DOI: 10.37863/umzh.v73i1.2397

УДК 514.13, 515.12, 513.83, 517.5

А. В. Костін (Казан. федер. ун-т, Єлабуз. ін-т, Росія)

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТІНЬ У ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

We consider the problem of shadow in the Lobachevsky space. This problem can be treated as the problem of finding the conditions that ensure that the points belong to the generalized convex hull of a family of sets. We determine the boundary values of parameters, for which the same configurations of balls ensure that the point belongs to a generalized convex hull of balls in the Euclidean and hyperbolic spaces. In addition to balls, we consider families of horoballs, as well as combinations of balls and horoballs.

Розглянуто узагальнення задачі про тінь у гіперболічному просторі. Цю задачу можна розглядати як задачу про знаходження умов, які забезпечують належність точок до узагальнено опуклої оболонки сім'ї множин. Визначено граничні значення параметрів, при яких одні й ті ж конфігурації куль забезпечують належність точки до узагальнено опуклої оболонки куль в евклідовому й гіперболічному просторах. Крім куль розглянуто сім'ї орикуль, а також комбінації куль і орикуль.

1. Попередні відомості. Задачу про тінь в евклідовому просторі сформулював Г. Худайберганов у статті [1]:

яке мінімальне число попарно неперетинних куль із центрами на $(n-1)$-вимірній сфері n-вимірного евклідового простору й радіусом меншим за радіус сфери є достатнім для того, щоб будь-яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?

У роботі Г. Худайберганова цю задачу було розв'язано для двовимірного випадку. Доведено, що для того щоб будь-яка пряма, що проходить через центр кола, перетинала хоча б один із кругів із центрами на ній, достатньо двох кругів. Там же було висловлено припущення, що в n-вимірному випадку достатньо n куль. Це припущення виявилося помилковим. Розв'язанню цієї задачі й різнобічному розвитку ідей присвячено велику кількість робіт Ю. Б. Зелінського та його учнів і колег [2 – 11].

Повне розв'язання задачі в постановці Г. Худайберганова наведено в роботі [3]. У цій роботі показано, що для того щоб будь-яка пряма, що проходить через центр сфери n-вимірного евклідового простору, перетинала хоча б одну з куль із центрами на цій сфері, достатньо $(n+1)$-ї кулі радіуса меншого, ніж радіус сфери. При цьому якщо вимірність простору більша ніж два, то кулі не можуть бути одного радіуса. Аналогічна ситуація має місце і в просторі Лобачевського [15]. Означення узагальненої опуклості у просторі Лобачевського, що використовуються в роботі, будуть калькою відповідних означень для евклідового простору з робіт Ю. Б. Зелінського та його колег. Необхідні відомості з геометрії Лобачевського див. в [13, 14]. Кривину гіперболічного простору скрізь покладаємо рівною $K=-\dfrac{1}{\rho^2}$, де ρ — деяка додатна матеріальна стала.

Означення 1. *Множину U з n-вимірного простору Лобачевського H^n називають m-опуклою відносно довільної фіксованої точки $M\in H^n\backslash U$, якщо існує m-вимірна площина, яка проходить через точку M і не має з множиною U спільних точок.*

Перетин будь-якої сім'ї множин, m-опуклих відносно точки M, є m-опуклим відносно точки M.

Означення 2. *Множину $U \in H^n$, m-опуклу відносно кожної точки $M \in H^n \backslash U$, називають m-опуклою.*

Це означення також задовольняє аксіому опуклості: перетин m-опуклих множин теж є m-опуклим.

Означення 3. *Мінімальна m-опукла множина, що містить множину $U \in H^n$, називається m-опуклою оболонкою множини U.*

Узагальненням поняття m-опуклості є поняття m-напівопуклості.

Означення 4. *Множину U з n-вимірного простору Лобачевського H^n називають m-напівопуклою відносно довільної фіксованої точки $M \in H^n \backslash U$, якщо існує m-вимірна півплощина, що проходить через точку M і не має з множиною U спільних точок.*

Означення 5. *Множину $U \in H^n$, m-напівопуклу відносно кожної точки $M \in H^n \backslash U$, називають m-напівопуклою. Мінімальну m-напівопуклу множину, що містить множину $U \in H^n$, називають m-напівопуклою оболонкою множини U.*

2. Основні результати. У теоремах 1 – 4 цієї роботи встановлено мінімальну кількість кругів і орикругів на гіперболічній площині, необхідну й достатню для належності точки до 1-опуклої або 1-напівопуклої оболонки кругів або орикругів відповідно. Для випадку з кругами зазначена точка є центром кола, на якому лежать центри кругів. У теоремах 5 – 7 визначено умови, при яких точка O в тривимірному просторі Лобачевського належить 1-опуклій оболонці куль, центри яких розташовані на двох відстанях від точки O, зокрема якщо одна з відстаней стає нескінченною, то кулі замінюються орикулями, а також визначено умови, коли точка належить 1-опуклій оболонці комбінації куль і орикуль. У теоремі 8 оцінено число орикуль, достатнє для належності точки до їхньої 1-напівопуклої оболонки у тривимірному просторі Лобачевського.

3. Належність точки до узагальнено опуклої оболонки на площині Лобачевського.

Означення 6. *Орициклом називається лінія, яка ортогонально перетинає в'язку паралельних прямих на гіперболічної площині. Орикругом* [12] *називається частина площини Лобачевського, обмежена орициклом.*

Всі орицикли на гіперболічній площині кривини $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ мають однакову кривину $\dfrac{1}{\rho}$ і поєднуються рухами гіперболічної площини. У зв'язку з цим задача про тінь для орикругів є одним з аналогів задачі про тінь для кругів одного й того ж радіуса. Коло, на якому лежать центри кругів, що утворюють тінь, переходить у межу на нескінченності гіперболічної площини. У стандартних моделях Келі – Клейна й Пуанкаре ця межа є абсолютом.

У роботі [3] наведено ще одне доведення того факту, що для розв'язання задачі про тінь на евклідовій площині достатньо двох кругів. Це доведення у [15] поширено на гіперболічну площину, тобто справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай S^1 — коло радіуса R на площині Лобачевського H^2 і N — мінімальне число відкритих (замкнених) неперетинних кругів у H^2, що мають центри на S^1, радіуси, менші ніж R, і таких, що центр S^1 належить їхній 1-опуклій оболонці. Тоді $N = 2$.*

У гіперболічній геометрії стандартні евклідові конструкції допускають природні узагальнення (див., наприклад, [15, 16]). Граничним переходом, спрямовуючи до нескінченності радіус кола, на якому лежать центри кругів, що утворюють тінь, можна було б отримати відповідне теоремі 1 твердження для орикругів. Наведемо інше розв'язання цієї задачі.

Теорема 2. *Нехай M — довільна фіксована точка на площині Лобачевського і $N(M)$ — мінімальне число відкритих (замкнених) неперетинних орикругів таких, що M належить їхній 1-опуклій оболонці. Тоді $N(M) = 2$.*

Доведення. Орикруг є опуклою, в стандартному розумінні цього терміна, множиною. Тому одного орикруга для утворення тіні в точці M недостатньо. Проведемо через точку M пару неортогональних прямих. У два суміжних кути, що утворені ними, впишемо по орикругу. Відстань від точки M до орикруга, вписаного в кут α, дорівнює $-\rho \ln \left|\sin \dfrac{\alpha}{2}\right|$. Два замкнених орикруги, вписані в нерівні суміжні кути, утворюють тінь у точці M. Трохи наблизимо один з орикругів до точки M, зсунувши його по осі, що проходить через M, так, щоб він не перетнувся з другим орикругом. Ця мінімальна конфігурація забезпечує належність точки M до 1-опуклої оболонки двох відкритих орикругів.

***Зауваження* 1.** Граничні орицикли двох неперетинних орикругів мають загальну вісь, що проходить через їхні невласні центри на нескінченності. Вони ортогональні до цієї осі й звернені опуклостями у протилежні сторони. Тому їх завжди можна наблизити так, щоб вони лишилися неперетинними. Теорему 1 можна було б довести аналогічно до теореми 2.

Належність точки M до 1-напівопуклої оболонки сім'ї множин означає, що кожен промінь із початком у M перетинається хоча б з однією множиною з сім'ї.

Теорема 3. *Нехай M — довільна фіксована точка на площині Лобачевського H^2 і $N_s(M)$ — мінімальне число відкритих (замкнених) неперетинних орикругів таких, що M належить їхній 1-напівопуклій оболонці. Тоді $N_s(M) = 3$.*

Доведення. Орикруг як опукла множина не може перекрити розгорнутий кут із вершиною в точці M. Тому двох орикругів недостатньо, щоб кожен промінь із початком у точці M перетинався хоча б із одним з орикругів. Проведемо з точки M три промені, що утворюють три різних кути $\alpha > \beta > \gamma$, менші за розгорнутий. Впишемо в кожен із утворених кутів по орикругу. Для замкнених орикругів ця конфігурація забезпечує належність точки M — початку променів — до 1-напівопуклої оболонки орикругів. Трохи зсунувши два з орикругів по осях, що проходять через точку M, у сторону цієї точки так, щоб три орикруги все ще залишалися попарно неперетинними, переконаємося, що трьох відкритих орикругів достатньо для того, щоб точка M належала їхній 1-напівопуклій оболонці.

У статті [9] (див. також [3]) доведено, що для того щоб центр кола S^1 на евклідовій площині належав 1-напівопуклій оболонці відкритих (замкнених) кругів, що мають радіуси, менші за радіус кола S^1, і центри на цьому колі, достатньо трьох кругів. Для доведення центри кругів розташовуємо у вершинах гострокутного різнобічного трикутника зі сторонами a, b, c. Їхні радіуси беремо рівними $p - a$, $p - b$, $p - c$, де p — півпериметр. Потім сторони трикутника зв'язуємо з радіусом описаного кола і за допомогою програми Derive показуємо, що необхідне співвідношення між сторонами, при якому круги не захоплюють центра кола S^1, реалізовано. Подібне розв'язання для площини Лобачевського є громіздким, оскільки півпериметр, радіус описаного кола і сторони трикутника будуть аргументами гіперболічних функцій. Проте міркування, аналогічні доведенню теореми 3, відразу дають потрібний результат.

Теорема 4. *Нехай S^1 — коло радіуса R на площині Лобачевського H^2 і N_s — мінімальне число відкритих (замкнених) неперетинних кіл у H^2, що мають центри на S^1, радіуси, менші за R, і таких, що центр S^1 належить їхній 1-напівопуклій оболонці. Тоді $N_s = 3$.*

Доведення. Нехай точка O є центром кола $S^1 \in H^2$. Проведемо три промені з початком у точці O, що утворюють кути

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad \alpha_1 < \pi.$$

Кути можуть мало відрізнятися від $2\pi/3$. Впишемо в кожен із утворених кутів по колу з центром на S^1. Замкнені круги, обмежені цими колами, не перетинаються і забезпечують належність центра кола S^1 до 1-напівопуклої оболонки кругів. Відстань між парою таких кругів

$$2\rho \cdot \operatorname{arsinh}\Big(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_j}{4}\Big) - \rho \cdot \operatorname{arsinh}\Big(\sin\frac{\alpha_i}{2}\Big) - \rho \cdot \operatorname{arsinh}\Big(\sin\frac{\alpha_j}{2}\Big)$$

не невід'ємна й могла б дорівнювати нулю лише за умови $\alpha_i = \alpha_j$, що при нашому виборі променів неможливо. Тому завжди є можливість трохи збільшити радіуси кругів так, щоб і неперетинні відкриті круги забезпечували належність центра O кола S^1 до їхньої 1-напівопуклої оболонки. При цьому достатньо збільшити радіуси двох кругів.

4. Належність точки до 1-опуклої оболонки куль і орикуль у тривимірному просторі Лобачевського. Якщо центри куль лежать на одній сфері S^2 з центром у точці O в тривимірному просторі Лобачевського, то для належності точки O до 1-опуклої оболонки куль потрібно, як і в тривимірному евклідовому просторі, чотири кулі [15]. Доведення цього факту повністю аналогічне евклідовому. Якщо центри куль, що утворюють тінь, не розміщувати на одній сфері, а дозволити дві можливі відстані від них до точки O, то число куль, що утворюють тінь, можна зменшити.

Теорема 5. *Нехай O — довільна фіксована точка у просторі Лобачевського H^3 і $N(O)$ — мінімальне число відкритих (замкнених) неперетинних куль, що не містять точку O і таких, що O належить їхній 1-опуклій оболонці. Тоді $N(O) = 3$. При цьому існують конфігурації, в яких центри куль, що утворюють тінь, розташовані на двох сферах із центром у точці O.*

Доведення. Оскільки кулі у просторі Лобачевського опуклі, як і в евклідовому просторі, двох куль для утворення тіні недостатньо. Спочатку розташуємо одну кулю B_1 досить малого радіуса r_1 таким чином, щоб точка O лежала на сфері, що обмежує цю кулю. Через точку O проведемо площину, що дотикається до сфери. У дотичній площині через точку O проведемо пару неортогональних прямих l і m. Впишемо в два суміжних кути, утворені прямими l і m, по колу так, щоб їхні центри були віддалені на відстань R від точки O. Побудуємо дві кулі B_2 і B_3 так, щоб ці кола були великими колами на їхніх граничних сферах. Трохи збільшимо радіус однієї з куль B_2 або B_3. Очевидно, що при достатньо малому r_1 відкриті кулі B_1, B_2 і B_3 не перетинатимуться і забезпечать належність точки O до їхньої 1-опуклої оболонки. Далі, трохи зменшивши радіус першої кулі і, за необхідності, збільшивши ще радіус однієї з решти куль, переконаємося, що трьох неперетинних замкнених куль, що не містять точку O, достатньо для того, щоб кожна пряма, що проходить через цю точку, перетиналася хоча б із однією з цих куль.

З'ясуємо, в яких межах у зазначеній конфігурації куль може змінюватися радіус кулі B_1, якщо більший із кутів, утворених прямими l і m, дорівнює α, а центри двох куль, що залишилися, віддалені від точки O на відстань R.

Нехай у кут величиною α вписано екватор кулі B_2 з радіусом r_2 і центром у точці O_2. У прямокутному трикутнику O_1OO_2 маємо

$$\cosh\frac{r_1+r_2}{\rho} = \cosh\frac{r_1}{\rho}\cosh\frac{R}{\rho}.$$

Звідси

$$\tanh\frac{r_1}{\rho} = \frac{\cosh\dfrac{R}{\rho} - \cosh\dfrac{r_2}{\rho}}{\sinh\dfrac{r_2}{\rho}}.$$

Позначимо через T точку дотику кулі B_2 з однією з прямих l і m. Трикутник OTO_2, очевидно, також є прямокутним. У цьому трикутнику

$$\sinh\frac{OT}{\rho}=\sinh\frac{OO_2}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Враховуючи введені позначення, цю рівність записуємо так:

$$\sinh\frac{r_2}{\rho}=\sinh\frac{R}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Використовуючи останнє співвідношення, отримуємо

$$\tanh\frac{r_1}{\rho}=\frac{\cosh\dfrac{R}{\rho}-\sqrt{1+\sinh^2\dfrac{R}{\rho}\sin\dfrac{\alpha}{2}}}{\sinh\dfrac{R}{\rho}\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Таким чином, верхня межа для радіуса кулі B_1 дорівнює

$$\rho\,\mathrm{artanh}\left(\frac{\cosh\dfrac{R}{\rho}-\sqrt{1+\sinh^2\dfrac{R}{\rho}\sin\dfrac{\alpha}{2}}}{\sinh\dfrac{R}{\rho}\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right).$$

У статті [11] знайдено умови, що забезпечують належність центра O еліпсоїда обертання до 1-опуклої оболонки куль із центрами на цьому еліпсоїді. Крім того, показано, що якщо відношення більшої півосі еліпса до меншої більше ніж $2\sqrt{2}$, то три відкриті (замкнені) кулі з центрами на еліпсоїді, отриманому обертанням еліпса навколо більшої осі, дають розв'язання цієї задачі. Розглянута вище конфігурація куль у тривимірному просторі Лобачевського H^3 в границі дасть те ж саме співвідношення відстаней до точки $O\in H^3$ від центрів трьох куль, тобто відношення радіусів двох сфер. Центри куль, що утворюють тінь, при цьому також будуть лежати на еліпсоїді обертання. Але, щоб не міняти вигляд конфігурації, еліпсоїд буде одержано обертанням еліпса навколо меншої осі. Нехай, як і вище, центр кулі $B_1(O_1,r_1)$ віддалений від точки O на відстань r_1. Граничні значення радіусів двох інших куль і відстані до їхніх центрів отримаємо з умови, що кожен із них перекриває кут $\pi/2$ в площині, що проходить через точку O перпендикулярно до O_1O. Оскільки в даній граничній конфігурації величина кута $\alpha=\pi/2$, з прямокутного трикутника O_1TO_2 отримуємо такі залежності:

$$\tanh\frac{O_2T}{\rho}=\sinh\frac{OT}{\rho}$$

і

$$\sinh\frac{OO_2}{\rho}=\sqrt{2}\sinh\frac{OT}{\rho},$$

де $OT=r_2$, $OO_2=R$. Враховуючи дотик куль, у прямокутному трикутнику O_1OO_2 маємо, як і вище, $O_1O_2=r_1+r_2$ і

$$\tanh\frac{r_2}{\rho}=\sinh\frac{2r_1}{\rho}.$$

Звідси випливає, що $OT=2r_1$ (в евклідовому просторі, очевидно, в аналогічній конфігурації відстань OT дорівнювала б радіусу r_2 другої кулі). В результаті отримуємо

$$\sinh\frac{OO_2}{\rho}=\sqrt{2}\sinh\frac{2r_1}{\rho}.$$

Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 6. *Нехай a — більша, b — менша піввісь еліпса з центром у точці O і*

$$\frac{\sinh\dfrac{a}{\rho}}{\sinh\dfrac{2b}{\rho}}>\sqrt{2};$$

еліпсоїд отримано обертанням еліпса навколо меншої осі в тривимірному просторі Лобачевського H^3. Тоді мінімальне число неперетинних куль із центрами на еліпсоїді, що не містять точку O і таких, що O належить їхній 1-опуклій оболонці, дорівнює трьом. При цьому можливі всі варіанти комбінацій відкритих і замкнених куль: всі кулі можуть бути відкритими, замкненими, або частина відкритими, а частина замкненими.

Граничне значення $\sqrt{2}$ співвідношення гіперболічних синусів довжин відрізків a і $2b$ досягається в цій конфігурації тоді, коли куля B_1 і одна з решти куль B_2 або B_3 відкриті, а третя куля замкнена. Очевидно, якщо a і b малі порівняно з ρ, то, з огляду на головні частини нескінченно малих, отримуємо в граничному випадку співвідношення $a=2\sqrt{2}b$, що має місце в евклідовому просторі.

***Зауваження* 2.** У задачах гіперболічної геометрії вкрай рідкісні нетривіальні раціональні залежності між довжинами відрізків. Як правило, залежності, що зустрічаються, трансцендентні, а раціональні залежності наочні й належать до абсолютної геометрії, а не власне гіперболічної. Не дивно, що й у розглянутій конфігурації співвідношення $OT=2r_1$, не очевидне з точки зору геометрії гіперболічного простору, також належить до абсолютної геометрії, тобто не залежить від аксіоми паралельності.

В евклідовому просторі радіус кулі B_1 в розглядуваній конфігурації може бути як завгодно великим; важливо лише, щоб зберігалося співвідношення відрізків. У просторі Лобачевського ситуація буде іншою.

Означення 7. *Орисферою називають поверхню, що ортогонально перетинає в'язку паралельних прямих у гіперболічному просторі. Орикульою називають область простору Лобачевського, обмежену орисферою.*

Спрямовуючи відстань від точки O до центрів куль B_2 і B_3 до нескінченності, а точніше, віддаляючи в нескінченність центри куль B_2 і B_3, в границі конфігурацію з трьох куль замінюємо кулею й двома орикулями. Тобто справджується таке твердження.

Теорема 7. *Нехай O — довільна фіксована точка в тривимірному просторі Лобачевського H^3. Тоді існують конфігурації з однієї кулі, радіус якої обмежений зверху числом $\frac{\rho}{2}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)$, і двох орикуль, що не містять O. Ці конфігурації забезпечують належність точки O до 1-опуклої оболонки куль і орикуль.*

Доведення. Граничне значення радіуса кулі B_1 можна визначити або з рівності

$$\tanh\frac{r_2}{\rho}=\sinh\frac{2r_1}{\rho},$$

спрямовуючи r_2 до нескінченності, або незалежно, вважаючи, що відрізок OT відповідає куту паралельності $\pi/4$. Решта є очевидним. Граничне ж значення досягається лише у випадку, коли куля й одна з орикуль відкриті, а друга орикуля замкнена. У конфігурації з трьох куль граничне значення $\dfrac{\rho}{2}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)$ радіуса кулі B_1 не досягається.

5. Належність точки до 1-напівопуклої оболонки орикуль у тривимірному просторі Лобачевського. Оцінимо зверху число орикуль, яке гарантуватиме належність точки до їхньої 1-напівопуклої оболонки. Нехай дві орикулі Ω_1, Ω_2 дотикаються в точці O. Якщо орикулі Ω_1, Ω_2 відкриті, то з променів із початком у точці O не перетинаються з ними тільки промені, що лежать у площині, яка дотикається до граничних орисфер орикуль у точці O. Ця площина перпендикулярна до загальної осі граничних орисфер. Позначимо цю площину через Σ. Нехай орикуля Ω_3 має невласний центр у нескінченно віддаленій точці площини Σ і дотикається до орикуль Ω_1, Ω_2. Орикуля Ω_3 перетинається з площиною Σ по орикругу ω_3. З'ясуємо, під яким кутом видно цей орикруг із точки O. Це дозволить визначити, яке число орикуль із невласними центрами в нескінченно віддалених точках площини Σ потрібно розмістити, щоб кожен промінь із початком у точці O перетинався хоча б із однією з орикуль сім'ї. Орикруг ω_3 видно з точки O під тим же кутом, що й будь-який інший орикруг, який одержується при перетині орикулі Ω_3 площинами, що проходять через точку O і невласний центр орикулі Ω_3. Якщо січна площина проходить через невласні центри орикуль Ω_1, Ω_2, Ω_3, то вона перетинає їхні граничні орисфери по орициклах, що дотикаються. Неважко показати, що з точки O третій орицикл видно під кутом $\pi/3$. Отже, можна розмістити шість орикуль з невласними центрами, що дотикаються, в нескінченно віддалених точках площини Σ, які будуть дотикатись орикуль Ω_1, Ω_2. Це ж саме можна було б отримати, використавши елементарні геометричні міркування. Розглянемо модель Пуанкаре тривимірного простору Лобачевського з метрикою

$$ds^2 = \rho^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{y^2}.$$

Орисфери в цій моделі зображуються евклідовими площинами, паралельними площині абсолюту $z = 0$, і евклідовими сферами, що дотикаються до абсолюту. Очевидно, що коли як орикулю Ω_1 взяти орикулю $z \geq c$, а як орикулю Ω_2 — орикулю, що дотикається до неї, то навколо орикулі Ω_2 можна розмістити ще шість орикуль, що дотикаються до орикулі Ω_1, або навколо однієї більярдної кулі на столі розмістити шість куль, що дотикаються до неї.

Теорема 8. *Нехай O — довільна фіксована точка в тривимірному просторі Лобачевського H^3. Нехай $N_s(O)$ — мінімальне число одночасно відкритих* (*одночасно замкнених*) *неперетинних орикуль*, *що не містять точку O і таких*, *що O належить їхній 1-напівопуклій оболонці*, *$N'_s(O)$ — мінімальне число відкритих або замкнених неперетинних орикуль*, *що не містять точку O і таких*, *що O належить їхній 1-напівопуклій оболонці. Тоді $N_s(O) \leq 9$, $N'_s(O) \leq 8$.*

Доведення. Якщо орикулі Ω_1, Ω_2 в розглянутій вище конфігурації відкриті, а з решти шести орикуль три попарно неперетинні орикулі відкриті, а три — замкнені, то кожен промінь із початком у точці O, що не належить сім'ї з восьми орикуль, буде перетинатися з однією з орикуль сім'ї. Нехай тепер всі орикулі сім'ї відкриті (або всі орикулі замкнені). У площині Σ проведемо сім променів, що утворюють кути різної величини. При цьому достатньо, щоб сусідні кути були різними, а більший із кутів був менший ніж $\pi/3$. Візьмемо сім орикуль з невласними центрами в площині Σ, що дотикаються до цих променів. Трохи віддаливши від точки O орикулі Ω_1, Ω_2 і трохи наблизивши ті, що залишилися, переконаємося, що кожен промінь із початком у точці O буде перетинатися хоча б із однією відкритою (замкненою) орикульою з обраної сім'ї орикуль.

Зауваження 3. У розглянутій конфігурації з орикульою перетинається кожен промінь із початком у точці O, що лежить всередині дотичного конуса до граничної орисфери. Внутрішня геометрія на цьому конусі має ту ж кривину, що й простір, в який він вкладений. Якщо тепер точку O віддаляти від орисфери по її осі в нескінченність, то в границі його твірні стануть паралельними. Частина отриманої поверхні до лінії, по якій вона дотикається до орисфери, ізометрична воронці Бельтрамі – Мiндінга. Частина, що залишилася, вкладається у тривимірний псевдоевклідів простір у вигляді одного з аналогів псевдосфери (див., наприклад, [17]).

6. Заключні зауваження. У статті [3] за допомогою аналогічної конфігурації куль в евклідовому просторі доведено, що для того щоб центр сфери належав 1-напівопуклій оболонці куль, достатньо десяти куль із центрами на цій сфері, які не містять центра сфери. Ситуація з орикулями наводить на думку, що якщо радіус сфери $S^2 \in H^3$ буде більший за певне значення R_0, то для належності центра сфери до 1-напівопуклої оболонки куль буде достатньо дев'яти відкритих або замкнених куль із центрами на цій сфері. Якщо ж радіус сфери буде менший за R_0, то в цій конфігурації буде потрібно десять куль, як і в евклідовому просторі. Можна показати, що це значення R_0 наближено дорівнює $\rho \cdot 0{,}185773$. У двовимірному випадку в задачі про належність усіх точок всередині кола до 1-опуклої оболонки кругів із центрами на ній зі збільшенням радіуса кола повинно збільшуватися число кругів [15]. Тут же ми маємо протилежний ефект.

Література

1. Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров*, Деп. в ВИНИТИ, **21**, 1772 – 1185 (1982).
2. Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил, *Задача о тени и смежные задачи*, Proc. Int. Geom. Cent., **9**, № 3-4, 50 – 58 (2016).
3. И. Ю. Выговская, Ю. Б. Зелинский, М. В. Стефанчук, *Обобщенно выпуклые множества и задача о тени*, Укр. мат. журн., **67**, № 12, 1658 – 1666 (2015).
4. Ю. Б. Зелинский, М. В. Стефанчук, *Узагальнення задачі про тінь*, Укр. мат. журн., **68**, № 6, 757 – 762 (2016).
5. Y. B. Zelinskii, *Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow*, J. Math. Sci., **211**, № 5, 710 – 717 (2015).
6. Y. B. Zelinskii, *Problem of shadow (complex case)*, Adv. Math., **5**, № 1, 1 – 5 (2016).
7. Y. B. Zelinskii, *The problem of the shadows*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform., **66**, № 1, 37 – 42 (2016).
8. Ю. Б. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, 197 – 204 (2015).
9. Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук, *Задача о тени*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., № 5, 15 – 19 (2015).
10. Т. М. Осипчук, М. В. Ткачук, *Задача о тени для областей в евклидовых пространствах*, Укр. мат. вісн., **13**, № 4, 532 – 542 (2016).
11. М. В. Ткачук, Т. М. Осипчук, *Задача о тени для эллипсоида вращения*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 3, 243 – 250 (2015).
12. Ж. Кайдасов, Е. В. Шикин, *Об изометрическом погружении в E^3 выпуклой области плоскости Лобачевского, содержащей два орикруга*, Мат. заметки, **39**, № 4, 612 – 617 (1986).
13. Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, Москва (1969).
14. Н. М. Несторович, *Геометрические построения в плоскости Лобачевского*, Гостехтеориздат, Москва; Ленинград (1951).
15. А. В. Костин, *Задача о тени в пространстве Лобачевского*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1525 – 1532 (2018).
16. A. V. Kostin, I. K. Sabitov, *Smarandache theorem in hyperbolic geometry*, Math. Phys., Anal. and Geom., **10**, № 2, 221 – 232 (2014).
17. А. В. Костин, *Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях*, Владикавказ. мат. журн., **21**, № 1, 16 – 26 (2019).

Одержано 11.03.20