DOI: 10.37863/umzh.v73i3.6403

УДК 517.54; 517.12

Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛОГАРИФМІЧНА АСИМПТОТИКА НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОШІ – РІМАНА – БЕЛЬТРАМІ

We investigate regular solutions of the nonlinear Cauchy – Riemann – Beltrami equation in terms of lower limits and solve an extreme problem for the disk image area functional on a certain class of solutions to the nonlinear Cauchy – Riemann – Beltrami system.

Досліджуються регулярні розв'язки нелінійної системи Коші – Рімана – Бельтрамі на логарифмічну асимптотику у термінах нижніх границь. Розв'язано екстремальну задачу для функціонала площі образу круга на деякому класі розв'язків нелінійної системи Коші – Рімана – Бельтрамі.

1. Вступ. Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ майже скрізь (м.с.) у G. Нагадаємо, що *рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}(f_x + i f_y)$, $f_z = \dfrac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y відповідно.

Теореми існування гомеоморфних розв'язків класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ були нещодавно доведені методом модулів для багатьох лінійних та квазілінійних вироджених рівнянь Бельтрамі (див., наприклад, [1 – 5]). Щодо зв'язку досліджень просторових класів Соболєва методом модулів див. [6 – 11].

Нехай $\sigma\colon D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m \geq 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) рівняння

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ відповідно. Враховуючи формули (21.25) у [12, с. 611], маємо

$$r f_r = z f_z + \overline{z} f_{\overline{z}}, \quad f_\theta = i(z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}).$$

Тоді рівняння (2) можна записати у комплексній формі

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\, |z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\, |z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{3}$$

Зауважимо, що подібні нелінійні рівняння зустрічаються у роботі [13] (див. теорему 5.7).

При $m = 0$ рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1) із комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\, |z|\, i - 1}{\sigma(z)\, |z|\, i + 1}.$$

Якщо у рівнянні (3) покласти $m = 0$ і $\sigma = -i/|z|$, то отримаємо відому систему Коші – Рімана. При $m > 0$ рівняння (3) є частковим випадком загальної нелінійної комплексної системи рівнянь (7.33) в [12] (п. 7.7). Скрізь далі будемо вважати, що $m > 0$.

Нелінійне рівняння (3) є частковим випадком нелінійної системи двох дійсних рівнянь у частинних похідних (див. (1) у [14, 15], а також [16]). Зауважимо, що нелінійні системи рівнянь у частинних похідних, як і раніше, вивчаються у різноманітних аспектах (див., наприклад, [12–28, 31]).

Відображення $f: G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ (див., наприклад, I. 1.6 в [32]). Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с.

Відображення $f: G \to \mathbb{C}$ має N*-властивість* (Лузіна), якщо з умови $|E| = 0$ випливає, що $|f(E)| = 0$.

Означення 1. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (3) *будемо називати регулярний гомеоморфізм* $f: G \to \mathbb{C}$, *який м.с. в області* G *задовольняє рівняння* (3).

Скрізь далі будемо вважати, що

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

і

$$\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_1 < |z| < \varepsilon_2\}.$$

Нехай $f: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $p > 1$. Будемо називати *p-кутовою дилатацією* відображення f відносно точки $z_0 = 0$ величину

$$D_{p,f}(z) = D_{p,f}(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})}$$

(див. [27], а також [29–31]). Тут $z = re^{i\theta}$, J_f — якобіан відображення f.

Для $z = 0$ і $r \in (0,\, 1)$ позначимо

$$d_{p,f}(r) = \left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} D_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z)\, ds \right)^{p-1}. \tag{4}$$

При $p = 2$ кутова дилатація використовувалася при дослідженні локальних властивостей квазіконформних відображень [33–38] та $p \neq 2$ [27, 28, 30, 39, 40]. Відомо, що кутова дилатація у точках регулярності збігається з дотичною дилатацією (див. п. 6.1 і лему 6.1 в [1]), яка далі використовувалася при дослідженні локальної та межової поведінки гомеоморфних розв'язків з узагальненими похідними та у задачі Діріхле для рівнянь Бельтрамі з виродженням [41, 42].

Позначимо через $L(r)$ довжину кривої $f(re^{i\theta})$, $0 \le \theta \le 2\pi$, а через $S(r) = |f(B_r)|$ площу множини $f(B_r)$. Наступне твердження містить диференціальну нерівність для функції $S(r)$ (див. лему 2.1 у [27]).

Твердження 1. *Нехай* $f: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — *регулярний гомеоморфізм класу Соболєва* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *який має* N*-властивість, і* $p > 1$. *Тоді*

$$S'(r) \ge 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\, r^{1-p}\, d_{p,f}^{-1}(r)\, S^{\frac{p}{2}}(r) \tag{5}$$

для майже всіх (м.в.) $r \in [0, 1)$.

З твердження 1 випливає така лема.

Лема 1. *Нехай $m > 0$ і $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Тоді*

$$S'(r) \geq 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1} \left(\int\limits_{\gamma_r} \frac{ds}{|z| \left(\mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{-(m+1)} S^{\frac{m+2}{2}}(r) \tag{6}$$

для м.в. $r \in [0, 1)$.

Доведення. Нехай $p = m + 2$. Зауважимо, що згідно з наслідком B із роботи [43] гомеоморфізм $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ має N-властивість. Далі, враховуючи те, що f — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (2), знаходимо

$$J_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} \,\mathrm{Im}(\overline{f}_r\, f_\theta) = \frac{1}{r}\, |f_\theta|^{m+2}\, \mathrm{Im}\, \overline{\sigma(re^{i\theta})} > 0 \quad \text{м.с.}$$

(див. формулу (21.52) в [12]) і

$$D_{p,f}(z) = D_{p,f}(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^{m+2}}{r^{m+2}\, J_f(re^{i\theta})} = \frac{1}{|z|^{m+1} \mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)}}$$

для м.в. $z \in \mathbb{B}$.

За формулою (4) отримуємо рівність

$$d_{p,f}(r) = \left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} D_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z)\, ds \right)^{p-1} = \left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{ds}{|z| \left(\mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1}.$$

Тоді нерівність (5) можна записати у вигляді (6).

2. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі. У даному пункті наведено кілька теорем про асимптотичну поведінку регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі вигляду (3).

Наступний результат є аналогом відомої леми Ікоми – Шварца про оцінку нижньої границі (див. теорему 2 в [44]).

Лема 2. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $\tau > 0$ і $\alpha > 1$ виконується умова*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\tau} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} \right)^{-1} = M < \infty, \tag{7}$$

де

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \left(\mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1},$$

то

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|} \right)^{\frac{\tau}{m}} \leq c_0 M^{\frac{1}{m}} < \infty, \tag{8}$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m.

Доведення. З леми 1 випливає оцінка

$$\left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}\right)' = \frac{S'(t)}{S^{\frac{m+2}{2}}(t)} \geq 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1}\left(\int\limits_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{-(m+1)}$$

для м.в. $t \in (0,1)$. Інтегруючи обидві частини нерівності по $t \in (\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})$, $\varepsilon \in (0,1)$, отримуємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}\right)' dt \geq 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\int\limits_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{-(m+1)} dt. \tag{9}$$

Зауважимо, що $g_m(t) = \dfrac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}$ є неспадною. Тоді

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}\right)' dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} g_m'(t)dt \leq g_m(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}) - g_m(\varepsilon) = \frac{2}{m}\left(S^{-\frac{m}{2}}(\varepsilon) - S^{-\frac{m}{2}}(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})\right) \tag{10}$$

(див. теорему IV 7.4 в [45]).

Комбінуючи нерівності (9) і (10), одержуємо

$$S^{-\frac{m}{2}}(\varepsilon) \geq S^{-\frac{m}{2}}(\varepsilon) - S^{-\frac{m}{2}}(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}) \geq 2^{m+1}\, m\, \pi^{\frac{m}{2}+1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)},$$

де $I_{m,\sigma}(t) = \left(\displaystyle\int_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}$. Звідси отримуємо оцінку

$$S(\varepsilon) \leq 2^{-\frac{2(m+1)}{m}} m^{-\frac{2}{m}}\pi^{-\frac{m+2}{m}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{2}{m}}. \tag{11}$$

Покладемо $l_f(\varepsilon) = \min_{|z|=\varepsilon}|f(z)|$, $\varepsilon \in (0,1)$. Тоді, враховуючи оцінку (11) і те, що $f(0)=0$, маємо

$$\pi l_f^2(\varepsilon) \leq S(\varepsilon) \leq 2^{-\frac{2(m+1)}{m}}\, m^{-\frac{2}{m}}\,\pi^{-\frac{m+2}{m}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{2}{m}}.$$

Звідси

$$l_f(\varepsilon) \leq 2^{-\frac{m+1}{m}}\, m^{-\frac{1}{m}}\,\pi^{-\frac{m+1}{m}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m}}.$$

Таким чином,

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau}{m}}=\liminf_{\varepsilon\to 0} l_f(\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\tau}{m}}\leq$$

$$\leq 2^{-\frac{m+1}{m}}\,m^{-\frac{1}{m}}\,\pi^{-\frac{m+1}{m}}\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\tau}{m}}=c_0\,M^{\frac{1}{m}},$$

де $c_0=2^{-\frac{m+1}{m}}\,m^{-\frac{1}{m}}\,\pi^{-\frac{m+1}{m}}>0$ — стала, яка залежить тільки від m.

***Приклад* 1.** Припустимо, що $m<2\tau$. Розглянемо рівняння

$$f_r=-\frac{\tau i}{mr}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\tau-1}|f_\theta|^m f_\theta \tag{12}$$

в одиничному крузі $\mathbb{B}$. Покажемо, що відображення $f=\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{\tau}{m}}e^{i\theta}$ належить простору $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B})$. Дійсно, f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}\setminus\{0\}$. Звідси, зокрема, випливає, що $f\in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B}\setminus\{0\})$. Покладемо $B_{r_0}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leq r_0\}$, $r_0\in(0,1)$, і $R(r)=\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{\tau}{m}}$. Тоді знаходимо

$$f_r=R'(r)e^{i\theta},\quad f_\theta=iR(r)e^{i\theta},$$

$$R'(r)=\frac{\tau}{m}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{\tau}{m}-1}\frac{1}{r}$$

і за формулою в [12, с. 611] маємо

$$\int\limits_{B_{r_0}}\left(|f_z|^2+|f_{\overline{z}}|^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{B_{r_0}}\left(|f_r|^2+r^{-2}|f_\theta|^2\right)rdrd\theta=$$

$$=\pi\int\limits_0^{r_0}r\left(R'(r)\right)^2dr+\pi\int\limits_0^{r_0}\frac{R^2(r)}{r}dr=\pi\left(\frac{\tau}{m}\right)^2\int\limits_0^{r_0}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2\tau}{m}-2}\frac{dr}{r}+\pi\int\limits_0^{r_0}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2\tau}{m}}\frac{dr}{r}.$$

Очевидно, що обидва інтеграли збігаються, якщо $m<2\tau$.

Перевіримо, що відображення $f=\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{\tau}{m}}e^{i\theta}$ є розв'язком рівняння (12). Дійсно, справджується рівність $\sigma=\frac{f_r}{f_\theta|f_\theta|^m}=-\frac{\tau i}{mr}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\tau-1}$. Далі знаходимо

$$\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}=\frac{\tau^{\frac{1}{m+1}}}{m^{\frac{1}{m+1}}|z|^{\frac{1}{m+1}}}\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau-1}{m+1}}$$

і

$$I_{m,\sigma}(t)=\left(\int\limits_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}=\frac{(2\pi)^{m+1}mt}{\tau\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\tau-1}}.$$

Перевіримо, що умова (7) виконується. Дійсно,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1}=\frac{(2\pi)^{m+1}m}{\tau}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\tau-1}\frac{dt}{t}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(2\pi)^{m+1}m}{\tau}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}s^{\tau-1}ds\right)^{-1}=\frac{(2\pi)^{m+1}m\alpha^{\tau}}{\alpha^{\tau}-1}<\infty.$$

З іншого боку, легко бачити, що $\lim_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\dfrac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau}{m}}=1.$

Твердження 2. *Припустимо, що* $\delta>0$, $\tau-\delta m>\dfrac{m}{2}$. *Тоді рівняння* (2) *з* $\sigma=$ $=\left(\delta-\dfrac{\tau}{m}\right)\dfrac{i}{r}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{\tau-m\delta-1}$ *має регулярний гомеоморфний розв'язок* $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *такий, що*

$$\lim_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau}{m}}=\infty,\tag{13}$$

до того ж

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1}=\infty\,,\tag{14}$$

де $I_{m,\sigma}(t)=\left(\int_{\gamma_t}\dfrac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}.$

Доведення. Покажемо, що відображення $f=\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{\tau}{m}-\delta\right)}e^{i\theta}$ належить простору $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$. Дійсно, f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}\setminus\{0\}$. Звідси, зокрема, випливає, що $f\in$ $\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}\setminus\{0\})$. Покладемо $B_{r_0}=\{z\in\mathbb{C}\colon|z|\le r_0\}$, $r_0\in(0,1)$, і $R(r)=\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{\tau}{m}-\delta\right)}$. Тоді знаходимо

$$f_r=R'(r)e^{i\theta},\quad f_\theta=iR(r)e^{i\theta},$$

$$R'(r)=\left(\frac{\tau}{m}-\delta\right)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-\frac{\tau}{m}-1}\frac{1}{r}$$

і за формулою в [12, c. 611] маємо

$$\int\limits_{B_{r_0}} \left(|f_z|^2+|f_{\overline{z}}|^2\right) dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{B_{r_0}} \left(|f_r|^2+r^{-2}|f_\theta|^2\right) rdrd\theta=$$

$$=\pi\int\limits_0^{r_0} r\left(R'(r)\right)^2 dr+\pi\int\limits_0^{r_0}\frac{R^2(r)}{r}dr=c_0\int\limits_0^{r_0}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-2\left(1+\frac{\tau}{m}-\delta\right)}\frac{dr}{r}+\pi\int\limits_0^{r_0}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-2\left(\frac{\tau}{m}-\delta\right)}\frac{dr}{r},$$

де $c_0=\pi\left(\dfrac{\tau}{m}-\delta\right)^2$. Очевидно, що обидва інтеграли збігаються, якщо $\dfrac{\tau}{m}-\delta>\dfrac{1}{2}$.

Легко перевірити, що відображення $f=\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{\delta-\frac{\tau}{m}}e^{i\theta}$ є розв'язком рівняння (2) з $\sigma=$ $=\left(\delta-\dfrac{\tau}{m}\right)\dfrac{i}{r}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{\tau-m\delta-1}$. Далі знаходимо

$$\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}=\left(\frac{\tau}{m}-\delta\right)^{\frac{1}{m+1}}\frac{1}{|z|^{\frac{1}{m+1}}}\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau-m\delta-1}{m+1}}$$

і

$$I_{m,\sigma}(t)=\left(\int\limits_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}=\frac{(2\pi)^{m+1}m}{\tau-\delta m}\,t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\tau+m\delta+1}.$$

Перевіримо виконання умови (14). Дійсно,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1}=\frac{(2\pi)^{m+1}m}{\tau-\delta m}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\tau-m\delta-1}\frac{dt}{t}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(2\pi)^{m+1}m}{\tau-\delta m}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}s^{\tau-m\delta-1}ds\right)^{-1}=\frac{(2\pi)^{m+1}\,m\,\alpha^{\tau-m\delta}}{\alpha^{\tau-m\delta}-1}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m\delta}=\infty.$$

З іншого боку, легко бачити, що $\lim_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\dfrac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau}{m}}=\infty$.

З леми 2 випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $\tau>0$ і $\alpha>1$ виконується умова*

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1}=0, \tag{15}$$

то

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{\tau}{m}}=0.$$

***Приклад* 2.** Припустимо, що $m > 0,\ \tau = 1$. Розглянемо рівняння

$$f_r = -\frac{i}{m\,r^2}\,|f_\theta|^m f_\theta \tag{16}$$

в одиничному крузі $\mathbb{B}$.

Легко перевірити, що $f = r^{\frac{1}{m}} e^{i\theta}$ є регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння (16) класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$. Зауважимо, що коефіцієнт $\sigma = -\dfrac{i}{m\,r^2}$ задовольняє умову (15). З іншого боку, легко бачити $\lim_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\dfrac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}} = \lim_{r\to 0} r^{\frac{1}{m}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^{\frac{1}{m}} = 0$.

Лема 3. *Нехай* $\lambda\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ *— вимірна функція і* $p > 1$. *Тоді*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{(\lambda(t))^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{-(p-1)} \le \left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{-p}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(t)dt}{t^p} \tag{17}$$

для будь-яких $0 < r_1 < r_2 < \infty$.

Доведення. Дійсно, застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t} = \int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda^{\frac{1}{p}}(t)}{t}\lambda^{-\frac{1}{p}}(t)dt \le \left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(t)}{t^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{(\lambda(t))^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Звідси отримуємо нерівність (17).

Теорема 1. *Нехай* $f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$. *Якщо для деяких чисел* $c_0 > 0$, $\kappa\in\left[0,\dfrac{m+2}{m+1}\right)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \le c_0\left(\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\kappa}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0\in(0,1)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\kappa(m+1)}{m}} \le \nu_0 c_0^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m *і* κ.

Доведення. Вибираючи у лемі 3

$$p = \frac{m+2}{m+1},\quad r_1 = \varepsilon,\quad r_2 = \sqrt{\varepsilon},\quad \lambda(t) = \int\limits_{\gamma_t}\frac{ds}{|z|\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}$$

і застосовуючи теорему Фубіні, отримуємо

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m+1}} \le 2^{\frac{m+2}{m+1}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{m+2}{m+1}}\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\sqrt{\varepsilon})}\frac{dxdy}{|z|^{1+\frac{m+2}{m+1}}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}.$$

Тоді з умови теореми випливає оцінка

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m+2-(m+1)k} \leq 2^{m+2-k(m+1)} c_0^{m+1}.$$

Звідси випливає, що

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\tau} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-1} \leq 2^{m+2-k(m+1)} c_0^{m+1},$$

де $\tau = m+2-(m+1)k$.

Насамкінець, застосовуючи лему 2, завершуємо доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деякого $r_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$I_0 = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}} < \infty,$$

то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{2m}} \leq \nu_0 \sqrt{I_0}, \tag{18}$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m.

Доведення. Дійсно, за нерівністю Гельдера при $p = \dfrac{2(m+1)}{m+2}$ і $p' = \dfrac{2(m+1)}{m}$ отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leq \left(\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dxdy}{|z|^2}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \left(\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}},$$

де $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leq \left(2\pi\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \left(\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}} \leq$$

$$\leq (2\pi)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} I_0^{\frac{m}{2(m+1)}} \left(\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}},$$

де $I_0 = \displaystyle\int_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}}$, $B_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < r_0\}$. Застосувавши теорему 1, в якій виберемо $k = \dfrac{m+2}{2(m+1)}$ і $c_0 = (2\pi)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} I_0^{\frac{m}{2(m+1)}}$, отримаємо оцінку (18).

Теорема 3. *Нехай* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — *регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$. *Якщо для деякого числа* $M_0 > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{B_{\varepsilon_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \le M_0$$

для деякого $\varepsilon_0 \in (0,1)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m}} \le \nu_0 M_0^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де ν_0 — *додатна стала, яка залежить тільки від* m *і* κ.

3. Екстремальний випадок. Нехай $q > 0$, $0 < m < 2$ і H — множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$, які задовольняють рівняння (3) м.с., $f(0) = 0$ і

$$\left(\int\limits_{\gamma_r} \frac{ds}{|z| \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1} \le q\, r \tag{19}$$

для м.в. $r \in [0,1)$.

Теорема 4. *Для будь-якого відображення* $f \in H$ *виконується нерівність*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}} \le \left(\frac{q}{m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При цьому знак рівності досягається на відображенні

$$f_*(z) = \left(1 + \frac{m}{q} \ln \frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{z}{|z|}. \tag{20}$$

Доведення. Нехай f належить H. З умови (19) і леми 1 випливає оцінка

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{m+2}{2}}(r)} \ge 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1} \left(\int\limits_{\gamma_r} \frac{ds}{|z| \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{-(m+1)} \ge \frac{2}{q\pi^{\frac{m}{2}} r}$$

для м.в. $r \in [0,1)$. Інтегруючи обидві частини останньої нерівності по $t \in (r,1)$, отримуємо

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}\right)' dt \ge \frac{2}{\pi^{\frac{m}{2}} q} \ln \frac{1}{r}. \tag{21}$$

Зазначимо, що $g_m(t) = \dfrac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}$ є неспадною. Тоді

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-m/2}\right)' dt = \int\limits_r^1 (g_m(t))'\, dt \le g_m(1) - g_m(r) = \frac{2}{m}\left(S^{-\frac{m}{2}}(r) - S^{-\frac{m}{2}}(1)\right) \tag{22}$$

(див. теорему IV 7.4 в [45]). Комбінуючи нерівності (22) і (21), маємо

$$\frac{2}{m}\left(S^{-\frac{m}{2}}(r)-S^{-\frac{m}{2}}(1)\right)\geq\frac{2}{\pi^{\frac{m}{2}}q}\ln\frac{1}{r}.$$

Звідси, враховуючи умову $S(1)\leq\pi$, приходимо до оцінки

$$S(r)\leq\pi\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2}{m}}$$

для всіх $r\in[0,1)$.

Покладемо $l_f(\varepsilon)=\min_{|z|=\varepsilon}|f(z)|$, $\varepsilon\in(0,1)$. Тоді, враховуючи попередню оцінку і те, що $f(0)=0$, маємо

$$\pi l_f^2(\varepsilon)\leq S(\varepsilon)\leq\pi\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{2}{m}}.$$

Звідси

$$l_f(\varepsilon)\leq\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{m}}.$$

Таким чином,

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}}=\liminf_{\varepsilon\to 0}l_f(\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}\leq\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{m}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{q}{m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Очевидно, що остання оцінка досягається на відображенні $f_*=\left(1+\dfrac{m}{q}\ln\dfrac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}}e^{i\theta}$.

Перевіримо, що відображення f_* належить класу H. Оскільки f_* є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}\setminus\{0\}$, то $f_*\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}\setminus\{0\})$. Покладемо $B_{r_0}=\{z\in\mathbb{C}\colon|z|\leq r_0\}$, $r_0\in(0,1)$, і

$$R(r)=\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}}.$$

Тоді знаходимо

$$(f_*)_r=R'(r)e^{i\theta},\quad (f_*)_\theta=iR(r)e^{i\theta},\qquad R'(r)=\frac{1}{qr}\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}-1}.$$

За формулою в [12, с. 611] маємо

$$\int\limits_{B_{r_0}}\left(|f_z|^2+|f_{\overline{z}}|^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{B_{r_0}}\left(|f_r|^2+r^{-2}|f_\theta|^2\right)rdrd\theta=\pi\int\limits_0^{r_0}r\left(R'(r)\right)^2dr+\pi\int\limits_0^{r_0}\frac{R^2(r)}{r}dr=$$

$$=\frac{\pi}{q}\int\limits_0^{r_0}\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-2\left(1+\frac{1}{m}\right)}\frac{dr}{r}+\pi\int\limits_0^{r_0}\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2}{m}}\frac{dr}{r}.$$

Очевидно, що обидва інтеграли збігаються, якщо $0<m<2$.

Далі знаходимо

$$(f_*)_\theta = \left(1 + \frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}} ie^{i\theta}, \quad |(f_*)_\theta|^m = \left(1 + \frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-1}$$

і

$$(f_*)_r = \frac{1}{qr}\left(1 + \frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}-1} e^{i\theta}.$$

Звідси випливає, що знайдене відображення f_* є розв'язком рівняння (3) з $\sigma = -\dfrac{i}{q|z|}$, тому $f_* \in H$.

Теорему 4 доведено.

Література

1. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equations: a geometric approach*, Dev. Math., **26**, Springer, New York etc. (2012).
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York (2009).
3. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On recent advances in the degenerate Beltrami equations*, Ukr. Mat. Visn., **4**, № 7, 467 – 515 (2010).
4. U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation*, Handbook in Complex Analysis: Geometric Function Theory, **2**, 555 – 597 (2005).
5. E. A. Sevost'yanov, *On quasilinear Beltrami-type equations with degeneration*, Math. Notes, **90**, № 3-4, 431 – 438 (2011).
6. E. A. Sevost'yanov, *Generalization of one Poletskii lemma to classes of space mappings*, Ukr. Math. J., **61**, № 7, 1151 – 1157 (2009).
7. Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева*, Наук. думка, Киев (2013).
8. M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACLn inverses*, Complex Var. and Elliptic Equat., **53**, № 1, 77 – 99 (2008).
9. M. Cristea, *Open, discrete mappings having local ACLn inverses*, Complex Var. and Elliptic Equat., **55**, № 1-3, 61 – 90 (2010).
10. M. Cristea, *Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 2, 232 – 246 (2014).
11. M. Cristea, *Some properties of open, discrete generalized ring mappings*, Complex Var. and Elliptic Equat., **61**, № 5, 623 – 643 (2016).
12. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Math. Ser., **48** (2009).
13. C.-Y. Guo, M. Kar, *Quantitative uniqueness estimates for p-Laplace type equations in the plane*, Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl., **143**, 19 – 44 (2016).
14. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными*, Докл. АН СССР, **112**, № 5, 810 – 811 (1957).
15. М. А. Лаврентьев, *Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей*, Мат. сб., **21(63)**, № 2, 285 – 320 (1947).
16. М. А. Лаврентьев, *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*, Изд-во АН СССР, Москва (1962).
17. Б. В. Шабат, *Геометрический смысл понятия эллиптичности*, Успехи мат. наук, **12**, № 6 (78), 181 – 188 (1957).
18. Б. В. Шабат, *К понятию производной системы в смысле М. А. Лаврентьева*, Докл. АН СССР, **136**, № 6, 1298 – 1301 (1961).

19. R. Kuhnau, *Minimal surfaces and quasiconformal mappings in the mean*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **7**, № 2, 104 – 131 (2010).
20. С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения — новые методы и приложения*, Наука, Москва (1984).
21. T. Adamowicz, *On p-harmonic mappings in the plane*, Nonlinear Anal., **71**, № 1-2, 502 – 511 (2009).
22. G. Aronsson, *On certain p-harmonic functions in the plane*, Manuscripta Math., **61**, № 1, 79 – 101 (1988).
23. А. С. Романов, *Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике*, Сиб. мат. журн., **49**, № 4, 886 – 897 (2008).
24. B. Bojarski, T. Iwaniec, *p-Harmonic equation and quasiregular mappings*, Banach Center Publ., **19**, № 1, 25 – 38 (1987).
25. K. Astala, A. Clop, D. Faraco, J. Jääskeläinen, A. Koski, *Nonlinear Beltrami operators. Schauder estimates and bounds for the Jacobian*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **34**, № 6, 1543 – 1559 (2017).
26. M. Carozza, F. Giannetti, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone, R. Schiattarella, *Bi-Sobolev mappings and Kp-distortions in the plane*, J. Math. Anal. and Appl., **457**, № 2, 1232 – 1246 (2018).
27. A. Golberg, R. Salimov, M. Stefanchuk, *Asymptotic dilation of regular homeomorphisms*, Complex Anal. and Oper. Theory, **13**, № 6, 2813 – 2827 (2019).
28. R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk, *On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation*, J. Math. Sci., **248**, 203 – 216 (2020).
29. Е. А. Севостьянов, Р. Р. Салимов, *О неравенстве типа Вяйсяля для угловой дилатации отображений и некоторых его приложениях*, Укр. мат. вісн., **12**, № 4, 511 – 538 (2015).
30. M. Cristea, *On Poleckii-type modular inequalities*, Complex Var. and Elliptic Equat., DOI: 10.1080/17476933.2020.1783660.
31. A. Golberg, R. Salimov, *Nonlinear Beltrami equation*, Complex Var. and Elliptic Equat., **65**, № 1, 6 – 21 (2019).
32. O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, New York (1973).
33. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane*, Tracts Math., **19**, Warsaw etc. (2013).
34. E. Reich, H. Walczak, *On the behavior of quasiconformal mappings at a point*, Trans. Amer. Math. Soc., **117**, 338 – 351 (1965).
35. A. Schatz, *On the local behavior of homeomorphic solutions of Beltrami equation*, Duke Math. J., **35**, 289 – 306 (1968).
36. C. Andreian Cazacu, *Influence of the orientation of the characteristic ellipses on the properties of the quasiconformal mappings*, Proc. Rom. Finn. Sem., Romania (1969), Publ. House Acad. Soc. Rep. Rom., Bucharest (1971), p. 65 – 85.
37. M. A. Brakalova, J. A. Jenkins, *On solutions of the Beltrami equation*, J. Anal. Math., **76**, 67 – 92 (1998).
38. V. Gutlyanskii, T. Sugawa, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings*, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., **83**, 91 – 108 (2001).
39. V. Gutlyanskii, A. Golberg, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space*, J. Anal. Math., **109**, 233 – 251 (2009).
40. V. Gutlyanskii, A. Golberg, *Rings and Lipschitz continuity of quasiconformal mappings*, Analysis and Math. Phys. Trends Math., Birkhäuser, Basel (2009), p. 187 – 192.
41. V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugawa, M. Vuorinen, *On the degenerate Beltrami equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **357**, 875 – 900 (2005).
42. V. Ryazanov, R. Salimov, U. Srebro, E. Yakubov, *On boundary value problems for the Beltrami equations*, Contemp. Math., **591**, 211 – 242 (2013).
43. J. Maly, O. Martio, *Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$*, J. reine und angew. Math., **458**, 19 – 36 (1995).
44. K. Ikoma, *On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space*, Nagoya Math. J., **25**, 175 – 203 (1965).
45. С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949).

Одержано 28.11.20,
після доопрацювання — 17.02.21