DOI: 10.37863/umzh.v73i2.6321

УДК 512.64

В. П. Щедрик (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЛІВИЙ НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І ЛІВЕ НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ ВСІХ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ $BX = A$ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

The explicit form of the left greatest common divisor and the left least common multiple of all solutions to the solvable matrix equation $BX = A$ over a commutative domain of elementary divisors is given. It is proved that they are solutions too.

Над комутативною областю елементарних дільників вказано явний вигляд лівого найбільшого спільного дільника і лівого найменшого спільного кратного всіх коренів розв'язного матричного рівняння $BX = A$ і доведено, що вони також є розв'язками цього рівняння.

Дослідження розв'язків лінійних матричних рівнянь розпочалось у другій половині XIX століття роботами Сильвестра. За довгу історію вивчення цього питання було розроблено низку аналітичних і наближених методів, а також алгоритмів їхнього пошуку. У цих дослідженнях активно використовувались поняття узагальнено-оберненої матриці Мура – Пенроуза і кронекерівського добутку матриць. При цьому, поряд із задачею пошуку розв'язків таких рівнянь, розглядалося питання виокремлення серед них таких, що мають певні наперед задані властивості. Зокрема, розв'язки з умовою симетрії досліджувалися в [1 – 3], ермітові додатно визначені — у [4, 5], з мінімальним рангом — у [6], діагональні і трикутні — у [7].

У цій статті досліджується лінійне матричне рівняння $BX = A$ над комутативною областю елементарних дільників R [8], тобто комутативною областю, над якою кожна матриця еквівалентна діагональній матриці, кожний діагональний елемент якої (інваріантний множник) ділить наступний. До класу кілець елементарних дільників належать евклідові кільця, кільця головних ідеалів, кільця цілих аналітичних функцій, кільце неперервних дійсних функцій над цілком регулярним гаусдорфовим простором, кільце цілих алгебраїчних чисел, адекватні кільця, кільце формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел із вільним цілим членом. З оглядом бібліографії, що стосується таких кілець, можна ознайомитись у [9, 10].

Згідно з теоремою 2 з [11, с. 218], рівняння $BX = A$ має розв'язок тоді й тільки тоді, коли інваріантні множники матриць B та $\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$ збігаються. Для пошуку коренів розв'язного рівняння можна використати, зокрема, метод, запропонований у теоремі 1 із [11, с. 215].

Будемо розглядати корені рівняння $BX = A$ з точки зору факторизації матриць. Припустимо, що рівняння $BX = A$ розв'язне. Отже, існує така матриця C, що $A = BC$. Це означає, що матриця B є лівим дільником матриці A. Правильним буде й обернене твердження. Таким чином, матричне рівняння $BX = A$ розв'язне тоді й тільки тоді, коли матриця B є лівим дільником матриці A. Тому корені цього рівняння є частками від ділення матриці A зліва на матрицю B. Структуру цих часток описано в [12, 13]. У кільці R частка від ділення елемента a на b позначається як $\dfrac{a}{b}$. Проте вже в кільці матриць над R символ $\dfrac{A}{B}$ не має сенсу. Основною причиною цього є те, що ця частка не завжди визначена однозначно. У зв'язку з цим природно постає питання вибору серед коренів рівняння $BX = A$ в деякому сенсі „твірного".

Роль такого елемента може відігравати лівий найбільший спільний дільник (н.с.д.) (означення див. нижче) всіх його коренів, оскільки в кільці матриць над R він визначений однозначно з точністю до правої асоційованості (це випливає з теореми 1.11 із [12]). Тоді постає питання про те, чи лівий н.с.д. коренів рівняння $BX = A$ знову є його коренем. У пропонованій роботі отримано повну відповідь на нього: лівий н.с.д. всіх коренів розв'язного матричного рівняння $BX = A$ над комутативною областю елементарних дільників знову є його коренем. Водночас показано, що й ліве найменше спільне кратне (н.с.к.) коренів цього рівняння має таку ж властивість.

Якщо $A = BC$, то говоритимемо, що матриця A є правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ і $B = DB_1$, то матрицю D називатимемо лівим спільним дільником матриць A і B. Окрім цього, якщо матриця D є правим кратним кожного лівого спільного дільника матриць A і B, то її називатимемо **лівим н.с.д**. матриць A і B.

Якщо $S = MT = NK$, то матрицю S називатимемо спільним лівим кратним матриць T і K. Якщо ж матриця S є правим дільником кожного правого спільного кратного матриць T і K, то називатимемо її **лівим н.с.к.** матриць T і K.

У цій статті R — комутативна область елементарних дільників.

Теорема. *Лівий н.с.д. і ліве н.с.к. коренів розв'язного матричного рівняння* $BX = A$, *де* $A, B \in M_n(R)$, *знову є його розв'язками.*

Доведення. Запишемо матриці A, B у вигляді

$$A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}, \qquad \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \qquad \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

$$B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}, \qquad \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0), \qquad \varphi_j | \varphi_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, t-1,$$

де $P, P_B, Q, Q_B \in GL_n(R)$. Згідно з теоремою 4.1 із [12], матриця B є лівим дільником матриці A тоді й тільки тоді, коли $P_B = LP$, де $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$,

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \{L \in \mathrm{GL}_n(R) | \ \exists\ S \in M_n(R) : \ L\mathrm{E} = \Phi S\}.$$

З огляду на теорему 4.6 із [12] отримуємо, що $t \geq k$, причому $\varphi_i | \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, k$. На підставі теореми 4.5 із [12] множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$L = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & L_3 \\ L_2 & L_4 \\ \mathbf{0} & L_5 \end{array} \right\|,$$

де

$$L_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1.k-1} & l_{1k} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2.k-1} & l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_1)} l_{k1} & \dfrac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_2)} l_{k2} & \ldots & \dfrac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_{k-1})} l_{k.k-1} & l_{kk} \end{array} \right\|,$$

$$L_2 = \left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_1)} l_{k+1.1} & \ldots & \dfrac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_k)} l_{k+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_1)} l_{t1} & \ldots & \dfrac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_k)} l_{tk} \end{array} \right\|,$$

L_3, L_4, L_5 — довільні матриці відповідних розмірів.

Згідно з теоремою 4.2 із [12], матриця B має вигляд $B = (LP)^{-1}\Phi U^{-1}$, де $U \in \mathrm{GL}_n R$. Матриця L задовольняє рівність

$$L\mathrm{E} = \Phi S, \tag{1}$$

де $S \in M_n(R)$. Звідси випливає, що $\mathrm{E} = L^{-1}\Phi S$. Отже,

$$A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1} = P^{-1}(L^{-1}\Phi S)Q^{-1} = (LP)^{-1}\Phi SQ^{-1} =$$

$$= ((LP)^{-1}\Phi U^{-1})(USQ^{-1}) = BC,$$

де $C = USQ^{-1}$. Таким чином, C є коренем рівняння $BX = A$.

Нехай C_1 — інший корінь рівняння $BX = A$, тобто $BC_1 = A$. Тоді

$$A = BC_1 = BC \quad \Rightarrow \quad B(C_1 - C) = \mathbf{0}.$$

Позначимо через $\mathrm{Ann}_r(B)$ множину правих анулярторів матриці B. Тоді $C_1 - C = F \in \mathrm{Ann}_r(B)$, тобто

$$C_1 = C + F \quad \Rightarrow \quad C_1 \in (C + \mathrm{Ann}_r(B)).$$

Навпаки, нехай $C_2 \in (C + \mathrm{Ann}_r(B))$, тобто $C_2 = C + N$, де $N \in \mathrm{Ann}_r(B)$. Тоді

$$BC_2 = B(C + N) = BC + BN = A + \mathbf{0} = A.$$

Отже, множина $C + \mathrm{Ann}_r(B)$ складається з розв'язків рівняння $BX = A$. Таким чином, множина $C + \mathrm{Ann}_r(B)$ є множиною всіх розв'язків рівняння $BX = A$.

На підставі теореми 1.15 із [12] і того, що $B = V^{-1}\Phi U^{-1}$, приходимо до висновку, що множина $\mathrm{Ann}_r(B)$ складається з усіх матриць вигляду

$$U \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0}_{t\times n} \\ D \end{array} \right\|,$$

де $\mathbf{0}_{t\times n}$ — нульова $(t \times n)$-матриця, D — довільна матриця з $M_{(n-t)\times n}(R)$.

Матриця S, що фігурує в рівності (1), як це випливає з доведення теореми 4.5 із [12], має вигляд

$$S = \left\| \begin{array}{cc} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ M_3 & M_4 \end{array} \right\|,$$

де $\left\|\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\|$ — $(t \times k)$-підматриця матриці S і $\left\|\begin{matrix} M_3 & M_4 \end{matrix}\right\|$ — довільна матриця з $M_{(n-t)\times n}(R)$. Отже,

$$C + \operatorname{Ann}_r(B) = USQ^{-1} + U\left\|\begin{matrix} \mathbf{0}_{t\times n} \\ D \end{matrix}\right\| =$$

$$= U\left(S + \left\|\begin{matrix} \mathbf{0}_{t\times n} \\ DQ \end{matrix}\right\|\right)Q^{-1} = U\left(S + \left\|\begin{matrix} \mathbf{0}_{t\times n} \\ D_1 \end{matrix}\right\|\right)Q^{-1},$$

де $D_1 = DQ$. Оскільки Q — оборотна матриця, то

$$M_{(n-t)\times n}(R)Q = M_{(n-t)\times n}(R).$$

Тому D_1 — довільна матриця з $M_{(n-t)\times n}(R)$. Отже,

$$C + \operatorname{Ann}_r(B) = U\left(\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ M_3 & M_4 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} \mathbf{0}_{t\times n} \\ D_1 \end{matrix}\right\|\right)Q^{-1} =$$

$$= U\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ T_3 & T_4 \end{matrix}\right\|Q^{-1}, \tag{2}$$

де $\left\|\begin{matrix} T_3 & T_4 \end{matrix}\right\|$ — довільна матриця з $M_{(n-t)\times n}(R)$. Таким чином, усі розв'язки рівняння $BX = A$ мають вигляд (2). Ця множина містить матрицю

$$U\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-t} \end{matrix}\right\|Q^{-1} = F,$$

де I_{n-t} — одинична матриця порядку $n - t$. Отже, F — корінь рівняння $BX = A$.

Виконується рівність

$$U\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ T_3 & T_4 \end{matrix}\right\|Q^{-1} = \left(U\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-t} \end{matrix}\right\|Q^{-1}\right)\left(Q\left\|\begin{matrix} I_t & \mathbf{0} \\ T_3 & T_4 \end{matrix}\right\|Q^{-1}\right) = FM,$$

тобто матриця F є лівим дільником усіх елементів множини $C + \operatorname{Ann}_r(B)$. Беручи до уваги, що $F \in (C + \operatorname{Ann}_r(B))$, приходимо до висновку, що F є лівим н.с.д. усіх елементів цієї множини.

Розглянемо матрицю

$$K = U\left\|\begin{matrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|Q^{-1},$$

яка також є елементом множини $C + \operatorname{Ann}_r(B)$, а отже, і коренем рівняння $BX - A$. Справджується рівність

$$K = \left(U \left\| \begin{array}{cc} I_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| U^{-1} \right) \left(U \left\| \begin{array}{cc} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ T_3 & T_4 \end{array} \right\| Q^{-1} \right),$$

тобто матриця K є лівим кратним усіх елементів множини $C + \mathrm{Ann}_r(B)$. Зважаючи на те, що $K \in (C + \mathrm{Ann}_r(B))$, приходимо до висновку, що K є лівим н.с.к. усіх елементів цієї множини.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Множиною всіх розв'язків розв'язного рівняння $BX = A$ є множина*

$$\left(U \left\| \begin{array}{cc} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-t} \end{array} \right\| Q^{-1} \right) \left(Q \left\| \begin{array}{cc} I_t & \mathbf{0} \\ T_3 & T_4 \end{array} \right\| Q^{-1} \right),$$

де $\left\| \begin{array}{cc} T_3 & T_4 \end{array} \right\|$ — довільна матриця з $M_{(n-t)\times n}(R)$.

***Наслідок* 2.** *Лівим н.с.д. і лівим н.с.к. усіх розв'язків розв'язного рівняння $BX = A$ є відповідно матриці*

$$U \left\| \begin{array}{cc} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-t} \end{array} \right\| Q^{-1}, \quad U \left\| \begin{array}{cc} M_1 & \mathbf{0} \\ M_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| Q^{-1}.$$

***Приклад*.** Нехай $R = \mathbb{Z}$. Розглянемо матричне рівняння

$$BX = A, \tag{3}$$

де

$$B = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad A = \mathrm{diag}(1,\ 2,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Залишимося у позначеннях щойно доведеної теореми. Матриця A збігається зі своєю формою Сміта E. Тому $P = Q = I_7$. Запишемо матрицю B у вигляді $B = P_B^{-1}\Phi$, де

$$P_B^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \Phi = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12,\ 0,\ 0).$$

Оскільки $\Phi | \mathrm{E}$, то на підставі теореми 4.5 із [12] $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \neq \varnothing$ і складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\|\begin{array}{ccc|cccc} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 2h_{31} & * & * & * & * & * & * \\ \hline 4h_{41} & 2h_{42} & 2h_{43} & * & * & * & * \\ 12h_{51} & 6h_{52} & 2h_{53} & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right\|.$$

Із того, що $P = I_7$, випливає, що $P_B = LP = L$. Отже,

$$P_B = \left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| = L.$$

Очевидно, що $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тому рівняння $BX = A$ має розв'язок. Легко переконатися, що

$$L\mathrm{E} = \Phi S, \quad \text{де} \quad S = \left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{array}\right\|.$$

Таким чином, лівим н.с.д. і н.с.к. коренів рівняння $BX = A$ будуть відповідно матриці

$$\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Література

1. W. J. Vetter, *Vector structures and solutions of linear matrix equations*, Linear Algebra and Appl., **10**, № 2, 181 – 188 (1975).
2. J. R. Magnus, H. Neudecker, *The elimination matrix: some lemmas and applications*, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, **1**, № 4, 422 – 449 (1980).

3. F. J. Don, *On the symmetric solutions of a linear matrix equation*, Linear Algebra and Appl., **93**, 1 – 7 (1987).
4. C. G. Khatri, S. K. Mitra, *Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations*, J. Appl. Math., **31**, № 4, 579 – 585 (1976).
5. A. Ran, M. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **132**, № 5, 1435 – 1443 (2004).
6. B. Recht, M. Fazel, P. Parrilo, *Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization*, doi.org/10.1137/070697835.
7. J. R. Magnus, *L-structured matrices and linear matrix equations*, Linear Algebra and Appl., **14**, № 1, 67 – 88 (1983).
8. I. Kaplansky, *Elementary divisor and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **66**, 464 – 491 (1949).
9. V. A. Bovdi, V. P. Shchedryk, *Commutative Bezout domains of stable range 1.5*, Linear Algebra and Appl., **568**, 127 – 134 (2019).
10. B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings*, Math. Stud. Monogr. Ser. (2012).
11. П. С. Казімірський, *Розклад матричних многочленів на множники*, Наук. думка, Київ (1981).
12. В. П. Щедрик, *Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників*, Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів (2017).
13. V. P. Shchedryk, *Factorization of matrices over elementary divisor domain*, Algebra and Discrete Math., № 2, 79 – 99 (2009).

Одержано 01.10.20