DOI: 10.37863/umzh.v73i4.627

УДК 517.925

В. М. Євтухов, А. Г. Чернікова (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

We establish new results concerning the conditions of existence of one class of monotonous solutions of a two-term nonautonomous differential equation of the the second-order with a rapidly varying nonlinearity. These results essentially supplement the results of previous researches.

Встановлено нові результати про умови існування одного класу розв'язків двочленного неавтономного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю, що суттєво доповнюють результати попередніх досліджень.

1. Вступ. Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція, така що

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{1.2}$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — деякий однобічний окіл Y_0.

З умов (1.2) безпосередньо випливає, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty. \tag{1.3}$$

Згідно з (1.2) і (1.3) функція φ та її похідна першого порядку є (див. [1, с. 91, 92], леми 3.2, 3.3) швидко змінними функціями при $y \to Y_0$.

Означення 1.1. *Розв'язок y диференціального рівняння* (1.1) *називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений у деякому лівому околі ω і задовольняє умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{або} \quad 0, \\ \textit{або} \quad \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Далі, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[\quad \text{або} \quad]Y_0, y_0], \tag{1.4}$$

де $y_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ і $y_0 > 1$ ($y_0 < -1$) при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$), і покладемо

$$\nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0]. \end{cases} \tag{1.5}$$

Враховуючи означення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку диференціального рівняння (1.1), бачимо, що числа ν_0, ν_1 і α_0 визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку, його першої та другої похідних (відповідно) в деякому лівому околі ω. При цьому зрозуміло, що умови

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = 0, \quad \text{і} \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{1.6}$$

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \text{і} \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty, \tag{1.7}$$

є необхідними для існування таких розв'язків.

У [2] з використанням результатів із монографії [3, с. 174 – 180] було встановлено деякі важливі властивості двічі неперервно диференційовної функції φ, яка задовольняє умови (1.2). Саме завдяки цим властивостям у [2] вперше було отримано необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1) у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Крім того, було одержано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їхніх похідних. Згідно з результатами [4] (розд. 3, § 10) кожний $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок у випадку $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ має такі асимптотичні властивості:

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \quad \text{і} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1},$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Звідси з урахуванням властивостей правильно змінних функцій (див., наприклад, [5]) випливає, що кожний такий розв'язок і його похідна є нормалізованими правильно змінними при $t \uparrow \omega$ функціями з відмінними від нуля порядками. Однак слід зазначити, що встановлена в [2] для диференціального рівняння (1.1) теорема 3.2 про достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ містить деякі достатньо жорсткі обмеження на коефіцієнт p, які є додатковими до необхідних умов існування (теорема 3.1) таких розв'язків.

Метою даної роботи є спроба зняти деякі з цих жорстких обмежень на коефіцієнт p при встановленні фактичного існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1) у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

2. Основні результати. На відміну від [2] припускаємо, що функція p у диференціальному рівнянні (1.1) допускає зображення вигляду

$$p(t) = p_0(t)[1 + r(t)], \tag{2.1}$$

де $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервно диференційовна функція і $r : [a, \omega[\longrightarrow] - 1, +\infty[$ — неперервна функція, така що $r(t) = o(1)$ при $t \uparrow \omega$.

Крім того, поряд з (1.3), (1.4), (1.8) будемо використовувати такі позначення:

$$\mu_0 = \operatorname{sign} \varphi'(y), \quad J_0(t) = \int_A^t \pi_\omega(\tau) p_0(\tau)\, d\tau, \quad \Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi(s)},$$

де

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_a^{\omega} \pi_\omega(\tau) p_0(\tau)\, d\tau = \text{const}, \\ a, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_a^{\omega} \pi_\omega(\tau) p_0(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} Y_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \pm\infty, \end{cases}$$

а також при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ додаткові функції

$$q_0(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega^2(t) p_0(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1) J_0(t))\right)}{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1) J_0(t))},$$

$$H_0(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1) J_0(t)) \varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1) J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1) J_0(t))\right)}.$$

Тут функція Φ зростає на проміжку Δ_{Y_0} і прямує або до нуля, або до $\pm\infty$ при $y \to Y_0$. Тому для неї існує обернена функція $\Phi^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, де згідно з другою з умов (1.2) і зростанням Φ^{-1}

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases}$$

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \qquad z_0 = \varphi(y_0).$$

Згідно з правилом Лопіталя у формі Штольца й останньою з умов (1.2)

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi(y)}{\dfrac{1}{\varphi'(y)}} = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}}{-\dfrac{\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}} = -\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi'^2(y)}{\varphi''(y)\varphi(y)} = -1.$$

Таким чином,

$$\Phi(y) \sim -\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad \text{і} \quad \operatorname{sign}\Phi(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}.$$

З першого з цих співвідношень випливає, що

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}}{\Phi(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}, \qquad \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)} = \frac{-\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}\Phi(y)}{\dfrac{1}{\varphi^2(y)}} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Якщо у доведенні теореми 3.1 з роботи [2] скрізь, починаючи з формули (3.20), замінити функцію p, з урахуванням зображення (2.1), на функцію p_0, прийдемо до висновку, що для диференціального рівняння (1.1) має місце наступний аналог цієї теореми про необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ *і* $p(t) \sim p_0(t)$ *при* $t \uparrow \omega$, *де* $p_0 \colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — *неперервна функція. Тоді для існування* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків диференціального рівняння* (1.1) *необхідно, щоб виконувались умови*

$$\alpha_0\nu_0\lambda_0 > 0, \quad \alpha_0\mu_0(\lambda_0 - 1)J_0(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{2.2}$$

$$\alpha_0(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J_0(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_0(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.3}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)\right)\left[1 + \frac{o(1)}{H_0(t)}\right] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.4}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\frac{\Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)\right)}{\pi_\omega(t)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.5}$$

Найбільш вагомим є наступне твердження, що суттєво доповнює теорему 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай функція* p *допускає зображення вигляду* (2.1), $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ *і виконуються умови* (2.2), (2.3). *Тоді*:

1) *якщо* $\alpha_0\mu_0 = 1$ *та існують скінченні або рівні* $\pm\infty$ *границі*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)q_0'(t), \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}, \tag{2.6}$$

то існує однопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків диференціального рівняння* (1.1), *для кожного з яких мають місце асимптотичні зображення* (2.4) *і*

$$y'(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}q_0(t) + |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}}o(1)\right] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega; \tag{2.7}$$

2) *якщо* $\alpha_0\mu_0 = -1$, *існують скінченні або рівні* $\pm\infty$ *границі*

$$\gamma = \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z}}{\left|\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{1}{2}}} \quad \textit{при} \quad \gamma = \pm\infty \tag{2.8}$$

і виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left[q_0(t)[1 + r(t)] - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right]\int_{t_0}^{t}\frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = 0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q_0(t)\right)) + \frac{r(t)}{\lambda_0 - 1} - \frac{\pi_\omega(t)q_0'(t)}{q_0(t)}\right]\left(\int_{t_0}^{t}\frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^2 = 0, \tag{2.10}$$

де t_0 *— деяке число з проміжку* $[a, \omega[$, *то у кожному з двох випадків*

$$|\gamma| < +\infty, \quad \gamma \neq -1, \quad 3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\gamma = \pm\infty, \quad \lambda_0 \neq \frac{4}{5} \tag{2.12}$$

диференціальне рівняння (1.1) *має хоча б один* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язок, що допускає при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)) \left[1 + \left(H_0(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right], \tag{2.13}$$

$$y'(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))}{\pi_\omega(t)} \left[q_0(t) + |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right], \tag{2.14}$$

причому існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями, коли у випадку (2.11) *виконується нерівність*

$$\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + \gamma)[3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma] < 0,$$

а у випадку (2.12) *— нерівність* $(\lambda_0 - 1)(5\lambda_0 - 4) < 0$.

Доведення. В [2] при доведенні теореми 1.2 було встановлено, що у випадку існування скінченної або рівної $\pm\infty$ другої з границь (2.4) її значенням може бути лише нуль. Покажемо, що перша з цих границь при умові її існування також дорівнює нулю. Дійсно, якщо б ця границя була відмінна від нуля, то мали б рівність

$$q_0'(t) = \frac{\gamma(t)}{\pi_\omega(t)}, \tag{2.15}$$

де функція γ неперервна на деякому проміжку $[t_0, \omega[\subset]a, \omega[$ і така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \gamma(t) = \begin{cases} \text{або} & \text{const} \neq 0, \\ \text{або} & \pm\,\infty. \end{cases}$$

Оскільки, крім того, $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_0)}\right| \longrightarrow \pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, то в результаті інтегрування (2.15) на проміжку від t_0 до t одержимо, що

$$q_0(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Проте це суперечить третій з умов (2.3).

Таким чином, у випадку існування скінченних або рівних $\pm\infty$ границь (2.6)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) q_0'(t) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|} = 0. \tag{2.16}$$

Далі, покажемо, що у випадку існування скінченних або рівних $\pm\infty$ границь (2.8) при виконанні умов (2.9), (2.10) також мають місце граничні співвідношення (2.16) і для другої з границь (2.8) має місце співвідношення

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z}}{\left|\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{1}{2}}} = 2 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm\infty. \tag{2.17}$$

Оскільки на підставі другої з умов (2.2), першої з умов (2.3), властивостей функції Φ і (1.3)

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_0(t) = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{2.18}$$

то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau = \pm\infty. \tag{2.19}$$

Тому з (2.10) із урахуванням третьої з умов (2.3) і того, що $r(t) = o(1)$ при $t\uparrow\omega$, випливає справедливість першого з граничних співвідношень (2.16).

При $\gamma = \pm\infty$ покладемо

$$\psi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z}.$$

Тоді з використанням правила Лопіталя знаходимо

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\psi'(y)}{\psi(y)} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \left(1 + \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}\right) = \pm\infty,$$

тобто функція ψ є швидко змінною при $y\to Y_0$. Крім того, маємо

$$\frac{\psi''(y)\psi(y)}{\psi'^2(y)} = \left(-1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}\right)\right) \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z}}{\left|\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{1}{2}}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z}}{\left|\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при} \quad y\to Y_0. \tag{2.20}$$

Звідси згідно з існуванням скінченної або рівної $\pm\infty$ другої з границь (2.8) випливає існування скінченної або рівної $\pm\infty$ границі для функції, що стоїть зліва у (2.20). Оскільки

$$\frac{\psi''(y)\psi(y)}{\psi'^2(y)} = \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} + 1$$

і функція ψ є швидко змінною при $y \to Y_0$, то неважко перевірити (див., наприклад, [4], розд. III, § 11), що цією границею може бути лише одиниця, оскільки в протилежному випадку функція ψ є правильно змінною при $y \to Y_0$. Тому з (2.20) випливає справедливість граничного співвідношення (2.17). В свою чергу з (2.17), оскільки $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \frac{dz}{z} \longrightarrow \pm\infty$ при $y \to Y_0$, випливає справедливість другого з граничних співвідношень (2.10).

Таким чином, у подальшому потрібно вважати виконаними умови (2.16), (2.17).

Тепер диференціальне рівняння (1.1) за допомогою замін

$$\begin{gathered} y(t) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)\right)\left[1 + \frac{y_1}{H_0(t)}\right], \\ y'(t) = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)\right)[1 + y_2(t)] \end{gathered} \tag{2.21}$$

зведемо таким же чином, як у [2] при доведенні теореми 3.2, до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} y_1' = \frac{H_0(t)}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q_0(t) + h_0(t)y_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}y_2\right], \\ y_2' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}q_0(t) + \frac{q_0(t)r(t)}{\lambda_0} + \frac{q_0(t)[1 + r(t)]}{\lambda_0}y_1 + \right. \\ \left. + \left(1 - q_0(t)\right)y_2 + \frac{q_0(t)[1 + r(t)]}{\lambda_0}R(t, y_1)\right], \end{gathered} \tag{2.22}$$

в якій

$$h_0(t) = q_0(t)\left.\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))},$$

$$R(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t)) + \dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))\right)}y_1\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))\right)} - 1 - y_1.$$

У цій системі внаслідок умов (1.2), (1.3), (2.2) і (2.3)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_0(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_0(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} H_0(t) = \pm\infty. \tag{2.23}$$

Крім того, в [2] встановлено, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta \in]0, 1[$ і $t_1 \in [t_0, \omega[$, що

$$|R(t, y_1)| \le (1 + \varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{і} \quad y_1 \in D_{1\delta} = \{y_1 : |y_1| \le \delta\}. \tag{2.24}$$

Вибираючи довільним чином число $\varepsilon > 0$, далі систему рівнянь (2.22) будемо розглядати на множині

$$\Omega = [t_1, \omega[\times D_{1\delta} \times D_{2\delta}, \quad \text{де} \quad D_{i\delta} = \{y_i : \ |y_i| \le \delta\} \quad i = 1, 2.$$

Щоб довести існування розв'язків диференціального рівняння (1.1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (2.4), (2.5), достатньо згідно з замінами (2.21) встановити існування розв'язків системи диференціальних рівнянь (2.22), що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Це можна виконати, зокрема, використавши відомі результати з работи [6]. Для цього потрібно звести систему (2.22) за допомогою додаткових перетворень до вигляду, який допускає їхнє застосування. Крім цього, необхідно подбати про можливість зняття вказаних вище жорстких обмежень у теоремі 3.2 з роботи [2].

Спочатку застосуємо до системи (2.22) перетворення

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = -1 + \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q_0(t) + x_2(t), \tag{2.25}$$

яке полягає в тому, щоб вилучити з першого рівняння системи неоднорідний доданок. У результаті цього перетворення одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{H(t)}{\pi_\omega(t)} \left[h_0(t) x_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} x_2 \right], \\ x_2' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[\left(1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q_0(t) \right) q_0(t) + \frac{q_0(t) r(t)}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \pi_\omega(t) q_0'(t) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{q_0(t)[1 + r(t)]}{\lambda_0} x_1 \left(1 - q_0(t)\right) x_2 + \frac{q_0(t)[1 + r(t)]}{\lambda_0} R(t, x_1) \right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Далі, щоб „зрівняти" коефіцієнти при лінійних частинах у першому і другому рівняннях системи, застосуємо до системи (2.26) додаткове перетворення

$$x_1(t) = v_1(t), \quad x_2(t) = |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t). \tag{2.27}$$

При цьому отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{|H_0(t)|^{\frac{1}{2}}}{\pi_\omega(t)} \left[c_{11}(t) v_1 + c_{12}(t) v_2 \right], \\ v_2' &= \frac{|H_0(t)|^{\frac{1}{2}}}{\pi_\omega(t)} \left[f(t) + c_{21}(t) v_1 + c_{22}(t) v_2 + V(t, v_1) \right], \end{aligned} \tag{2.28}$$

де

$$f(t) = \left(1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q_0(t) \right) q_0(t) + \frac{q_0(t) r(t)}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \pi_\omega(t) q_0'(t),$$

$$c_{11}(t) = h_0(t) |H_0(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} H_0(t), \quad c_{12}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \operatorname{sign} H_0(t),$$

$$c_{21}(t) = \frac{q_0(t)[1 + r(t)]}{\lambda_0}, \quad c_{22}(t) = |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{q_0(t)}{2} + \frac{q_0(t) h_0(t)}{2} H_0(t) \right),$$

$$V(t,v_1)=\frac{q_0(t)[1+r(t)]}{\lambda_0}R(t,v_1).$$

Праві частини цієї системи є неперервними на множині

$$\Omega_1=\{(t,v_1,v_2)\in\mathbb{R}^3:\ t\in[t_1,\omega[,\ v_1,\,v_2\in[-\delta,\delta]\}.$$

Крім того, внаслідок (2.24), умов (2.16), (2.23), (2.19) і того, що $r(t)=o(1)$ при $t\uparrow\omega$, маємо

$$\lim_{v_1\to 0}\frac{V(t,v_1)}{v_1}=0 \quad \text{рівномірно по} \quad t\in[t_1,\omega[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}f(t)=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}c_{11}(t)=0,\quad c_{12}(t)\equiv\frac{\nu_0\mu_0\lambda_0}{\lambda_0-1},\quad \lim_{t\uparrow\omega}c_{21}(t)=\frac{1}{\lambda_0-1}, \tag{2.29}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}c_{22}(t)=0,\quad \int\limits_{t_1}^{\omega}\frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau=\pm\infty. \tag{2.30}$$

Звідси, зокрема, випливає, що гранична матриця коефіцієнтів, які стоять при v_1 і v_2 у квадратних дужках системи (2.28), має вигляд

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\nu_0\mu_0\lambda_0}{\lambda_0-1}\\ \dfrac{1}{\lambda_0-1} & 0\end{pmatrix}$$

і її характеристичним рівнянням є рівняння

$$\rho^2-\frac{\nu_0\mu_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}=0. \tag{2.31}$$

Тут згідно з першою з нерівностей (2.2) $\operatorname{sign}(\nu_0\mu_0\lambda_0)=\alpha_0\mu_0$.

Припустимо спочатку, що $\alpha_0\mu_0=1$ і виконуються умови (2.16). У цьому випадку алгебраїчне рівняння (2.31) має дійсні корені різних знаків. Отже, з урахуванням (2.29), (2.30) і (2.24) встановлено, що при $\alpha_0\mu_0=1$ система диференціальних рівнянь (2.28) задовольняє всі умови теореми 2.2 із роботи [6]. Згідно з цією теоремою, система диференціальних рівнянь (2.28) має однопараметричну сім'ю зникаючих при $t\uparrow\omega$ розв'язків $(v_1,v_2)\colon[t_*,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $t_*\in[t_1,\omega[$. Кожному з них внаслідок замін (2.21), (2.25) і (2.27) відповідає розв'язок $y\colon [t_*,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ диференціального рівняння (1.1), що допускає асимптотичні зображення (2.4) і (2.7). При цьому з використанням умов (1.2), (2.2), (2.3) і зображень (2.4), (2.7) неважко переконатися в тому, що будь-який із цих розв'язків є $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язком диференціального рівняння (1.1).

Таким чином, доведено перше твердження теореми.

Нехай тепер $\alpha_0\mu_0=-1$, існують скінченні або рівні $\pm\infty$ границі (2.8) і виконуються умови (2.9), (2.10). Тоді, як було встановлено раніше, мають місце граничні співвідношення (2.16) і (2.17). У цьому випадку корені алгебраїчного рівняння (2.31) є чисто уявними. Він є „критичним” і потребує більш детального дослідження, ніж перший випадок.

Застосуємо спочатку до системи диференціальних рівнянь (2.28) перетворення

$$v_1(t) = \bar{v}_1(\tau), \quad v_2(t) = \bar{v}_2(\tau) + \frac{c}{\tau}\bar{v}_1(\tau), \quad \tau = \int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H_0(s)|^{\frac{1}{2}}\, ds}{|\pi_\omega(s)|}, \tag{2.32}$$

де дійсну сталу c буде вибрано пізніше. При цьому $\tau(t_1) = 0,\ \tau'(t) > 0$ при $t \in]t_1, \omega[$ і згідно з (2.20) $\tau(t) \longrightarrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$.

В результаті цього перетворення отримуємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \bar{v}_1' &= \beta\left[m_{11}(\tau)\bar{v}_1 - \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0 - 1}\bar{v}_2\right], \\ \bar{v}_2' &= \beta\left[\bar{f}(\tau) + \left(\frac{1}{\lambda_0 - 1} + m_{21}(\tau)\right)\bar{v}_1 + m_{22}(\tau)\bar{v}_2 + \bar{V}(\tau, \bar{v}_1)\right], \end{aligned} \tag{2.33}$$

де

$$\beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t), \quad \tilde{f}(\tau(t)) = f(t), \quad \tilde{V}(\tau(t), \tilde{v}_1) = V(t, v_1),$$

$$m_{11}(\tau(t)) = c_{11}(t) - \frac{c|\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)\tau(t)}, \quad m_{22}(\tau(t)) = c_{22}(t) + \frac{c|\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)\tau(t)},$$

$$m_{21}(\tau(t)) = c_{21}(t) - \frac{1}{\lambda_0 - 1} + \frac{c}{\tau(t)}(c_{22}(t) - c_{11}(t)) + \frac{\beta c}{\tau^2(t)} + \frac{c^2|\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)\tau^2(t)}.$$

Тут згідно з умовами (2.29), (2.30) і (2.21)

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tilde{f}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} m_{ii}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \lim_{\tau \to +\infty} m_{21}(\tau) = 0,$$

$$|\tilde{V}(\tau, \tilde{v}_1)| \le K\tilde{v}_1^2 \quad \text{при} \quad \tau \in]0, +\infty[\quad \text{і} \quad |\tilde{v}_1| < \delta,$$

де K — деяка додатна стала.

Покажемо, що у випадках, коли $\gamma = \text{const} \neq -1$ і $\gamma = \pm\infty$, сталу c можна выбрати таким чином, щоб виконувалась умова

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)) = 0. \tag{2.34}$$

Покладемо

$$G(\tau) = \tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)).$$

Тоді

$$G(\tau(t)) = \beta \int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H_0(s)|^{\frac{1}{2}} ds}{\pi_\omega(s)}(c_{22}(t) - c_{11}(t)) + \frac{2c|\lambda_0|}{\lambda_0 - 1} = \frac{2c|\lambda_0|}{\lambda_0 - 1} +$$

$$+ \frac{\beta \int_{t_1}^{t} \frac{|H_0(s)|^{\frac{1}{2}} ds}{\pi_\omega(s)}}{|H_0(t)|^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{q_0(t)}{2}\right)\left(1 - q_0(t)\frac{y\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}\Bigg|_{y = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J_0(t))}\right). \tag{2.35}$$

Згідно з виглядом функції q_0 і третьою з умов (2.3)

$$\int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H_0(s)|^{\frac{1}{2}}\,ds}{\pi_\omega(s)} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t} \left| \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(s))\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(s))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(s))\right)} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(s))\right)'\,ds}{q_0(s)\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(s))} \sim$$

$$\sim \frac{1}{q_0(t)} \int\limits_{z(t_1)}^{z(t)} \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z} \sim \frac{\lambda_0-1}{\lambda_0} \int\limits_{z(t_1)}^{z(t)} \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z}, \tag{2.36}$$

де

$$z(t) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t)\right) \longrightarrow Y_0 \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

При $\gamma = \text{const}$ функція $\left|\dfrac{\varphi'(z)}{z\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}}$ є правильно змінною при $z \to Y_0$ функцією порядку $\dfrac{\gamma-1}{2}$, і тому згідно з властивостями правильно змінних функцій при $\gamma \neq -1$ маємо асимптотичне співвідношення

$$\int\limits_{Y(t_1)}^{Y(t)} \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z} = \frac{2}{\gamma+1} \left|\frac{Y(t)\varphi'(Y(t))}{\varphi(Y(t))}\right|^{\frac{1}{2}} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому з (2.35) при $\gamma = \text{const} \neq -1$, враховуючи третю з умов (2.3) і вигляд функції H_0, одержуємо

$$G(\tau(t)) = \frac{2c|\lambda_0|}{\lambda_0-1} + \frac{\beta(\lambda_0-2)(\lambda_0-1-\lambda_0\gamma)}{\lambda_0(\gamma+1)(\lambda_0-1)} + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси випливає, що якщо вибрати сталу c таким чином:

$$c = -\frac{\beta(\lambda_0-2)(\lambda_0-1-\lambda_0\gamma)}{2\lambda_0|\lambda_0|(1+\gamma)} \quad \text{при} \quad \gamma = \text{const} \neq -1, \tag{2.37}$$

то буде виконуватись умова (2.34).

У випадку $\gamma = \pm\infty$, згідно з (2.35) і (2.36),

$$G(\tau(t)) = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\lambda_0-2}{\lambda_0-1} + o(1)\right) \left.\frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} \frac{\int_{z(t_1)}^{y} \left|\dfrac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \dfrac{dz}{z}}{\left|\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{1}{2}}}\right|_{y=z(t)} + \frac{2c|\lambda_0|}{\lambda_0-1}$$

при $t \uparrow \omega$, і оскільки виконується умова (2.17), то

$$G(\tau(t)) = -\beta\left(\frac{\lambda_0-2}{\lambda_0-1} + o(1)\right) + \frac{2c|\lambda_0|}{\lambda_0-1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси випливає, що умова (2.34) виконується, якщо

$$c = \frac{\beta(\lambda_0 - 2)}{2|\lambda_0|} \quad \text{при} \quad \gamma = \pm\infty. \tag{2.38}$$

Далі будемо вважати, що сталу c у перетворенні (2.32) вибрано саме за формулами (2.37), (2.38).

Враховуючи вищевикладене, неважко перевірити, що при цьому

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau[m_{22}(\tau) + m_{11}(\tau)] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta\left((\lambda_0 - 2)(\lambda_0 - 1) + \gamma\lambda_0(3\lambda_0 - 1)\right)}{(\gamma+1)(\lambda_0 - 1)\lambda_0} & \text{при} \quad \gamma = \mathrm{const} \neq -1, \\ \dfrac{\beta(3\lambda_0 - 2)}{\lambda_0 - 1} & \text{при} \quad \gamma = \pm\infty. \end{cases} \tag{2.39}$$

Крім того, з урахуванням умов (2.9), (2.29) і (2.30) маємо

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau m_{21}(\tau) = 0. \tag{2.40}$$

Тепер, застосовуючи до системи рівнянь (2.33) додаткове перетворення

$$\begin{pmatrix} \tilde v_1(\tau) \\ \tilde v_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau & -\sin\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau \\ \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_0|}}\sin\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau & \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_0|}}\cos\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{z_1(\tau)}{\tau} \\ \dfrac{z_2(\tau)}{\tau}, \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} z_1' &= \frac{1}{\tau}\left(g_1(\tau) + b_{11}(\tau)z_1 + b_{12}(\tau)z_2 + Z_1(\tau, z_1, z_2)\right), \\ z_2' &= \frac{1}{\tau}\left(g_2(\tau) + b_{21}(\tau)z_1 + b_{22}(\tau)z_2 + Z_2(\tau, z_1, z_2)\right), \end{aligned} \tag{2.42}$$

в якій

$$g_1(\tau) = \beta\tilde f(\tau)\tau^2 \sin\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau, \quad g_2(\tau) = \beta\tilde f(\tau)\tau^2 \cos\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau,$$

$$Z_1(\tau, z_1, z_2) = \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\tilde V\left(\tau, \frac{z_1}{\tau}\cos\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1} - \frac{z_2}{\tau}\sin\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau\right)\sin\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau,$$

$$Z_2(\tau, z_1, z_2) = \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\tilde V\left(\tau, \frac{z_1}{\tau}\cos\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1} - \frac{z_2}{\tau}\sin\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau\right)\cos\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau,$$

$$b_{11}(\tau) = 1 + \frac{\beta\tau}{2}[m_{11}(\tau) + m_{22}(\tau)] + \frac{\beta\tau}{2}[m_{11}(\tau) - m_{22}(\tau)]\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau +$$

$$+ \frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}\,\tau}{2} m_{21}(\tau)\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau,$$

$$b_{12}(\tau) = \frac{\beta\tau}{2}[m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)]\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau - \frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau}{2} m_{21}(\tau)\left(1 - \cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau\right),$$

$$b_{21}(\tau) = \frac{\beta\tau}{2}[m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)] \sin \frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\,\tau + \frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau}{2} m_{21}(\tau) \left(1 + \cos \frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\,\tau\right),$$

$$b_{22}(\tau) = 1 + \frac{\beta\tau}{2}[m_{11}(\tau) + m_{22}(\tau)] - \frac{\beta\tau}{2}[m_{11}(\tau) - m_{22}(\tau)] \cos \frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\,\tau -$$

$$- \frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}\,\tau}{2} m_{21}(\tau) \sin \frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\,\tau.$$

Тут згідно з третьою з умов (2.3) і (2.10)

$$\lim_{\tau\to+\infty} g_i(\tau) = 0, \quad i = 1, 2,$$

а згідно з (2.34), (2.39) і (2.40)

$$\lim_{\tau\to+\infty} b_{12}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} b_{21}(\tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} b_{ii}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma}{2\lambda_0(\gamma + 1)} & \text{при} \quad \gamma = \mathrm{const} \neq -1, \\ \dfrac{5\lambda_0 - 4}{2(\lambda_0 - 1)} & \text{при} \quad \gamma = \pm\infty, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Крім того, згідно з оцінкою (2.24)

$$|Z_i(\tau, z_1, z_2)| < (1 + \varepsilon) \left| \frac{q_0(t(\tau))[1 + r(t(\tau))]}{\lambda_0} \right| (|z_1| + |z_2|)^2$$

на множині $D = [1 + \infty[\times \{(z_1, z_2) : |z_i| < \delta,\ i = 1, 2\}$, де $t(\tau)$ — функція, що обернена до $\tau(t)$, і тому з урахуванням третьої з умов (2.3), а також (2.1) маємо

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{Z_i(\tau, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad \tau \in [0, +\infty[.$$

На підставі вищевикладеного система диференціальних рівнянь (2.42) у кожному з випадків (2.11) і (2.12) задовольняє всі умови теореми 2.2 з роботи [6]. Згідно з цією теоремою, система диференціальних рівнянь (2.42) має хоча б один розв'язок $(z_1, z_2) : [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \tau_0 \geq 1$, який прямує до нуля при $\tau \to +\infty$, причому існує двопараметрична сім'я таких розв'язків, якщо у випадку (2.11) виконується нерівність $\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + \gamma)[3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma] < 0$, а у випадку (2.12) — нерівність $(\lambda_0 - 1)(5\lambda_0 - 4) < 0$. Кожному такому розв'язку системи диференціальних рівнянь (2.42) відповідає внаслідок перетворень (2.21), (2.25), (2.27), (2.32) і (2.41) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок $y : [t_2, \omega[\longrightarrow \mathbb{R},\ t_0 \in [a, \omega[$, диференціального рівняння (1.1), для якого мають місце асимптотичні зображення (2.13) і (2.14).

Теорему повністю доведено.

3. Приклади. Зазначимо, що отримана при доведенні теореми 2.2 система диференціальних рівнянь (2.28) у випадку, коли

$$\left(1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q_0(t)\right) q_0(t) + \frac{q_0(t) r(t)}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \pi_\omega(t) q_0'(t) \equiv 0, \tag{3.1}$$

має нульовий розв'язок, якому внаслідок замін (2.25) і (2.27) відповідає $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язок y диференціального рівняння (1.1) вигляду

$$y(t)=\Phi^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t)\right). \tag{3.2}$$

Виходячи з тотожності (3.1) при $r(t)\equiv 0$, тобто з тотожності

$$\left(1-\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}q_0(t)\right)q_0(t)-\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\pi_\omega(t)q_0'(t)\equiv 0, \tag{3.3}$$

побудуємо, з використанням необхідних умов (2.2) і (2.3) існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, приклад диференціального рівняння (1.1), яке має такі розв'язки.

Відносно q_0 співвідношення (3.3) є диференціальним рівнянням Бернуллі. Інтегруючи це рівняння з урахуванням третьої з умов (2.3), одержуємо

$$q_0(t)=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1}{1+c_0|\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}},$$

де c_0 — довільне дійсне число, якщо $\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0$, і $c_0=0$, якщо $\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)<0$. Звідси згідно з виглядом функції q_0 (з теореми 2.1) маємо

$$\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega^2(t)p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))\right)}{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1}{1+c_0|\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}}.$$

Після ділення даного співвідношення на $\pi_\omega(t)$ помічаємо, що отримане при цьому співвідношення можна записати у вигляді

$$\frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1}{\pi_\omega(t)\left[1+c_0|\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right]}.$$

Звідси в результаті інтегрування знаходимо

$$\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t))=c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}+c_0\right), \tag{3.4}$$

де c_1 — довільна відмінна від нуля стала, така що $\operatorname{sign} c_1=\nu_0$.

Із (3.4) випливає, що

$$\alpha_0(\lambda_0-1)J_0(t)=\Phi\left(c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}+c_0\right)\right). \tag{3.5}$$

В результаті диференціювання цієї тотожності отримуємо тотожність вигляду

$$\alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p_0(t)=\frac{\dfrac{c_1\lambda_0}{\lambda_0-1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{\varphi\left(c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}+c_0\right)\right)}.$$

Отже,

$$p_0(t) = \frac{\alpha_0 c_1 \lambda_0}{(\lambda_0 - 1)^2} \frac{|\pi_\omega(t)|^{\frac{2-\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}}{\varphi\left(c_1(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0)\right)}. \tag{3.6}$$

Оскільки $\operatorname{sign} c_1 = \nu_0$ і виконується перша з нерівностей (2.2), то дана функція є додатною в деякому лівому околі ω.

Таким чином, отримано диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p_0(t)\varphi(y), \tag{3.7}$$

в якому функція p_0 має вигляд (3.6) і яке згідно з (3.2) і (3.4) має розв'язок

$$y(t) = c_1 \left[|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right]. \tag{3.8}$$

У цьому неважко переконатись і безпосередньою підстановкою цієї функції у рівняння (3.7). Даний розв'язок диференціального рівняння (3.7), очевидно, є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком. При цьому

$$\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty,$$
$$\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = 0,$$

тобто виконуються умови (1.6), в яких $\nu_1 = \operatorname{sign} y'(t)$ і визначається другою з формул (1.5). Враховуючи тотожність (3.5), вигляд функції q_0, а також умови (1.3) і властивості функції Φ, які були вказані у першому пункті, приходимо до висновку, що для диференціального рівняння (3.7) виконанано другу з нерівностей (2.2), умови (2.3) і першу з умов (2.16).

Тому, якщо $\alpha_0\mu_0 = 1$ і для функції φ існує скінченна або рівна $\pm\infty$ друга з границь (2.6), на підставі теореми 2.2 диференціальне рівняння (3.7), окрім розв'язку (3.8), має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, що допускають асимптотичні зображення

$$y(t) = c_1 \left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)\left[1 + \frac{o(1)}{H_0(t)}\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.9}$$

$$y'(t) = \frac{c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{1}{1 + c_0|\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}} + |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.10}$$

де

$$H_0(t) = \frac{c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)\varphi'\left(c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)\right)}{\varphi\left(c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)\right)}.$$

Якщо $\alpha_0\mu_0 = -1$, для функції φ існують скінченні або рівні $\pm\infty$ границі (2.8) і

$$\lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \tag{3.11}$$

то на підставі теореми 2.2 диференціальне рівняння (3.7) має хоча б один $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок, що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = c_1 \left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} + c_0 \right) \left[1 + \left(H_0(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right], \tag{3.12}$$

$$y'(t) =$$

$$= \frac{c_1 \left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} + c_0 \right)}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{1}{1 + c_0 |\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}} + |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right] \tag{3.13}$$

(можливо лише один вигляду (3.8)). Більш того, існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями, якщо у випадку (2.11) виконується нерівність $\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + \gamma)[3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma] < 0$, а у випадку (2.12) – нерівність $(\lambda_0 - 1)(5\lambda_0 - 4) < 0$.

Тепер розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]\varphi(y), \tag{3.14}$$

де функція p_0 та ж, що і в (3.7), а $r : [a, \omega[\longrightarrow] - 1, +\infty[$ — неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Для цього рівняння, очевидно, виконуються умови (2.2), (2.3) і перша з умов (2.16). Тоді відповідно до теореми 2.2:

1) якщо $\alpha_0\mu_0 = 1$ і для функції φ існує скінченна або рівна $\pm\infty$ друга з границь (2.6), то диференціальне рівняння (3.14) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.9), (3.10);

2) якщо $\alpha_0\mu_0 = -1$, для функції φ існують скінченні або рівні $\pm\infty$ границі (2.8) і поряд з (3.11)

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \right)^2 = 0, \tag{3.15}$$

то диференціальне рівняння (3.14) має хоча б один $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок, що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.12), (3.13), причому існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями, якщо у випадку (2.11) виконується нерівність $\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + \gamma)[3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma] < 0$, а у випадку (2.12) — нерівність $(\lambda_0 - 1)(5\lambda_0 - 4) < 0$.

Далі розглянемо рівняння вигляду

$$y'' = p(t) e^{-\frac{1}{y}} \tag{3.16}$$

і

$$y'' = p(t) e^{y}, \tag{3.17}$$

в яких $p\colon [a,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ — неперервна функція. Для цих рівнянь $\omega=+\infty,\ \alpha_0=\mu_0=1$. Згідно з результатами, що викладені в монографії [7, с. 262 – 270], перше з цих рівнянь при умові

$$\int\limits_a^{+\infty} tp(t)\,dt=+\infty \tag{3.18}$$

має однопараметричну сім'ю кнезеровських розв'язків, тобто таких, що

$$y(t)>0,\quad y'(t)<0\quad \text{при}\quad t\ge a,\quad \lim_{t\to+\infty} y(t)=0,$$

а друге рівняння при умові

$$\int\limits_a^{+\infty} p(t)e^{rt}\,dt<+\infty\quad \text{для будь-якого}\quad r>0 \tag{3.19}$$

має однопараметричну сім'ю швидко зростаючих (за термінологією І. Т. Кігурадзе) розв'язків, тобто таких, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{t}=+\infty.$$

Використавши побудований на початку даного пункту приклад рівняння, яке при $\lambda_0\in\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ має $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, одержимо рівняння вигляду (3.16) і (3.17), які мають відповідно кнезеровські і швидко зростаючі $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, а також встановимо асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх похідних.

Спочатку при $0<\lambda_0<1$ розглянемо рівняння (3.16), в якому функція p допускає зображення вигляду

$$p(t)=Ct^{\frac{2-\lambda_0}{\lambda_0-1}}e^{\frac{\lambda_0}{C(\lambda_0-1)^2}t^{\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}}}[1+r(t)], \tag{3.20}$$

де C — довільна додатна стала, а $r\colon [a,+\infty[\longrightarrow]-1,+\infty[$ — неперервна функція, що прямує до нуля при $t\to+\infty$. З урахуванням (3.15) і (3.6) $c_1=\dfrac{C(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}$ і $c_0=0$. Враховуючи, що $\alpha_0\mu_0=1$, на підставі викладеного вище приходимо до висновку, що диференціальне рівняння (3.16) з функцією p вигляду (3.20) має однопараметричну сім'ю $P_{+\infty}(0,\lambda_0)$-розв'язків, які допускають при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення

$$y(t)=t^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\left[\frac{C(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}+o\left(t^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right],$$

$$y'(t)=t^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\left[C(\lambda_0-1)+o\left(t^{\frac{\lambda_0}{2(\lambda_0-1)}}\right)\right].$$

Оскільки $0<\lambda_0<1$, то кожний такий $P_{+\infty}(0,\lambda_0)$-розв'язок є кнезеровським. При цьому виконується умова (3.18).

Тепер припустимо, що число λ_0 задовольняє нерівність $\lambda_0>1$. При такому значенні λ_0 розглянемо рівняння (3.17), в якому функція p має вигляд

$$p(t) = Ct^{\frac{2-\lambda_0}{\lambda_0-1}} e^{-\frac{C(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} t^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}} [1 + r(t)],$$

де C — довільна додатна стала, а $r : [a, +\infty[\longrightarrow] -1, +\infty[$ — неперервна функція, що прямує до нуля при $t \to +\infty$. Це рівняння згідно з прикладом, який доведено на початку даного пункту, має однопараметричну сім'ю $P_{+\infty}(+\infty, \lambda_0)$-розв'язків, для яких при $t \to +\infty$ мають місце асимптотичні зображення

$$y(t) = t^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} \left[\frac{C(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} + o\left(t^{\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}}\right) \right], \tag{3.21}$$

$$y'(t) = t^{\frac{1}{\lambda_0-1}} \left[C(\lambda_0-1) + o\left(t^{\frac{\lambda_0}{2(1-\lambda_0)}}\right) \right]. \tag{3.22}$$

Оскільки $\lambda_0 > 1$, то кожний такий $P_{+\infty}(+\infty, \lambda_0)$-розв'язок є швидко зростаючим при $t \to +\infty$ і при цьому виконується умова (3.19).

Зазначимо, що при $\lambda_0 < 0$ останнє рівняння має однопараметричну сім'ю $P_{+\infty}(-\infty, \lambda_0)$-розв'язків, що допускають при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (3.21), (3.22). Ці розв'язки на відмінну від кнезеровських і швидко спадаючих задовольняють умови

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t} = 0.$$

Література

1. V. Marić, *Regular variation and differential equations,* Lect. Notes Math., **1726** (2000).
2. В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями*, Укр. мат. журн., **69**, № 10, 1315 – 1363 (2017).
3. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987).
4. В. М. Евтухов, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Киев (1998).
5. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва (1985).
6. В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 52 – 80 (2010).
7. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений,* Наука, Москва (1990).

Одержано 02.05.18,
після доопрацювання — 22.02.21