf{n}}$ додатні, строго чергуються, а $\widetilde{g}_{\mathbf{n}}$ і $\widetilde{h}_{\mathbf{n}}$ утворені з $g_{\mathbf{n}}$, $h_{\mathbf{n}}$ множенням на спільний многочлен. Якщо $\xi_k = \nu_k$, то з умови 3 теореми 10 випливає, що $\nu_k = \beta_s$, $p(\xi_k) = p(\beta_s) = p(\nu_k) - 1$ і, отже, умова 2 теореми 9 виконується.

Оскільки всі елементи послідовностей $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n},[\neq 0}^{n-\mathbf{n}} \backslash \{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$ і $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n},[\neq 0}^{n-\mathbf{n}} \backslash \{\beta_k\}_{-p_1,k\neq 0}^{p_1}$ прості, з умови 4 теореми 10 випливає умова 3 теореми 9.

Метод відновлення величин мас $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ і довжин інтервалів $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, описано у [13] (див. доведення теореми 3.2).

Залишилося довести, що отримані дані $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ породжують задачу (6)–(11) зі спектром $\{\mu_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$ і задачу (6)–(10), (12) зі спектром $\{\lambda_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$.

Отримані методом із роботи [13] послідовності $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ і $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, генерують задачу (13)–(16) з характеристичним многочленом

$$\sum_{j=1}^{q-1}\left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{q-1}R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2)\right]$$

і задачу (17)–(19) з характеристичним многочленом

$$\prod_{k=1}^{q-1}R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2),$$

де

$$\frac{\prod_{k=1}^{q-1}R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2)}{\sum_{j=1}^{q-1}\left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{q-1}R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2)\right]} = \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z).$$

Нехай $\Phi(\mathbf{l_0}, z)$ — мнгочлен, побудований за допомогою (22)–(25), (27), і $\Phi(\infty, z)$ — многочлен, побудований за допомогою (22)–(25), (26) із використанням даних $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$. Тоді

$$\Phi(z) = \mathbf{l_0}\frac{\Phi(\mathbf{l_0}, z)}{\Phi(\infty, z)},$$

і за лемою 1

$$\Phi(z) = \mathbf{l}_0 + \cfrac{1}{-\mathbf{m}_1 z + \cfrac{1}{\mathbf{l}_1 + \cfrac{1}{-\mathbf{m}_2 z + \ldots + \cfrac{1}{\mathbf{l}_{\mathbf{n}-1} + \cfrac{1}{-\mathbf{m}_{\mathbf{n}} z + \cfrac{1}{\mathbf{l}_{\mathbf{n}} + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)}}}}}}. \qquad (33)$$

Порівнюючи (33) з (32), приходимо до висновку, що всі γ_k є коренями $\Phi(\mathbf{l_0}, z)$, а всі δ_k — коренями $\Phi(\infty, z)$. Оскільки кожне β_k збігається з деякими μ_s і λ_s (або λ_{s-1}), кратності задовольняють нерівності $p(\beta_k) \leq \min\{\mu_s, \lambda_s\}$ або $p(\beta_k) \leq \min\{\mu_s, \lambda_{s-1}\}$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 4.** З умови 3 теореми 10 випливає, що якщо $\{\lambda_{\check{k}_s}\}_{-\check{\mathbf{n}},s\neq 0}^{\check{\mathbf{n}}}$ — підпослідовність послідовності $\{\lambda_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$ така, що кожне $\lambda_{\check{k}_s}$ збігається з деяким β_k, і $\{\mu_{\hat{k}_s}\}_{-\hat{\mathbf{n}},s\neq 0}^{\hat{\mathbf{n}}}$ — підпослідовність послідовності $\{\mu_k\}_{-n,k\neq 0}^{n}$ така, що кожне $\mu_{\hat{k}_s}$ збігається з деяким β_k, то $\{\mu_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ і $\{\lambda_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ утворюють неповну пару довжини, що не перевищує $\mathbf{n}$.

***Зауваження* 5.** Теорема 10 відрізняється від теореми 8 умовою 4, що гарантує задані значення $\mathbf{n}$ і n_j при $j = 1, 2, \ldots, q-1$.

***Зауваження* 6.** Оскільки твердження 1, 3 теореми 8 еквівалентні умовам 0, 1, 3 теореми 10, твердження 1 теореми 4 еквівалентне умові 2 теореми 10, а твердження теореми 7 збігається з умовою 4 теореми 10, умови теореми 10 є необхідними і достатніми.

Література

1. O. Boyko, O. Martynyuk, V. Pivovarchik, *On maximal multiplicity of eigenvalues of finite-dimensional spectral problem on a graph*, Methods Funct. Anal. and Topology, **25**, № 2, 104 – 117 (2019).
2. O. Boyko, V. Pivovarchik, *Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*, Methods Funct. Anal. and Topology, **14**, № 2, 159 – 167 (2008).
3. J. Genin, J. S. Maybee, *Mechanical vibrations trees*, J. Math. Anal. and Appl., **45**, 746 – 763 (1974).
4. G. Gladwell, *Inverse problems in vibration*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2004).
5. G. Gladwell, A. Morassi, *Matrix inverse eigenvalue problems*, Dynamical Inverse Problems: Theory and Appl., **529**, 1 – 29 (2011).
6. F. R. Gantmakher, M. G. Krein, *Oscillating matrices and kernels and vibrations of mechanical systems* (in Russian), GITTL, Moscow, Leningrad (1950); *English transl.*: Revised ed., AMS Chelsea Publ., Providence, RI (2002).
7. В. А. Марченко, *Введение в теорию обратных задач спектрального анализа*, Акта, Харків (2005).
8. A. Marshall, I. Olkin, B. Arnold, *Inequalities: Theory of majorization and its applications*, Second Ed., Springer, New York (2011).
9. M. Möller, V. Pivovarchik, *Damped star graphs of Stieltjes strings*, Proc. Amer. Math. Soc., **145**, № 4, 1717 – 1728 (2017).
10. M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs*, Operator Theory: Adv. and Appl., **283** (2020).
11. R. F. Muirhead, *Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **21**, 144 – 157 (1903).
12. V. Pivovarchik, N. Rozhenko, C. Tretter, *Dirichlet – Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*, Linear Algebra and Appl., **439**, № 8, 2263 – 2292 (2013).
13. V. Pivovarchik, C. Tretter, *Location and multiplicities of eigenvalues for a star graph of Stieltjes strings*, J. Difference Equat. and Appl., **21**, № 5, 383 – 402 (2015).
14. В. Пивоварчик, *Про мінімальну кількість різних власних значень у задачі на дереві зі стільтьєсівських струн*, Укр. мат. журн., **72**, № 1, 135 – 141 (2020).
15. L. Yang, G. Wei, V. Pivovarchik, *Direct and inverse spectral problems for a star graph of Stieltjes strings damped at a pendant vertex*, Inverse Problems and Imaging (2020).

Одержано 16.03.20