DOI: 10.37863/umzh.v73i2.6174

УДК 519.1

П. Г. Стєганцева, А. В. Скрябіна (Запоріз. нац. ун-т)

ТОПОЛОГІЇ НА n-ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ, УЗГОДЖЕНІ З ТОПОЛОГІЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ДИСКРЕТНИХ НА $(n-1)$-ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ

Topologies on a finite set are described by a nondecreasing sequence of nonnegative integers (the vector of topologies). We study T_0-topologies on the n-element set that induce topologies with $k > 2^{n-1}$ on the $(n-1)$-element set (these induced topologies are called close to the discrete topology). Let k denote the number of open sets in a topology. We obtain the form of the vector of T_0-topologies with $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$, which are described in works by Stanley and Kolli, and find the values $k \in [5 \cdot 2^{n-4}, 2^{n-1}]$, for which T_0-topologies with k open sets do not exist. We describe all labeled T_0-topologies and indicate their number for each $k \geq 13 \cdot 2^{n-5}$. It is shown that there exist values $k \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$ such that any T_0-topology with k open sets can not induce a topology close to the discrete one on an $(n-1)$-element subset.

В роботі топології на скінченній множині описуються неспадною послідовністю невід'ємних цілих чисел (вектором топології). Досліджуються T_0-топології на n-елементній множині, які індукують на $(n-1)$-елементній множині топології з $k > 2^{n-1}$ (ці індуковані топології називають близькими до дискретної). Символом k позначено кількість відкритих множин у топології. Знайдено вигляд вектора T_0-топологій з $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$, які описано в роботах Stanley і Kolli, і значення $k \in [5 \cdot 2^{n-4}, 2^{n-1}]$, для яких не існують T_0-топології з k відкритими множинами. Описано всі помічені T_0-топології і знайдено їхню кількість для кожного $k \geq 13 \cdot 2^{n-5}$. Показано існування таких значень $k \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, що жодна T_0-топологія з k відкритими множинами не індукує на $(n-1)$-елементній множині близьку до дискретної топологію.

1. Вступ. Для вивчення топологій на скінченній множині використовувались різні об'єкти (графи, відношення, булеві функції та ін.). Прийнято говорити, що топологія на n-елементній множині відноситься до *k-класу* (або має вагу k), якщо вона містить k елементів (відкритих множин). Очевидно, що $k = 2, 3, \ldots, 2^n$. Для числа всіх топологій *k-класу* використовують позначення $T(n,k)$. Перші результати дослідження топологій на скінченних множинах було отримано в 60 – 70-х роках двадцятого століття (див. [1, 6]). У цих роботах топології на скінченних множинах було розбито на класи за числом елементів і досліджено в кожному класі окремо. В роботі [1] доведено формулу $T\,(n) = \sum_{m=1}^{n} S\,(n,m)\,\tilde{T}\,(m)$, де $T(n)$ — число всіх топологій на n-елементній множині, $\tilde{T}\,(m)$ — числа всіх T_0-топологій на m-елементних множинах і $S\,(n,m)$ — числа Стірлінга другого роду, з якої випливає, що задача підрахунку всіх топологій зводиться до задачі підрахунку всіх T_0-топологій на n-елементній множині.

Одним із способів підрахунку топологій є їхній відбір із усіх можливих наборів підмножин даної скінченної множини за допомогою ЕОМ. Очевидно, такий спосіб є неефективним для множин з достатньо великою кількістю елементів, але ці результати важливі для тестування отриманих іншими методами результатів. На сьогодні онлайн-енциклопедія цілочислових послідовностей дає число всіх топологій на n-елементній множині для $n = \overline{0, 18}$, а також число топологій із точністю до гомеоморфізмів на n-елементній множині для $n = \overline{0, 16}$ [12].

У 1966 р. H. Sharp (Jr.) [5] і у 1968 р. D. Stephen [8] показали, що для будь-якої не дискретної топології на n-елементній множині кількість k відкритих множин задовольняє умову $k \leq 3 \cdot 2^{n-2}$. У 1971 р. R. Stanley [7] опублікував результат про число T_0-топологій на n-елементній множині з $k \geq 7 \cdot 2^{n-4}$ відкритими множинами, в роботі M. Kolli [2] знайдено число всіх топологій з вагою $k \geq 3 \cdot 2^{n-3}$, а в роботі [3] — кількості всіх T_0-топологій із вагою $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$. В роботі [4] V. Krishnamurthy підрахував кількість усіх негомеоморфних топологій на n-елементній множині при $n = 2, 3, 4, 5$ за допомогою непомічених транзитивних орграфів. За допомогою графів спеціального вигляду у 2008 р. в роботі [9] отримано класифікацію топологій на скінченних множинах. З. І. Боревич для зображення і підрахунку числа всіх топологій на n-елементній множині для $n \leq 10$ використав $(0,1)$-матриці спеціального вигляду [10]. У роботі [11] було пераховано і описано всі T_0-топології з $2^{n-1} < k \leq 2^n$ відкритими множинами (близькі до дискретної топології). Для цього було введено поняття вектора топології як неспадної послідовності невід'ємних цілих чисел із певними властивостями.

В цій роботі вектор топології використовується для вивчення T_0-топологій з вагою $2^{n-2} < k \leq 2^{n-1}$. Метою роботи є опис T_0-топологій на n-елементній множині, узгоджених із близькими до дискретної T_0-топологіями на $(n-1)$-елементній множині; знаходження векторів T_0-топологій з $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$ елементами, підрахунок їх числа та порівняння з результатами Kolli; опис деяких T_0-топологій з $2^{n-2} < k < 5 \cdot 2^{n-4}$ відкритими множинами.

2. Необхідні поняття та твердження. Для обґрунтування результатів нам потрібно навести означення деяких понять та сформулювати необхідні теореми. Означення 1 – 4 та твердження 1, 2 взято з роботи [11].

Означення 1. *Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — упорядкована множина і τ_X — топологія на X. Мінімальним околом M_a елемента $a \in X$ називається перетин усіх околів цього елемента.*

Означення 2. *Індексом елемента $a \in X$ відносно топології τ називається число $\operatorname{ind}_\tau(a)$, яке дорівнює кількості відмінних від a елементів в його мінімальному околі M_a.*

Означення 3. *Неспадну послідовність індексів усіх елементів з X будемо називати вектором топології. Вектор топології τ будемо позначати $\nu(\tau) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.*

Зауважимо, що вектор топології по самій топології визначається однозначно, але одному й тому ж вектору топології можуть відповідати різні топології.

Твердження 1. *Послідовність невід'ємних цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є вектором деякої T_0-топології на n-елементній множині тоді і лише тоді, коли вона задовольняє такі умови*:

1) $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}, i = \overline{1, n-1}$,

2) $\alpha_i \leq i - 1, i = \overline{1, n}$.

Кожному вектору, що має вказані в твердженні властивості, обов'язково відповідає деяка T_0-топологія. Крім того, достатньо легко описати таку топологію, тому що вектор топології визначає її базу.

Означення 4. *Нехай X — скінченна множина і τ_X — топологія на ній. Множина A з τ_X називається максимальною в τ_X, якщо A не міститься ні в якій іншій множині з τ_X, окрім самої множини X. Множина X у цьому випадку називається охопною.*

Нехай задано множини A, X, $A \subset X$, і топологію τ_A. Будемо відновлювати всі такі топології на множині X, в яких множина A є максимальною і які індукують на множині A топологію τ_A (в цьому випадку топологію τ_A і відповідні топології на X будемо називати *узгодженими*).

Твердження 2. *Якщо на множині A задано топологію τ_A, то будь-яка топологія на охопній множині X (узгоджена з топологією τ_A) отримується таким чином. Вибираємо будь-яку відкриту множину $L \in \tau_A$ і кожен елемент з τ_A, який містить L, об'єднуємо з $B = X \setminus A$. До отриманої системи множин додаємо всі елементи τ_A.*

***Зауваження* 1.** У випадку T_0-топологій множина B завжди буде одноелементною.

Означення 5. *Нехай топологія τ на n-елементній множині X узгоджена з топологією τ_A на $(n-1)$-елементній множині $A \subset X$. Різницю $\tau \setminus \tau_A$ множин елементів цих топологій будемо називати рівнем топології τ.*

Означення 6. *Топології τ і $C\tau$, де $C\tau$ — сукупність доповнень до елементів топології τ, будемо називати взаємно двоїстими.*

Означення 7. *Вагою топології τ називається кількість відкритих множин в цій топології. Будемо позначати вагу символом $|\tau|$.*

Очевидно, що взаємно двоїсті топології мають однакову вагу.

Твердження 3. *Для топології з вектором $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ існує більш сильна топологія з вектором $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ (в останньому записі при необхідності потрібно змінити порядок чисел для виконання умови впорядкування)* [11].

Означення 8. *Глибиною відкритої множини $M \in \tau$ назвемо число $g(M)$, яке дорівнює кількості елементів із τ, що містять множину M в якості підмножини (власної або невласної)* [11].

Наприклад, глибина k-елементної підмножини в дискретній топології на n-елементній множині дорівнює 2^{n-k}.

Твердження 4. *Якщо T_0-топологія τ на множині X має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то на множині $X \setminus \{x_n\}$ індукована топологія τ' має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$. При цьому $|\tau| = |\tau'| + g(M)$, де $M \in \tau'$ і $|M| = \alpha_n$, тобто множина M вибирається як $M_n \setminus \{x_n\}$, де M_n — мінімальний окіл x_n* [11].

Формулювання наступної теореми 1 з роботи [11] ми наводимо з використанням поняття двоїстої топології. Це жодним чином не змінює її змісту, але зручніше для цієї роботи.

Теорема 1. *На n-елементній множині X при $n \geq 4$ топологія τ є близькою до дискретної (тобто має вагу $|\tau| > 2^{n-1}$) тоді і лише тоді, коли:*

1) *вектор топології має вигляд $\nu(\tau) = (0, \ldots, 0, \alpha_n)$, $1 \leq \alpha_n \leq n-1$ або топологія є двоїстою до топології з таким вектором; у кожному випадку $|\tau| = 2^{n-1} + 2^{n-1-\alpha_n}$;*

2) *вектор топології має вигляд $\nu(\tau) = (0, \ldots, 0, 1, 1)$, де $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$; при цьому $|\tau| = 2^{n-1} + 2^{n-4}$.*

В роботі [11] доведено також таку лему.

Лема 1. *Топологія τ з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 2)$ має вагу $|\tau| \leq 2^{n-1}$.*

Всі близькі до дискретної топології є T_0-топологіями, причому в кожному класі таких топологій є принаймні одна топологія з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_n)$, де $1 \leq \alpha_n \leq n-1$. Послідовність для ваги близьких до дискретних топологій на n-елементній множині має вигляд $(2^{n-1}+2^0), (2^{n-1}+2^1), \underbrace{\ldots}_{2^1-1}, (2^{n-1}+2^2), \ldots, 5 \cdot 2^{n-3}, \underbrace{\ldots}_{2^{n-3}-1}, 3 \cdot 2^{n-2}, \underbrace{\ldots}_{2^{n-2}-1}, 2^n$, де під фігурними дужками вказано кількість класів, в яких немає жодної топології.

Означення 9. *Будемо називати T_0-топологією індексу α_n близьку до дискретної топологію на n-елементній множині з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_n)$, де $1 \leq \alpha_n \leq n-1$.*

У пункті 3 показано, що T_0-топології, узгоджені з T_0- топологіями індексу 1 на $(n-1)$-елементній множині, — це ті ж самі T_0-топології з $k > 3 \cdot 2^{n-3}$ відкритими множинами, які досліджувались у роботах [2, 7]. У пункті 4 показано, що T_0-топології, узгоджені з T_0-топологіями індексу 2 на $(n-1)$-елементній множині, мають $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$ відкритих множин і є T_0-топологіями з роботи [3]. В пункті 5 розглянуто T_0-топології, узгоджені з T_0-топологіями довільного індексу на $(n-1)$-елементній множині, і отримано загальні формули для знаходження ваги таких T_0-топологій. У пункті 6 знайдено такі значення $k \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, для яких не існує жодної T_0-топології з вагою k, узгодженої з T_0-топологією деякого індексу α_n.

3. T_0-топології, узгоджені з T_0-топологіями індексу 1 на $(n-1)$-елементній множині. Будемо розглядати T_0-топології з векторами $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$, $2 \le \alpha_n \le n-1$, на впорядкованій множині $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Вага кожної такої топології належить множині $(2^{n-2}, 2^{n-1}]$. Обмеження знизу очевидне, оскільки індукована на $(n-2)$-елементній підмножині $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ топологія є дискретною. Верхня оцінка випливає з леми 1 з урахуванням твердження 3. Крім того, всі T_0-топології з векторами $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$ узгоджені з T_0-топологіями індексу 1 на $(n-1)$-елементній множині $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, які на цій множині є близькими до дискретної, а отже, мають вагу $2^{n-1} + 2^{n-3}$ згідно з теоремою 1.

Розкриємо зміст поняття *рівнів топології* для способу опису топології вектором, ґрунтуючись на твердженні 2. Кожна T_0-топологія τ на n-елементній множині X узгоджена з деякою T_0-топологію τ_{A_2} на $(n-1)$-елементній множині $A_2 = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \subset X$, яка в свою чергу узгоджена з деякою T_0-топологію τ_{A_1} на $(n-2)$-елементній множині $A_1 \subset A_2$, і так далі, поки не отримаємо T_0-топологію, узгоджену з деякою дискретною топологією. За означенням 5 різниця кожної пари послідовних топологій визначає рівень топології. Першим рівнем T_0-топології τ на n-елементній множині X будемо називати елементи дискретної топології. Якщо T_0-топологія τ задається вектором, то її перший рівень визначається елементами нульового індексу. Наприклад, T_0-топологія τ з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ має 3 рівні. Перший рівень містить елементи дискретної топології τ_{A_1} на $(n-2)$-елементній множині $A_1 = \{x_1, \ldots, x_{n-2}\} \subset X$. Позначимо символом τ_{A_2} узгоджену з τ_{A_1} топологію на $(n-1)$-елементній множині $A_2 \supset A_1$, вона має вектор $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1})$. Різниця $\tau_{A_2} \setminus \tau_{A_1}$ визначає другий рівень топології τ. Аналогічно, різниця $\tau \setminus \tau_{A_2}$ визначає третій рівень топології τ.

Приклад. Розглянемо T_0-топологію τ з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 3)$. Індуковану нею T_0-топологію з вектором $(0, \ldots, 0, 1)$ позначимо символом τ'. Покажемо, що вага топології τ більша за $3 \cdot 2^{n-3}$. Будемо для визначеності вважати, що мінімальний окіл елемента x_{n-1} в топології τ' має вигляд $M_{n-1} = \{x_1, x_{n-1}\}$. Мінімальний окіл елемента x_n в топології τ містить чотири елементи. При $n \ge 5$ можливі два випадки:

1) $M_n = \{x_1, x_{n-1}, x_j, x_n\}$, $j = \overline{2, n-2}$, тобто $M_{n-1} \subset M_n$. У цьому випадку відкриті множини, які містять підмножину $\{x_1, x_{n-1}, x_j\}$, належать лише другому рівню топології τ'.

2) $M_n = \{x_1, x_j, x_k, x_n\}$, де $j, k = \overline{2, n-2}$ і $j \ne k$, тобто $M_{n-1} \cap M_n = \{x_1\}$, причому відкриті множини в топології τ', які містять підмножину $\{x_1, x_j, x_k\}$, належать як першому рівню, так і другому.

Якщо ж $n \ge 6$, то стає можливим ще один вигляд мінімального околу елемента x_n:

3) $M_n = \{x_j, x_k, x_m, x_n\}$, де $j, k, m = \overline{2, n-2}$ і $j \ne k \ne m$, тобто $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$, причому відкриті множини в топології τ', які містять підмножину $\{x_j, x_k, x_m\}$, належать як першому рівню, так і другому.

У першому випадку для ваги $|\tau|$ топології τ отримаємо $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-3} + g(\{x_1, x_{n-1}, x_j\})$. Глибина $g(\{x_1, x_{n-1}, x_j\})$ множини $\{x_1, x_{n-1}, x_j\}$ у топології τ' дорівнює числу 2^{n-4} відкритих множин у другому рівні, що містять двоелементну підмножину $\{x_1, x_j\}$ у першому рівні. Отже, $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} = 14 \cdot 2^{n-5} > 3 \cdot 2^{n-3}$.

У другому випадку маємо $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-3} + g(\{x_1, x_j, x_k\})$. Кількість відкритих множин в топології τ', які містять трьохелементну підмножину $\{x_1, x_j, x_k\}$, дорівнює сумі двох доданків: числа 2^{n-5} відкритих множин у першому рівні, які містять $\{x_1, x_j, x_k\}$, і числа 2^{n-5} відкритих множин у другому рівні, які містять $\{x_1, x_{n-1}, x_j, x_k\}$. Таким чином, $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + 2^{n-5} = 14 \cdot 2^{n-5}$.

У третьому випадку потрібно обчислити $g(\{x_j, x_k, x_m\})$, причому цей випадок можливий для $n \geq 6$. В дискретній топології на $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ рівно 2^{n-5} елементів містять підмножину $\{x_j, x_k, x_m\}$. Крім цього, в топології τ' у другому рівні ще 2^{n-6} відкритих множин містять підмножину $\{x_1, x_j, x_k, x_m, x_{n-1}\}$, тому що така ж кількість відкритих множин містять чотирьохелементну підмножину $\{x_1, x_j, x_k, x_m\}$ у першому рівні. Загальна кількість елементів у топології τ становить $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + 2^{n-6} = 27 \cdot 2^{n-6} > 3 \cdot 2^{n-3}$.

Наведений приклад легко узагальнюється на випадок будь-якої топології з вектором $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$. Сформулюємо відповідну теорему.

Теорема 2. *Топології на n-елементній множині з векторами $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$, де $2 \leq \alpha_n \leq n-1$, або вектором $(0, \ldots, 0, 2, 2)$ при $n \geq 5$ мають вагу $|\tau| > 3 \cdot 2^{n-3}$.*

Доведення. Достатньо повторити наведені в попередньому прикладі міркування з тією відмінністю, що замість глибини трьохелементної множини нас цікавитиме глибина α_n-елементної множини. При цьому при будь-якому $n \geq 5$ випадок $M_{n-1} \subset M_n$ можливий для кожного $2 \leq \alpha_n \leq n-1$, а випадок $M_{n-1} \cap M_n = \{x_i\}$ — для кожного $2 \leq \alpha_n \leq n-2$. В обох випадках отримаємо топології з вагою

$$|\tau| = 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{n-1-\alpha_n}. \tag{1}$$

При будь-якому $n \geq 6$ можливий також випадок $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$ для кожного $2 \leq \alpha_n \leq n-3$, а для ваги отримуємо формулу

$$|\tau| = 3 \cdot (2^{n-3} + 2^{n-3-\alpha_n}). \tag{2}$$

Знайдемо вагу топології з вектором $(0, \ldots, 0, 2, 2)$. Вага індукованої на множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ топології τ' з вектором $(0, \ldots, 0, 2)$ дорівнює $2^{n-2} + 2^{n-4}$. Розглянемо узгоджені з нею топології з вектором $(0, \ldots, 0, 2, 2)$ на множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. Можливі три випадки:

1) $M_{n-1} = \{x_1, x_2, x_{n-1}\}, M_n = \{x_1, x_2, x_n\}$;
2) $M_{n-1} = \{x_1, x_2, x_{n-1}\},\ M_n = \{x_1, x_3, x_n\}$;
3) $M_{n-1} = \{x_1, x_2, x_{n-1}\},\ M_n = \{x_3, x_4, x_n\}$.

У першому випадку глибина $g(\{x_1, x_2\})$ дорівнює $2 \cdot 2^{n-4}$, тому $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2 \cdot 2^{n-4} = 14 \cdot 2^{n-5}$. У другому випадку маємо $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-4} + g(\{x_1, x_3\}) = 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2^{n-4} + 2^{n-5} = 13 \cdot 2^{n-5}$. У третьому випадку, що можливий для $n \geq 6$, глибина $g(\{x_3, x_4\})$ дорівнює $2^{n-4} + 2^{n-6}$, тому $|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2^{n-4} + 2^{n-6} = 25 \cdot 2^{n-6}$.

Твердження теореми перевіряється безпосередньо з використанням знайдених значень ваги.

Теорему доведено.

З теореми випливає, що вектори $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$, $2 \leq \alpha_n \leq n-1$ і $(0, \ldots, 0, 2, 2)$ визначають всі класи T_0-топологій з вагою $|\tau| > 3 \cdot 2^{n-3}$, які знайдено в роботах [2, 7].

Послідовність для ваги T_0-топологій із векторами $(0, \ldots, 0, 1, \alpha_n)$, $2 \leq \alpha_n \leq n-1$ і $(0, \ldots, 0, 2, 2)$ при $n \geq 5$ має вигляд

$$(3 \cdot 2^{n-3} + 2^0),\ (3 \cdot 2^{n-3} + 2^1),\ (3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^0),$$
$$(3 \cdot 2^{n-3} + 2^2), \underbrace{\ldots}_{2^1-1}, (3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^1), \underbrace{\ldots}_{2^1-1}, (3 \cdot 2^{n-3} + 2^3), \underbrace{\ldots}_{2^2-1}$$

$$\underbrace{\ldots}_{2^2-1},(3\cdot 2^{n-3}+3\cdot 2^2),\underbrace{\ldots}_{2^2-1},(3\cdot 2^{n-3}+2^4),\ldots,49\cdot 2^{n-7},\underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1}$$

$$\underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1},99\cdot 2^{n-8},\underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1},25\cdot 2^{n-6},\underbrace{\ldots}_{2^{n-7}-1},51\cdot 2^{n-7},\underbrace{\ldots}_{2^{n-7}-1},13\cdot 2^{n-5},\underbrace{\ldots}_{2^{n-6}-1}$$

$$\underbrace{\ldots}_{2^{n-6}-1},27\cdot 2^{n-6},\underbrace{\ldots}_{2^{n-6}-1},14\cdot 2^{n-5},\underbrace{\ldots}_{2^{n-5}-1},15\cdot 2^{n-5},\underbrace{\ldots}_{2^{n-5}-1},2^{n-1},$$

де під фігурними дужками вказано кількість класів, в яких немає жодної топології.

4. T_0-топології з вагою $|\tau| \geq 5\cdot 2^{n-4}$. В цьому пункті розглянемо дві теореми про вигляд векторів T_0-топологій, які визначають класи T_0-топологій, розглянуті в роботі [3]. Вага цих топологій належить множині $[5\cdot 2^{n-4}, 3\cdot 2^{n-3}]$.

Теорема 3. *При $n \geq 5$ топології на n-елементній множині з векторами $(0,\ldots,0,2,\alpha_n)$, $3 \leq \alpha_n \leq n-1$, або вектором $(0,\ldots,0,3,3)$ мають вагу $5\cdot 2^{n-4} < |\tau| \leq 3\cdot 2^{n-3}$.*

Доведення зводиться до підрахунку ваги топології, як і у випадку топології з вектором $(0,\ldots,0,1,3)$, а також у теоремі 2. Відмінність полягає в тому, що індукованою є топологія індексу 2 на $(n-1)$-елементній множині, тому її вага дорівнює $2^{n-2}+2^{n-4}$. Наведемо лише результати.

Нехай вектор топології має вигляд $(0,\ldots,0,2,\alpha_n)$. При $n \geq 5$ для кожного $3 \leq \alpha_n \leq n-1$ при умові $M_{n-1} \subset M_n$ і для кожного $3 \leq \alpha_n \leq n-2$ при умові $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i, x_j\}$ вага

$$|\tau| = 5\cdot 2^{n-4}+2^{n-1-\alpha_n}. \tag{3}$$

При $n \geq 6$ для кожного $3 \leq \alpha_n \leq n-3$ при умові $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i\}$ вага

$$|\tau| = 5\cdot 2^{n-4}+3\cdot 2^{n-3-\alpha_n}, \tag{4}$$

при $n \geq 7$ для кожного $3 \leq \alpha_n \leq n-4$ при умові $M_{n-1}\cap M_n = \varnothing$ вага

$$|\tau| = 5\cdot (2^{n-4}+2^{n-4-\alpha_n}). \tag{5}$$

Вага топології з вектором $(0,\ldots,0,3,3)$ дорівнює $11\cdot 2^{n-5}$ при $n \geq 5$, $21\cdot 2^{n-6}$ при $n \geq 6$, $41\cdot 2^{n-7}$ при $n \geq 7$, $81\cdot 2^{n-8}$ при $n \geq 8$.

Безпосереднє порівняння знайдених чисел із межами вказаного в теоремі проміжку завершує її доведення.

Аналогічним чином можна довести таку теорему.

Теорема 4. *Топологія з вектором $(0,\ldots,0,3,4)$ на n-елементній множині при $n \geq 5$ має вагу $|\tau| = 5\cdot 2^{n-4}$, якщо $M_{n-1} \subset M_n$ або $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i, x_j, x_k\}$, $i,j,k = \overline{1, n-2}$.*

***Зауваження* 2.** Для топологій із вектором $(0,\ldots,0,3,4)$ можливі ще три випадки для мінімальних околів M_{n-1} і M_n: $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i, x_j\}$, $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i\}$, $M_{n-1}\cap M_n = \varnothing$, але в кожному з них топологія має вагу $|\tau| < 5\cdot 2^{n-4}$.

З теорем 3 і 4 випливає, що вектори $(0,\ldots,0,2,\alpha_n)$, $3 \leq \alpha_n \leq n-1$, $(0,\ldots,0,3,3)$ і $(0,\ldots,0,3,4)$ визначають всі класи T_0-топологій із вагою $|\tau| \geq 5\cdot 2^{n-4}$, які знайдено в роботі [3].

Послідовність для ваги T_0-топологій із векторами $(0,\ldots,0,2,\alpha_n)$, $3 \leq \alpha_n \leq n-1$, $(0,\ldots,0,3,3)$ і $(0,\ldots,0,3,4)$ (останній для випадків $M_{n-1} \subset M_n$ і $M_{n-1}\cap M_n = \{x_i, x_j, x_k\}$) має вигляд

$$5\cdot 2^{n-4},\ (5\cdot 2^{n-4}+2^0),\ (5\cdot 2^{n-4}+2^1),\ (5\cdot 2^{n-4}+2^1+2^0),$$
$$(5\cdot 2^{n-4}+2^2),\ (5\cdot 2^{n-4}+2^2+2^0),\ (5\cdot 2^{n-4}+2^2+2^1),\ \underbrace{\ldots}_{2^1-1}$$
$$\underbrace{\ldots}_{2^1-1},(5\cdot 2^{n-4}+2^3),\underbrace{\ldots}_{2^1-1},(5\cdot 2^{n-4}+2^3+2^1),\ \underbrace{\ldots}_{2^1-1},(5\cdot 2^{n-4}+2^3+2^2),\ldots$$
$$\ldots,83\cdot 2^{n-8},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1},21\cdot 2^{n-6},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1},85\cdot 2^{n-8},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1}$$
$$\underbrace{\ldots}_{2^{n-8}-1},43\cdot 2^{n-7},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-7}-1},11\cdot 2^{n-5},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-7}-1},45\cdot 2^{n-7},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-7}-1},23\cdot 2^{n-6},\ \underbrace{\ldots}_{2^{n-6}-1},12\cdot 2^{n-5},$$

де під фігурними дужками вказано кількість класів, в яких немає жодної топології.

5. T_0-топології, узгоджені з T_0-топологіями довільного індексу на $(n-1)$-елементній множині. Зображення топологій векторами дозволяє продовжити опис і тих топологій, яких не було у вказаних публікаціях Stanley і Kolli. В цьому пункті розглянемо T_0-топології з векторами $(0,\ldots,0,\alpha_{n-1},\alpha_n)$, $1\le\alpha_{n-1}\le n-2$, $2\le\alpha_n\le n-1$. Вага кожної такої топології належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$.

Теорема 5. *При* $n\ge 5$ *топології на* n*-елементній множині з векторами* $(0,\ldots,0,\alpha_{n-1},\alpha_n)$, $3\le\alpha_{n-1}\le n-2$, $4\le\alpha_n\le n-1$, *мають вагу* $2^{n-2}<|\tau|<5\cdot 2^{n-4}$. *При цьому для* $\alpha_{n-1}=3$ *і* $\alpha_n=4$ *розглядаються лише випадки, зазначені в зауваженні* 2.

Доведення. Згідно з теоремою 1 T_0-топології індексу α_{n-1} на $(n-1)$-елементній множині $M=\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ мають вагу $2^{n-2}+2^{n-2-\alpha_{n-1}}$. Позначимо $\alpha_{n-1}=s$ і $\alpha_n=k$, причому $s<k$. Нехай для визначеності мінімальний окіл елемента x_{n-1} дорівнює $M_{n-1}=\{x_1,x_2,\ldots,x_s,x_{n-1}\}$. Розглянемо всі можливі випадки перетину мінімальних околів елементів x_{n-1} і x_n.

Випадок $M_{n-1}\subset M_n$ можливий при будь-якому $2\le\alpha_n\le n-1$. Мінімальний окіл елемента x_n має вигляд $M_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_s,x_{s+1},\ldots,x_{k-1},x_{n-1},x_n\}$. У першому рівні немає відкритих множин, які містять k-елементну підмножину $\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_s,x_{s+1},\ldots,x_{k-1},x_{n-1}\}$. У другому рівні глибина $g\left(\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_s,x_{s+1},\ldots,x_{k-1},x_{n-1}\}\right)$ дорівнює $2^{n-2-(k-1)}=2^{n-1-k}$. Отже,

$$|\tau|=2^{n-2}+2^{n-2-\alpha_{n-1}}+2^{n-1-\alpha_n}. \tag{6}$$

Можливі ще $s+1$ випадок, в яких $|M_{n-1}\cap M_n|$ може бути числом від 0 до s. Наприклад, якщо $|M_{n-1}\cap M_n|=s-1$, тобто $M_{n-1}\cap M_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1}\}$ (це можливо при будь-якому $2\le\alpha_n\le n-3$), то мінімальний окіл елемента x_n дорівнює $M_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k,x_{k+1},x_n\}$. У першому рівні кількість відкритих множин, які містять k-елементну підмножину $\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k,x_{k+1}\}$, дорівнює 2^{n-2-k}, у другому рівні таких відкритих множин $2^{n-2-(k+1)}=2^{n-3-k}$. Глибина $g(\{x_1,x_2,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k,x_{k+1}\})$ дорівнює $2^{n-2-k}+2^{n-3-k}$. Отже,

$$|\tau|=2^{n-2}+2^{n-2-\alpha_{n-1}}+2^{n-2-\alpha_n}+2^{n-3-\alpha_n}. \tag{7}$$

Виконаємо підрахунок в загальному випадку, коли $|M_{n-1}\cap M_n|=s-p$, де $p=\overline{0,s}$. Мінімальний окіл елемента x_n дорівнює $M_n=\{x_1,\ldots,x_{s-p},x_{s+1},\ldots,x_{k+p},x_n\}$. Глибина k-елементної підмножини $g\left(\{x_1,\ldots,x_{s-p},x_{s+1},\ldots,x_{k+p}\}\right)$ дорівнює $2^{n-2-k}+2^{n-2-(k+p)}$. Отже,

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-2-\alpha_{n-1}} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-2-\alpha_n-p}. \tag{8}$$

Обмеження $|\tau| > 2^{n-2}$ для формули (8) є очевидним, оскільки індукована на $(n-2)$-елементній підмножині $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ топологія має 2^{n-2} відкритих множин, а в топологіях з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ їх принаймні ще дві. Перевіримо обмеження $|\tau| < 5 \cdot 2^{n-4}$. Для цього оцінимо різницю $\delta_1 = 2^{n-2} + 2^{n-2-\alpha_{n-1}} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-2-\alpha_n-p} - 5 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-4} \cdot (2^{2-\alpha_{n-1}} + 2^{2-\alpha_n} + 2^{2-\alpha_n-p} - 1)$. Найбільше значення ваги для цих топологій буде при $\alpha_{n-1} = 3$, $\alpha_n = 4$ і $p = 1$, оскільки при таких же α_{n-1}, α_n і $p = 0$ маємо умови теореми 4. Таким чином, $\delta_1 \leq 2^{n-4} \cdot (2^{2-3} + 2^{2-4} + 2^{2-4-1} - 1) < 0$, що і потрібно було довести. Аналогічно перевіряються обмеження для формули (6).

Теорему доведено.

6. T_0-топології, узгоджені з T_0-топологіями з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 1)$ на $(n-1)$-елементній множині. Всі класи близьких до дискретної топологій на n-елементній множині визначаються топологіями з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_n)$, де $1 \leq \alpha_n \leq n-1$. Більш того, кожен клас близьких до дискретної топологій, за винятком $9 \cdot 2^{n-4}$-класу, має 2 (з точністю до гомеоморфізму) топології: топологію з вектором $(0, \ldots, 0, \alpha_n)$ і двоїсту до неї. До $9 \cdot 2^{n-4}$-класу входять не лише вказані топології, а й топологія з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 1)$, де $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$. Розглянемо топологію з таким вектором на $(n-1)$-елементній множині і всі узгоджені з нею T_0-топології на n-елементній множині.

Теорема 6. *Топології на n-елементній множині з векторами $(0, \ldots, 0, 1, 1, \alpha_n)$, де $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$ і $1 \leq \alpha_n \leq n-1$, мають вагу $9 \cdot 2^{n-5} < |\tau| < 2^{n-1}$. Топології з такими векторами потрапляють у класи, які визначаються топологіями, узгодженими з близькими до дискретних індексу не більше трьох.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 T_0-топології з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 1)$, де $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$, на $(n-1)$-елементній множині $M = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ мають вагу $2^{n-2} + 2^{n-5}$. Нехай $\alpha_n = k$ і для визначеності мінімальні околи елементів x_{n-2} і x_{n-1} дорівнюють $M_{n-2} = \{x_1, x_{n-2}\}$ і $M_{n-1} = \{x_2, x_{n-1}\}$. Розглянемо всі можливі випадки перетину мінімальних околів елементів x_{n-2}, x_{n-1} і x_n. Повторюючи міркування з доведення теореми 5, знаходимо вагу топології для кожного з випадків.

Перший випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$ і $M_{n-2} \cap M_n = \varnothing$, можливий для $1 \leq \alpha_n \leq n-5$, $n \geq 6$. Мінімальний окіл елемента x_n має вигляд $M_n = \{x_3, x_4, \ldots, x_{k+2}, x_n\}$. Вага топології в цьому випадку

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-5-\alpha_n}. \tag{9}$$

Порівняємо формулу (9) з формулами з попередніх теорем. При $\alpha_n = 1$ вага $|\tau| = 27 \cdot 2^{n-6}$. Цей результат збігається з формулою (2) при $\alpha_n = 3$. Таким чином, топології з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 1, 1)$ при умові $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$ і $M_{n-2} \cap M_n = \varnothing$ потрапляють у той же клас, що і топології з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 3)$. При $\alpha_n = 2$ формула (9) дає $|\tau| = 45 \cdot 2^{n-7}$, що збігається з формулою (5) при $\alpha_n = 3$. При $\alpha_n = 3$ вага дорівнює $|\tau| = 81 \cdot 2^{n-8}$, що збігається з формулою (3) при $\alpha_n = 7$. При $\alpha_n \geq 4$ формула (9) збігається з формулою (8), якщо в ній $\alpha_{n-1} = 3$ і $p = 3$.

Другий випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \{x_2\}$ і $M_{n-2} \cap M_n = \varnothing$, можливий для $1 \leq \alpha_n \leq n-4$, $n \geq 5$. Мінімальний окіл $M_n = \{x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}, x_n\}$. Вага топології

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-3-\alpha_n}. \tag{10}$$

При $\alpha_n = 1$ формула (10) дає $|\tau| = 15 \cdot 2^{n-5}$, що збігається з формулою (2) при $\alpha_n = 2$. При $\alpha_n = 2$ вага $|\tau| = 3 \cdot 2^{n-3}$ збігається з формулою (3) при $\alpha_n = 3$. При $\alpha_n = 3$ маємо $|\tau| = 21 \cdot 2^{n-6}$, що збігається з формулою (3) при $\alpha_n = 5$. При $\alpha_n \geq 4$ формула (10) збігається з формулою (7) при $\alpha_{n-1} = 3$.

Третій випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \{x_2\}$ і $M_{n-2} \cap M_n = \{x_1\}$, можливий для $2 \leq \alpha_n \leq n-3$, $n \geq 5$, де $M_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_n\}$. Вага топології

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-1-\alpha_n}. \tag{11}$$

Порівнюючи формулу (11) з формулами з попередніх теорем, переконуємося, що при $\alpha_n = 2$ вага $|\tau| = 13 \cdot 2^{n-5}$ збігається з формулою (1) при $\alpha_n = 4$; при $\alpha_n = 3$ отримуємо $|\tau| = 11 \cdot 2^{n-5}$, що збігається з формулою (3) при $\alpha_n = 4$; при $\alpha_n \geq 4$ формула (11) збігається з формулою (6) при $\alpha_{n-1} = 3$.

Четвертий випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \{x_2, x_{n-1}\}$ і $M_{n-2} \cap M_n = \varnothing$, можливий для $2 \leq \alpha_n \leq$ $\leq n-3$, $n \geq 5$ і мінімального околу $M_n = \{x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{n-1}, x_n\}$. Вага топології

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-3-\alpha_n}. \tag{12}$$

П'ятий випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \{x_2, x_{n-1}\}$ і $M_{n-2} \cap M_n = \{x_1\}$, можливий для $3 \leq \alpha_n \leq$ $\leq n-2$, $n \geq 5$. Мінімальний окіл елемента x_n має вигляд $M_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{n-1}, x_n\}$. Вага топології в даному випадку

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-1-\alpha_n}. \tag{13}$$

Формула (12) збігається з формулою (10), а формула (13) — з формулою (11), проте обмеження на α_n в цих формулах різні.

Шостий випадок: $M_{n-1} \cap M_n = \{x_2, x_{n-1}\}$ і $M_{n-2} \cap M_n = \{x_1, x_{n-2}\}$, можливий для $4 \leq \alpha_n \leq n-1$, $n \geq 5$. Мінімальний окіл елемента x_n можна вибрати у вигляді $M_n =$ $= \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$. Вага топології

$$|\tau| = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-1-\alpha_n}. \tag{14}$$

Формула (14) збігається з формулами (11) і (13). При $\alpha_n \geq 4$ формула (14) збігається з формулою (6) при $\alpha_{n-1} = 3$.

Оскільки мінімальні околи елементів x_{n-2} і x_{n-1} є двоелементними, то зрозуміло, що крім розглянутих інших випадків немає. Ми отримали, що топології з векторами $(0, \ldots, 0, 1, 1, \alpha_n)$ при умові $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$ не утворюють нових класів топологій, всі вони входять до розглянутих вище класів топологій, узгоджених з T_0-топологіями індексу не більше трьох.

Перевіримо обмеження $|\tau| > 9 \cdot 2^{n-5}$. Оскільки, формула (9) дає мінімальне значення для ваги топології в порівнянні з іншими отриманими в цій теоремі формулами, то достатньо оцінити різницю $\delta_2 = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-5-\alpha_n} - 9 \cdot 2^{n-5} = 2^{n-2-\alpha_n} + 2^{n-5-\alpha_n}$. Враховуючи обмеження $1 \leq \alpha_n \leq n-5$, одержуємо $\delta_2 > 0$, що і потрібно було довести.

Для перевірки обмеження $|\tau| < 2^{n-1}$ достатньо розглянути формулу (11), яка дає максимальне значення для ваги розглянутих топологій. Враховуючи обмеження $2 \leq \alpha_n \leq n-3$, отримуємо, що різниця $2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-1-\alpha_n} - 2^{n-1} = 2^{n-5} \cdot (2^{4-\alpha_n} - 7) < 0$.

Теорему доведено.

Теорема 7. *У класах топологій з вагою* $|\tau| \in [13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}]$, *за винятком* T_0-*топологій, узгоджених із близькими до дискретних та двоїстих до них, інших топологій немає. Існують класи топологій із вагою* $|\tau| \in [5 \cdot 2^{n-4}, 13 \cdot 2^{n-5})$, *які не вичерпуються* T_0-*топологіями, узгодженими з близькими до дискретних та двоїстими до них. Існують класи топологій із вагою* $|\tau| \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, *в яких немає топологій із векторами* $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ *і* $(0, \ldots, 0, 1, 1, \alpha_n)$ *при умові* $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$.

Доведення. Розглянемо, наприклад, топології з вагою $|\tau| = 7 \cdot 2^{n-4}$. За теоремою 2 вони мають вектори: 1) $(0, \ldots, 0, 1, 3)$ у випадку $M_{n-1} \subset M_n$; 2) $(0, \ldots, 0, 1, 3)$ у випадку $M_{n-1} \cap \cap M_n = \{x_i\}$; 3) $(0, \ldots, 0, 2, 2)$ у випадку $M_{n-1} \cap M_n = \{x_i, x_j\}$. Для знаходження кількості всіх помічених T_0-топологій зручно перейти від вектора топології до набору мінімальних околів усіх елементів. Тоді у першому випадку отримаємо число $C_n^{n-2} \cdot C_{n-2}^1 \cdot 2 \cdot C_{n-3}^1 = (n)_4$, де $(n)_m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$ — символ Похгамера, і стільки ж двоїстих до них. У другому випадку маємо $\frac{1}{2} \cdot (n)_5$ топологій і стільки ж двоїстих до них. Кількість топологій у третьому випадку дорівнює $\frac{1}{4} \cdot (n)_4$. Загальна кількість топологій у класі $7 \cdot 2^{n-4}$ дорівнює $2 \cdot (n)_4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n)_5 + \frac{1}{4} \cdot (n)_4 = \frac{9}{4} \cdot (n)_4 + (n)_5$. Оскільки це число збігається з числом, наведеним у статті [2], то можна зробити висновок, що в даному класі інших топологій немає. Такий же висновок отримаємо для класів $13 \cdot 2^{n-5}$, $27 \cdot 2^{n-6}$, $15 \cdot 2^{n-5}$ та 2^{n-1}.

Для доведення другого твердження теореми достатньо навести приклад класу з вказаною властивістю. Розглянемо клас топологій із вагою $|\tau| = 25 \cdot 2^{n-6}$. За теоремою 2 він можливий при $n \geq 6$ і містить топології з векторами: 1) $(0, \ldots, 0, 1, 5)$, коли $M_{n-1} \subset M_n$; 2) $(0, \ldots, 0, 1, 5)$, коли $M_{n-1} \cap M_n = \{x_i\}$; 3) $(0, \ldots, 0, 2, 2)$, коли $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$. Кількість помічених T_0-топологій у першому випадку дорівнює $\frac{1}{6} \cdot (n)_6$ і така ж кількість двоїстих до них. У другому випадку отримаємо $\frac{1}{24} \cdot (n)_7$ топологій і таку ж кількість двоїстих до них. Кількість топологій у третьому випадку дорівнює $\frac{1}{8} \cdot (n)_6$ і така ж кількість двоїстих до них. Тобто разом кількість T_0-топологій з вагою $25 \cdot 2^{n-6}$ дорівнює $\frac{7}{12} \cdot (n)_6 + \frac{1}{12} \cdot (n)_7$. Але в роботі [2] показано, що кількість топологій із такою вагою дорівнює $\frac{n+14}{24} \cdot (n)_6 + \frac{1}{24} \cdot (n)_7$. Оцінимо різницю $\frac{n+14}{24} \cdot (n)_6 + \frac{1}{24} \cdot (n)_7 - \frac{7}{12} \cdot (n)_6 - \frac{1}{12} \cdot (n)_7$. В результаті отримуємо $\frac{1}{4} \cdot (n)_6 > 0$. Таким чином, у даному класі є ще й інші топології, що й потрібно було показати.

Покажемо, що існують і класи T_0-топологій із вагою з проміжку $(2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, в яких немає жодної топології, узгодженої з близькою до дискретної топологією. Розглянемо клас T_0-топологій при $n = 5$ з вагою 9. За теоремами 5 і 6 жодна T_0-топологія з векторами $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ при $1 \leq \alpha_{n-1} \leq 3$, $2 \leq \alpha_n \leq 4$ і $(0, \ldots, 0, 1, 1, \alpha_n)$, де $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$ і $1 \leq \alpha_n \leq 4$, не має ваги $|\tau| = 9$. Ми показали, що T_0-топології в цьому класі мають вектори $(0, 1, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2, 4)$, $(0, 0, 2, 2, 3)$ і $(0, 0, 1, 3, 3)$.

Теорему доведено.

Література

1. J. W. Evans, F. Harary, M. S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Commun. ACM, **10**, № 5, 295–297 (1967).
2. M. Kolli, *Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set*, J. Integer Seq., **10**, 1–11 (2007).

3. M. Kolli, *On the cardinality of the T_0-topologies on a finite set*, Int. J. Combin., **214**, Article ID 798074 (2014), 7 p.
4. V. Krishnamurthy, *On the enumeration of homeomorphism classes of finite topologies*, J. Austr. Math. Soc. Ser. A, **24**, 320 – 338 (1977).
5. H. Sharp (Jr.), *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **17**, 1344 – 1349 (1966).
6. H. Sharp (Jr.), *Cardinality of finite topologies*, J. Combin. Theory, **5**, 82 – 86 (1968).
7. R. P. Stanley, *On the number of open sets of finite topologies*, J. Combin. Theory, **10**, 74 – 79 (1971).
8. D. Stephen, *Topology on finite sets*, Amer. Math. Monthly, **75**, 739 – 741 (1968).
9. Н. П. Адаменко, И. Г. Величко, *Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов*, Укр. мат. журн., **60**, № 7, 992 – 996 (2008).
10. З. И. Боревич, *К вопросу перечисления конечных топологий*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **71**, 47 – 65 (1977).
11. И. Г. Величко, П. Г. Стеганцева, Н. П. Башова, *Перечисление топологий близких к дискретной на конечных множествах*, Изв. вузов. Математика, № 11, 23 – 31 (2015).
12. *Он-лайн энциклопедия* целочисленных последовательностей, URL: https://oeis.org/?language =russian.

Одержано 19.06.20,
після доопрацювання — 29.09.20