DOI: 10.37863/umzh.v73i5.6541

УДК 517.968.4

Х. А. Хачатрян (Єреван. держ. ун-т, Ін-т математики НАН Вірменії,
Моск. держ. ун-т ім. М. В. Ломоносова, Росія),
А. С. Петросян (Нац. аграр. ун-т Вірменії, Моск. держ. ун-т ім. М. В. Ломоносова, Росія)

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ПЛОЩИНІ ТА РІВНЯННЯ УРИСОНА НА ЧВЕРТІ ПЛОЩИНІ*

We study a class of two-dimensional integral equations in the plane with monotonic nonlinearity. These equations have a lot of applications in many fields of natural science. For example, such equations arise in the dynamic theory of p-adic open-closed strings, in the mathematical theory of spatio-temporal spread of epidemics, in the kinetic theory of gases (the Boltzmann kinetic equation in the framework of various models), in the theory of radiative transfer.

We prove a constructive existence theorem for bounded nontrivial solutions and for solutions with alternating sign. It is shown that obtained results have applications in the theory of p-adic open-closed strings and in mathematical biology. The methods used in the proof of the theorem make it possible to investigate a class of two-dimensional integral equations of the Urysohn type in a quadrant of the plane. At the end of the paper, we provide specific examples of applications of these equations to illustrate the obtained results.

Досліджується один клас двовимірних інтегральних рівнянь на площині з монотонною нелінійністю. Багато окремих випадків вказаного рівняння мають застосування в різних областях природознавства. Зокрема, такі рівняння виникають у динамічній теорії p-адичних відкрито-замкнених струн, у математичній теорії просторово-часового поширення епідемії, в кінетичній теорії газів (кінетичне рівняння Больцмана у рамках різних моделей), у теорії перенесення випромінювання.

Доведено конструктивну теорему існування обмеженого нетривіального і знакозмінного розв'язку. Отримані результати застосовуються в теорії p-адичних відкрито-замкнених струн і в математичній біології. Методи, використані при доведенні теореми, дають можливість вивчити клас двовимірних інтегральних рівнянь типу Урисона на чверті площини. Отримані результати проілюстровано на конкретних прикладах.

1. Вступ і постановка задачі. Розглянемо клас нелінійних двовимірних інтегральних рівнянь на площині $\mathbb{R}^2$:

$$Q(f(x,y)) = \lambda_1(|x|,|y|) \int\limits_{\mathbb{R}^2} K(x-x', y-y')\lambda_2(|x'|,|y'|) f(x',y')dx'dy', \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

відносно шуканої обмеженої функції $f(x,y)$. У рівнянні (1) ядро K — визначена на $\mathbb{R}^2$ вимірна й обмежена функція, що задовольняє такі умови:

I) $K(x,y) > 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y)dxdy = 1,$

II) моменти ядра K до другого порядку включно скінченні:

$$m_j := \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^j K(x,y)dxdy < +\infty, \quad j = 0,1,2,$$

III) $K(x,y) = K(y,x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+ := [0,+\infty),\ K(-x,s) = K(x,s),$ $x \in \mathbb{R}^+,\ s \in \mathbb{R},$

* Підтримано грантом Російського наукового фонду (проєкт № 19-11-00223).

IV) при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}^+$ ядро $K(x,y)$ монотонно спадає по x на $\mathbb{R}^+$,

V) для всіх точок площини вигляду $A = (x - x', y - y'),\ B = (x + x', y - y'),\ C = (x + x', y + y'),\ D = (x - x', y + y'),\ x, x', y, y' \in \mathbb{R}^+$, виконується нерівність

$$K(A) + K(C) \geq K(B) + K(D).$$

Функції λ_1 і λ_2 визначені на множині $\mathbb{R}^2_+$ і мають такі властивості:

1) $0 \leq \lambda_1(u,v) \leq 1,\ \lambda_2(u,v) \geq 1,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2_+$,

2) $1 - \lambda_1 \in L_1(\mathbb{R}^2_+),\ \lambda_2 - 1 \in L_1(\mathbb{R}^2_+),\ \lambda_1 \in C(\mathbb{R}^2_+)$,

3) $\int_0^\infty u \int_0^\infty (1 - \lambda_1(u,v))dvdu < +\infty,\ \int_0^\infty (1 - \lambda_1(u,v))dv \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Рівняння (1), окрім теоретичного інтересу, має застосування в різних напрямках природознавства. Зокрема, численні окремі випадки рівняння (1) виникають у теорії p-адичних відкрито-замкнених струн, у математичній теорії географічного (просторово-часового) поширення епідемії, в газовій динаміці (у кінетичних рівняннях Больцмана у рамках різних моделей), у теорії перенесення випромінювання (див. [1 – 8]). У одновимірному випадку, коли $\lambda_1 \equiv 1$, при різних обмеженнях на $Q,\ \lambda_2$ і K рівняння (1) досить детально досліджено в роботах [3, 9 – 12]. Двовимірний випадок рівняння (1) було вивчено в роботі [13] лише при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv 1$, з ядром $K(x,y) = K_0(x)K_1(y)$, де K_0 і K_1 задовольняють одновимірну умову консервативності, є парними істотно обмеженими і монотонно спадними функціями на додатній частині числової осі.

Щодо нелінійності Q (див. рисунок) припустимо виконання таких умов:

A) функція Q визначена на відрізку $[-\xi, \xi]$, де ξ — перший додатний корінь рівняння $Q(u) = (1 + M)u$, а число M визначається співвідношенням

$$M := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} K(x,y) \int_0^\infty \int_0^\infty (\lambda_2(x,y) - 1)dxdy, \tag{2}$$

B) $Q \uparrow$ на відрізку $[-\xi, \xi],\ Q \in C[-\xi, \xi]$,

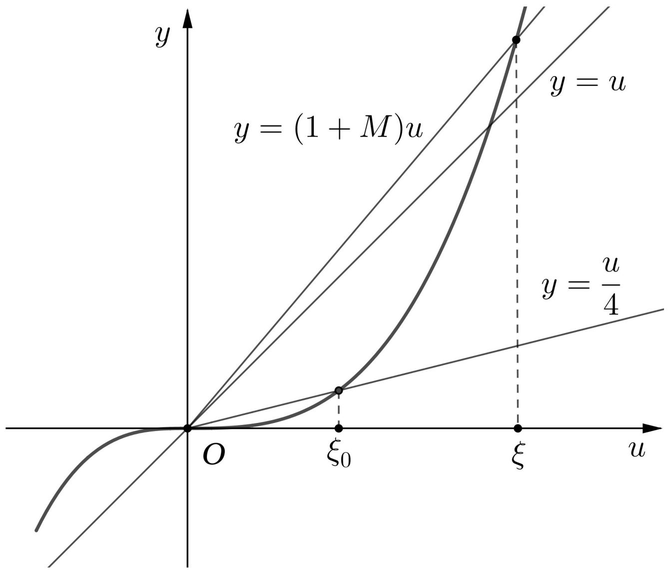
C) Q — непарна функція на $[-\xi, \xi]$,

D) Q строго опукла донизу на відрізку $[0, \xi]$ і рівняння $Q(u) = \dfrac{u}{4}$ має додатний розв'язок $\xi_0,\ \xi_0 < \xi$.

У цій статті за умов I – V, 1 – 3 і A – D ми доведемо конструктивну теорему існування обмеженого нетривіального і знакозмінного розв'язку. За допомогою методів, розроблених у доведенні основного результату, вдається також дослідити клас нелінійних інтегральних рівнянь типу Урисона

$$\varphi(x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty U(x, x', y, y', \varphi(x', y'))dx'dy', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{3}$$

припускаючи при цьому, що для відповідного нелінійного інтегрального оператора Урисона мінорантою в сенсі М. О. Красносельського є нелінійний оператор вигляду



$$(A\varphi)(x,y) = \frac{\lambda_1(x,y)}{1+M} \int_0^\infty \int_0^\infty (K(A) + K(C) - K(B) - K(D)) \times$$

$$\times g((1+M)\varphi(x',y'))dx'dy', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{4}$$

де число M задано згідно з формулою (2), точки A, B, C і D визначено в умові V, а g — функція, обернена до функції Q на відрізку $[-\xi, \xi]$. Насамкінець наведено конкретні приклади вказаного рівняння, що мають застосування в теорії p-адичних відкрито-замкнених струн і в математичній теорії просторово-часового поширення епідемії.

2. Позначення і допоміжні факти. ***2.1. Про одновимірні консервативні рівняння Вольтерра з різницевими ядрами.*** Розглянемо клас інтегральних рівнянь Вольтерра з різницевим ядром на півосі

$$\psi(x) = g(x) + \int_x^\infty T(t-x)\psi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{5}$$

відносно шуканої функції $\psi(x)$. Вільний член $g(x)$ задовольняє умови

$$g(x) \geq 0, \qquad g(x) \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \qquad m_j(g) := \int_0^\infty x^j g(x)dx < +\infty, \quad j = 0, 1, \tag{6}$$

а ядро T — визначена на множині $\mathbb{R}^+$ вимірна й істотно обмежена функція з властивістю консервативності:

$$T(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_0^\infty T(x)dx = 1. \tag{7}$$

Згідно з результатами роботи [14] рівняння (5) має додатний сумовний розв'язок ψ. З умов, що накладаються на ядро K, випливає, що функції

$$g(x) = 4\int_0^\infty \int_{2x}^\infty K(t,\tau)dtd\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

$$T(x) = 4\int_0^\infty K(x,\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{9}$$

задовольняють відповідно умови (6) і (7). Отже, рівняння (5) з вільним членом (8) і з ядром (9) має додатний сумовний розв'язок.

Зауважимо, що функція g має додаткові властивості

$$g \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad g(x) \downarrow \text{ по } x \quad \text{на } \mathbb{R}^+, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0. \tag{10}$$

Нескладно переконатися, що розв'язок ψ рівняння (5) наслідує властивості (10) вільного члена g, тобто

$$\psi \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad \psi(x) \downarrow \text{ по } x \quad \text{на } \mathbb{R}^+,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0.$$

2.2. Про одне допоміжне двовимірне інтегральне рівняння типу Вольтерра. Розглянемо двовимірне інтегральне рівняння на $\mathbb{R}^2_+$:

$$\rho(x,y) = G(x,y) + \int_x^\infty \int_y^\infty W(x,x',y,y')\rho(x',y')dy'dx', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{11}$$

в якому вільний член $G(x,y)$ і ядро $W(x,x',y,y')$ мають вигляд

$$G(x,y) := g(x) + g(y) - 4\int_{2x}^\infty \int_{2y}^\infty K(t,\tau)d\tau dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{12}$$

$$W(x,x',y,y') = 4(K(A) + K(C) - K(B) - K(D)), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Введемо послідовні наближення

$$\begin{gathered}\rho_{n+1}(x,y) = G(x,y) + \int_x^\infty \int_y^\infty W(x,x',y,y')\rho_n(x',y')dy'dx', \\ \rho_0(x,y) = G(x,y), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.\end{gathered} \tag{14}$$

Зазначимо, що

$$G(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{15}$$

Індукцією по n доведемо, що

$$\rho_n \uparrow \text{ по } n.$$

Нерівність $\rho_1(x,y) \geq \rho_0(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, безпосередньо випливає з (15) і умови V. Припускаючи, що $\rho_n(x,y) \geq \rho_{n-1}(x,y)$ при деякому натуральному n, і знову враховуючи (15) і умову V, із (14) отримуємо $\rho_{n+1}(x,y) \geq \rho_n(x,y)$.

Тепер доведемо, що

$$\rho_n(x,y) \leq \psi(x) + \psi(y), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{16}$$

Оцінка (16) при $n = 0$ безпосередньо випливає з простого ланцюжка нерівностей

$$\rho_0(x,y) = G(x,y) \leq g(x) + g(y) \leq \psi(x) + \psi(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{17}$$

Припустимо, що (16) виконується при деякому натуральному n. Тоді з огляду на (17), (15), умову V і просту нерівність

$$W(x,x',y,y') \leq 4K(x-x',y-y'), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^+,$$

із (14) отримуємо

$$\rho_{n+1}(x,y) \leq G(x,y) + \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty W(x,x',y,y')(\psi(x') + \psi(y'))dy'dx' \leq$$

$$\leq g(x) + g(y) + 4\int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty K(x-x',y-y')(\psi(x') + \psi(y'))dy'dx' =$$

$$= g(x) + g(y) + \int\limits_x^\infty T(x'-x)\psi(x')dx' + \int\limits_y^\infty T(y'-y)\psi(y')dy' = \psi(x) + \psi(y).$$

Можна також довести, що кожен елемент послідовності $\{\rho_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ є неперервною функцією за сукупністю своїх аргументів на множині $\mathbb{R}^2_+$. У справедливості останнього твердження можна переконатися з використанням методу математичної індукції і відомого факту про те, що згортка обмеженої і сумовної функцій є неперервною функцією (див. [15]).

Отже, на основі вищевикладеного можна стверджувати, що послідовність неперервних на $\mathbb{R}^2_+$ функцій $\{\rho_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ має поточкову границю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(x,y) = \rho(x,y),$$

причому гранична функція задовольняє нерівність

$$G(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \psi(x) + \psi(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Згідно з граничною теоремою Б. Леві (див. [16]) $\rho(x,y)$ є розв'язком рівняння (11).

Разом із рівнянням (11) розглянемо спеціальне неоднорідне двовимірне інтегральне рівняння типу Вольтерра

$$B(x,y) = 1 - \lambda_1(x,y) + \lambda_1(x,y)\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty W(x,x',y,y')B(x',y')dy'dx', \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{18}$$

відносно шуканої функції $B(x,y)$. Позначимо через $\tilde{\psi}(x)$ невід'ємний нетривіальний сумовний і обмежений на $\mathbb{R}^+$ розв'язок одновимірного рівняння Вольтерра

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{g}(x) + \int\limits_x^\infty T(t-x)\tilde{\psi}(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+,$$

де

$$\tilde{g}(x) := \int\limits_0^\infty (1-\lambda_1(x,y))dy, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{19}$$

а ядро T задається за допомогою формули (9). Згідно з умовами 1–3 функція $\tilde{g}$ задовольняє умови (6) і $\tilde{g}\in L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Розглянемо прості ітерації

$$B_{n+1}(x,y) = 1 - \lambda_1(x,y) + \lambda_1(x,y)\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty W(x,x',y,y')B_n(x',y')dy'dx',$$
$$B_0(x,y)\equiv 0, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+. \tag{20}$$

Індукцією, з урахуванням властивостей функцій λ_1 і K, нескладно переконатися, що

$$B_n(x,y)\uparrow \ \text{ по } \ n. \tag{21}$$

Нижче переконаємося, що для кожного $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ має місце оцінка зверху

$$\int\limits_0^\infty B_n(x,y)dy \le \tilde{\psi}(x), \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{22}$$

Нерівність (22) при $n=0$ є очевидною. Припустимо, що (22) виконується при деякому $n\in\mathbb{N}$. Тоді, враховуючи нерівність

$$W(x,x',y,y') \le 4K(x-x',y-y'), \quad x,x',y,y'\in\mathbb{R}^+,$$

і позначення (19), з (20) одержуємо

$$\int\limits_0^\infty B_{n+1}(x,y)dy \le \tilde{g}(x) + 4\int\limits_0^\infty\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty K(x-x',y-y')B_n(x',y')dy'dx'dy =$$

$$= \tilde{g}(x) + 4\int\limits_x^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_y^\infty K(x-x',y-y')B_n(x',y')dy'dydx' =$$

$$= \tilde{g}(x) + 4\int\limits_x^\infty \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{y'} K(x-x', y-y')dy \right) B_n(x', y')dy'dx' \leq$$

$$\leq \tilde{g}(x) + 4\int\limits_x^\infty \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty K(x-x', \tau)d\tau \right) B_n(x', y')dy'dx' =$$

$$= \tilde{g}(x) + 4\int\limits_0^\infty \int\limits_x^\infty \int\limits_0^\infty K(x-x', \tau)d\tau B_n(x', y')dx'dy' =$$

$$= \tilde{g}(x) + \int\limits_0^\infty \int\limits_x^\infty T(x'-x) B_n(x', y')dx'dy' =$$

$$= \tilde{g}(x) + \int\limits_x^\infty T(x'-x) \int\limits_0^\infty B_n(x', y')dy'dx' \leq \tilde{g}(x) + \int\limits_x^\infty T(x'-x)\tilde{\psi}(x')dx' = \tilde{\psi}(x).$$

Індукцією по n також можна довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $B_n(x, y)$ є вимірною на $\mathbb{R}^2_+$. Отже, на підставі доведеного і теореми Б. Леві отримуємо, що послідовність функцій $\{B_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}^+$ майже скрізь на $\mathbb{R}^+$ (по y) має границю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x, y) = B(x, y),$$

причому гранична функція задовольняє рівняння (18). Із (21) і (22) випливає також, що

$$B(x, y) \geq 1 - \lambda_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

$$\int\limits_0^\infty B(x, y)dy \leq \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

2.3. Основна лема. Розглянемо лінійне інтегральне рівняння більш загального вигляду

$$p(x, y) = G(x, y)\lambda_1(x, y) + 1 - \lambda_1(x, y) +$$

$$+\lambda_1(x, y)\int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty W(x, x', y, y')p(x', y')dy'dx', \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{23}$$

відносно шуканої функції $p(x, y)$, де функції G і W задаються згідно з формулами (12) і (13) відповідно. Введемо послідовні наближення

$$p_{n+1}(x, y) = G(x, y)\lambda_1(x, y) + 1 - \lambda_1(x, y) +$$

$$+\lambda_1(x, y)\int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty W(x, x', y, y')p_n(x', y')dy'dx',$$

$$p_0(x, y) = G(x, y)\lambda_1(x, y) + 1 - \lambda_1(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Індукцією легко можна довести, що

$$p_n(x,y) \uparrow \text{ по } n,$$
$$p_n(x,y) \le 1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$
$$p_n(x,y) \le \rho(x,y) + B(x,y), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Отже, послідовність функцій $\{p_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ має поточкову границю при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = p(x,y)$, причому $p(x,y)$ задовольняє рівняння (23) (згідно з теоремою Б. Леві) і виконуються нерівності

$$p(x,y) \le 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{24}$$

$$0 \le G(x,y)\lambda_1(x,y) + 1 - \lambda_1(x,y) \le p(x,y) \le \rho(x,y) + B(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{25}$$

Таким чином, згідно з властивостями функцій ρ і B з (25) випливає, що

$$\int_0^\infty (p(x,y) - \psi(x))dy \le \int_0^\infty \psi(y)dy + \int_0^\infty B(x,y)dy \le \int_0^\infty \psi(y)dy + \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{26}$$

З іншого боку, безпосередньою перевіркою можна переконатися, що рівність $p^*(x,y) \equiv 1$ задовольняє рівняння (23).

На підставі (24) і (26) функція

$$\Phi(x,y) := 1 - p(x,y) \ge 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

і

$$\Phi(x,y) \not\equiv 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

причому очевидно, що $\Phi(x,y) = 1 - p(x,y)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$\Phi(x,y) = \lambda_1(x,y) \int_x^\infty \int_y^\infty W(x,x',y,y')\Phi(x',y')dy'dx', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{27}$$

Із (24) – (26) безпосередньо випливає, що

$$0 \le \Phi(x,y) \le 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{28}$$

$$\int_0^\infty (1 - \Phi(x,y) - \psi(x))dy \le \int_0^\infty \psi(y)dy + \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{29}$$

Отже, ми довели таку лему.

Лема (основна). *За умов* I – V, 1 – 3 *лінійне однорідне рівняння* (27) *має нетривіальний невід'ємний обмежений розв'язок* $\Phi(x,y)$, *причому цей розв'язок має додаткові властивості* (28), (29).

Доведена лема відіграє істотну роль в дослідженні основного рівняння (1).

3. Про розв'язність рівняння (1). ***3.1. Зведення рівняння* (1) *до нелінійного інтегрального рівняння на чверті площини.*** Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що якщо $\varphi(x,y)$ є невід'ємним нетривіальним неперервним і обмеженим розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$Q(F(x,y)) =$$
$$= \lambda_1(x,y)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))\lambda_2(x',y')F(x',y')dy'dx', \tag{30}$$
$$(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,$$

то функція

$$f(x,y) := \begin{cases} F(x,y), & x\ge 0, \quad y\ge 0,\\ -F(-x,y), & x<0, \quad y>0,\\ -F(x,-y), & x>0, \quad y<0,\\ F(-x,-y), & x<0, \quad y<0,\end{cases} \tag{31}$$

буде знакозмінним нетривіальним неперервним і обмеженим розв'язком основного рівняння (1). Більш того, якщо $f(x,y)$ є нетривіальним неперервним знакозмінним і обмеженим розв'язком рівняння (1), причому

$$f(x,y)\ge 0 \quad \text{при} \quad xy\ge 0$$

і

$$f(x,y)<0 \quad \text{при} \quad xy<0,$$

то $F(x,y)=f(x,y)$ при $x>0,\ y>0$ буде невід'ємним обмеженим і неперервним розв'язком рівняння (30).

***3.2. Послідовні наближення для нелінійного рівняння* (30).** Розглянемо послідовні наближення для інтегрального рівняння (30):

$$Q(F_{n+1}(x,y)) =$$
$$= \lambda_1(x,y)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))\lambda_2(x',y')F_n(x',y')dy'dx', \tag{32}$$
$$F_0(x,y)=\xi, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,$$

де число ξ визначається з умови A.

Індукцією доведемо, що

$$F_n(x,y)\le F_{n-1}(x,y), \quad n=1,2,\ldots, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{33}$$
$$F_n\in C(\mathbb{R}_+^2), \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{34}$$

$$F_n(x,y) \geq \xi_0 \Phi(x,y), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{35}$$

де ξ_0 — точка перетину прямої $y = \dfrac{u}{4}$ і графіка функції $y = Q(u)$.

Неперервність нульового наближення безпосередньо випливає з означення, а нерівність $F_0(x,y) \geq \xi_0 \Phi(x,y)$ отримується з (28) і умови $\xi > \xi_0$.

Доведемо, що

$$F_1(x,y) \leq F_0(x,y)$$

і

$$F_1(x,y) \geq \xi_0 \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Справді, враховуючи очевидну нерівність $K(C) \leq K(B) + K(D)$ й умови V, 1, 2, з (27) і (32) одержуємо

$$Q(F_1(x,y)) = \xi \lambda_1(x,y) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (K(A) + K(C) - K(B) - K(D)) \lambda_2(x',y') dy' dx' \leq$$

$$\leq \xi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(x-x', y-y') \lambda_2(x',y') dy' dx' =$$

$$= \xi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(x-x', y-y')(\lambda_2(x',y') - 1) dy' dx' + \xi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(x-x', y-y') dy' dx' \leq$$

$$\leq \xi \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} K(x,y) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (\lambda_2(x',y') - 1) dy' dx' + \xi =$$

$$= \xi(M+1) = Q(\xi) = Q(F_0(x,y)),$$

$$Q(F_1(x,y)) \geq \xi_0 \lambda_1(x,y) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (K(A) + K(C) - K(B) - K(D)) \lambda_2(x',y') \Phi(x',y') dy' dx' \geq$$

$$\geq \xi_0 \lambda_1(x,y) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (K(A) + K(C) - K(B) - K(D)) \Phi(x',y') dy' dx' \geq$$

$$\geq \xi_0 \frac{\lambda_1(x,y)}{4} \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty W(x,x',y,y') \Phi(x',y') dy' dx' = \frac{\xi_0}{4} \Phi(x,y) \geq Q(\xi_0 \Phi(x,y)).$$

Із отриманих нерівностей внаслідок монотонності функції Q випливає, що

$$F_1(x,y) \leq F_0(x,y),$$

$$F_1(x,y) \geq \xi_0 \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Припустимо тепер, що твердження (33)–(35) справедливі при деякому натуральному n. Тоді, записуючи ітерації (32) у вигляді

$$Q(F_{n+1}(x,y)) =$$

$$= \lambda_1(x,y)\int_0^\infty\int_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))(\lambda_2(x',y')-1)F_n(x',y')dy'dx' +$$

$$+\lambda_1(x,y)\int_0^\infty\int_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))F_n(x',y')dy'dx', \tag{36}$$

$$F_0(x,y)=\xi, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,$$

і при цьому враховуючи неперервність функції λ_1 на $\mathbb{R}_+^2$, а також той факт, що згортка обмеженої й сумовної функцій є неперервною функцією, з (36) отримуємо, що функція $Q(F_{n+1}(x,y))$ є неперервною на $\mathbb{R}_+^2$.

Тепер доведемо, що

$$\xi_0\Phi(x,y) \le F_{n+1}(x,y) \le F_n(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2. \tag{37}$$

Враховуючи умови V, 1, 2, (27) й індукційне припущення, з (32) одержуємо

$$Q(F_{n+1}(x,y)) \ge \xi_0 \frac{\lambda_1(x,y)}{4}\int_x^\infty\int_y^\infty W(x,x',y,y')\Phi(x',y')dy'dx' =$$

$$= \frac{\xi_0}{4}\Phi(x,y) \ge Q(\xi_0\Phi(x,y))$$

і

$$Q(F_{n+1}(x,y)) \le$$

$$\le \lambda_1(x,y)\int_0^\infty\int_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))\lambda_2(x',y')F_{n-1}(x',y')dy'dx' = Q(F_n(x,y)).$$

Внаслідок монотонності Q з отриманих оцінок приходимо до (37).

Оскільки $F_{n+1}(x,y)$ задовольняє нерівність (37), то внаслідок умови B і неперервності $Q(F_{n+1}(x,y))$ на $\mathbb{R}_+^2$ випливає, що функція $F_{n+1}(x,y)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^2$.

Отже, на підставі властивостей (33)–(35) можемо стверджувати, що послідовність неперервних функцій $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ має поточкову границю при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = F(x,y),$$

причому гранична функція $F(x,y)$ за теоремою Б. Леві, внаслідок монотонності і неперервності Q, задовольняє рівняння (30).

Із (32), (33) і (35) випливає також, що

$$\xi_0\Phi(x,y) \le F(x,y) \le \xi, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2. \tag{38}$$

Оскільки згортка сумовної й обмеженої функцій є неперервною функцією, то, записуючи рівняння (32) у вигляді

$$Q(F(x,y)) =$$
$$= \lambda_1(x,y)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))(\lambda_2(x',y')-1)F(x',y')dy'dx'+$$
$$+\lambda_1(x,y)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))F(x',y')dy'dx', \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+,$$

і враховуючи неперервність функцій λ_1 і Q, а також монотонність функції Q, робимо висновок, що φ належить $C(\mathbb{R}^2_+)$.

Отже, на основі викладених фактів у п. 3 можемо сформулювати основний результат цієї статті.

Теорема 1. *За умов* A – D, I – V *і* 1 – 3 *рівняння* (1) *має нетривіальний знакозмінний неперервний і обмежений на* $\mathbb{R}^2_+$ *розв'язок, що задається формулою* (31), *де* $F(x,y)$ *є невід'ємним неперервним нетривіальним обмеженим розв'язком рівняння* (30) *і задовольняє подвійну нерівність* (38).

***Зауваження* 1.** Легко переконатися, що в окремому випадку, коли ядро $K(x,y)$ допускає зображення
$$K(x,y) = K_0(x)K_0(y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
де
$$0\le K_0\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R}), \quad \int\limits_0^\infty t^j K_0(t)dt<+\infty, \quad j=0,1,2, \quad \int\limits_{-\infty}^\infty K_0(t)dt=1,$$
$$K_0(-t)=K_0(t), \quad t\ge 0, \quad K_0\downarrow \text{ на } \mathbb{R}^+,$$
умови I – V виконуються автоматично.

***Зауваження* 2.** Доведену теорему легко можна поширити на відповідні багатовимірні інтегральні рівняння.

4. Обмежений розв'язок двовимірного інтегрального рівняння Урисона на чверті площини. ***4.1. Постановка задачі. Теорема існування.*** Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Урисона вигляду (3) відносно шуканої вимірної й обмеженої функції $\varphi(x,y)$. У рівнянні (3) $U(x,x',y,y',z)$ — визначена на множині $\mathbb{R}^5_+ := \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ функція з такими властивостями:

a) $U(x,x',y,y',z)$ задовольняє умову Каратеодорі за аргументом z на множині $\Sigma := \mathbb{R}^4_+\times\times[0,\xi]$ (ξ — єдиний додатний корінь рівняння $Q(u)=(1+M)u$), тобто при кожному фіксованому $z\in[0,\xi]$ функція U вимірна за сукупністю аргументів (x,x',y,y') на множині $\mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ і майже для всіх $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4_+$ функція U неперервна по z на відрізку $[0,\xi]$,

b) для будь-якої вимірної функції $\varphi(x,y)$ такої, що $0\le\varphi(x,y)\le\xi$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2_+$, функція $\int_0^\infty\int_0^\infty U(x,x',y,y',\varphi(x',y'))dy'dx'$ вимірна по (x,y) на $\mathbb{R}^2_+$,

c) при кожному фіксованому $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4_+$ функція $U(x,x',y,y',z)$ монотонно зростає по z на відрізку $[0,\xi]$,

d) $U(x,x',y,y',z) \geq \dfrac{\lambda_1(x,y)}{1+M}(K(A)K(C)-K(B)-K(D))g((1+M)z)(x,x',y,y',z) \in \Sigma$, де g — функція, обернена до функції Q на відрізку $[0,\xi]$, а число M задається згідно з формулою (2),

e) $\int_0^\infty \int_0^\infty U(x,x',y,y',\xi)dy'dx' \leq \xi,\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

У цьому пункті з використанням методів доведення теореми 1 встановимо існування невід'ємного нетривіального й обмеженого розв'язку рівняння (3).

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *За умов* a) – e) *рівняння* (3) *має невід'ємний нетривіальний вимірний і обмежений на* $\mathbb{R}_+^2$ *розв'язок.*

***4.2. Доведення теореми* 2.** Розглянемо для рівняння (3) спеціальні ітерації

$$\varphi_{n+1}(x,y) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty U(x,x',y,y',\varphi_n(x',y'))dy'dx',$$
$$\varphi_0(x,y) = \frac{Q(F(x,y))}{1+M}, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{39}$$

де $F(x,y)$ — неперервний невід'ємний нетривіальний і обмежений розв'язок рівняння (4).

Індукцією по n нескладно довести, що

$$\varphi_n(x,y) \uparrow \text{ по } n, \tag{40}$$

$$\varphi_n(x,y) \leq \xi, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{41}$$

Справді, враховуючи (38), монотонність функції Q й умову B, маємо

$$\varphi_0(x,y) = \frac{Q(F(x,y))}{1+M} \leq \frac{Q(\xi)}{1+M} = \xi.$$

На підставі (30) і умов c), d) з (39) отримуємо

$$\varphi_1(x,y) \geq \frac{\lambda_1(x,y)}{1+M} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))g\left((1+M)\frac{Q(F(x',y'))}{1+M}\right)dy'dx' =$$

$$= \frac{\lambda_1(x,y)}{1+M} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (K(A)+K(C)-K(B)-K(D))F(x',y')dy'dx' = \frac{Q(F(x,y))}{1+M} = \varphi_0(x,y).$$

Припускаючи, що $\varphi_n(x,y) \geq \varphi_{n-1}(x,y)$ і $\varphi_n(x,y) \leq \xi$ при деякому $n \in \mathbb{N}$, і використовуючи монотонність функції U по z на відрізку $[0,\xi]$, з (39) одержуємо

$$\varphi_{n+1}(x,y) \geq \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty U(x,x',y,y',\varphi_{n-1}(x',y'))dy'dx' = \varphi_n(x,y),$$

$$\varphi_{n+1}(x,y) \leq \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty U(x,x',y,y',\xi)dy'dx' \leq \xi.$$

Нижче переконаємося, що кожна функція з послідовності $\{\varphi_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ є вимірною по (x,y) на $\mathbb{R}^2_+$.

Вимірність нульового наближення безпосередньо випливає з неперервності функції $Q(F(x,y))$ на $\mathbb{R}^2_+$. Припустимо, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ функція $\varphi_n(x,y)$ вимірна по (x,y) на $\mathbb{R}^2_+$. Тоді, враховуючи умову b), з (39) отримуємо, що $\varphi_{n+1}(x,y)$ також вимірна по (x,y) на $\mathbb{R}^2_+$.

Таким чином, з (40) і (41) випливає, що послідовність вимірних функцій $\{\varphi_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ має поточкову границю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,y) = \varphi(x,y),$$

причому гранична функція також вимірна по $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ і подвійній нерівності

$$\frac{Q(F(x,y))}{1+M} \le \varphi(x,y) \le \xi, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

З урахуванням умови a) за теоремою Б. Леві і теоремою М. О. Красносельського (див. [17]) гранична функція $\varphi(x,y)$ задовольняє рівняння (3).

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 3.** Теорема 2 узагальнює і доповнює теорему 6 із роботи [12] і теорему 1 із роботи [18].

***Зауваження* 4.** На завершення цього пункту наведемо кілька прикладів ядра Урисона U, для якого виконуються всі умови теореми 2:

u$_1$) $U(x,x',y,y',z) = \dfrac{\lambda_1(x,y)}{1+M}(K(A)+K(C)-K(B)-K(D))g((1+M)z)$, $(x,x',y,y',z) \in \Sigma$,

u$_2$) $U(x,x',y,y',z) = \dfrac{\lambda_1(x,y)}{1+M}(K(A)+K(C)-K(B)-K(D))g((1+M)z) + K(C)g_0(z)$, $(x,x',y,y',z) \in \Sigma$, де $g_0(z)$ — неперервна і монотонно зростаюча функція на відрізку $[0,\xi]$, причому $g_0(0)=0, g_0(\xi)=\xi$,

u$_3$) $U(x,x',y,y',z) = \dfrac{\lambda_1(x,y)}{1+M}K(A)g((1+M)z) + K(C)g_0(z)$, $(x,x',y,y',z) \in \Sigma$.

Наведемо також приклади функцій g і g_0:

g$_1$) $g(z) = z^{\frac{1}{n}}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^+$,

$\tilde{\text{g}}_1$) $g_0(z) = \dfrac{z^p}{\xi^{p-1}}$, $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^+$, $\xi > 0$,

g$_2$) $g(z) = \dfrac{z^{\frac{1}{n}} + \gamma(1-e^{-z})}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\gamma > 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^+$,

$\tilde{\text{g}}_2$) $g_0(z) = \sqrt{e^{\frac{z}{\xi}-1}\xi\sqrt{z\xi}}$, $z \in \mathbb{R}^+$, $\xi > 0$.

5. Застосування і приклади. ***5.1. Застосування в теорії p-адичних відкрито-замкнених струн.*** У теорії p-адичних відкрито-замкнених струн виникають такі нелінійні інтегральні рівняння на множині $\mathbb{R}$:

$$h^p(x)\mu^{\frac{p(p-1)}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} h(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

відносно шуканої функції h. У рівнянні (42) h і μ — тахіонні поля для відкритих і замкнених струн (див. [2, 3]), а число $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тут функція μ — парний розв'язок крайової задачі

$$\mu^{p^2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)^2} \mu(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mu(x) = 1, \tag{44}$$

кратності нулів σ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, функцій $\mu^{p^2}(x)$ задовольняють умову

$$\sigma_k < \frac{2p^2}{p-1}$$

і $\mu(x)$ має таку властивість:

$$\mu^{-\frac{p-1}{2}} - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Покладемо $f(x) := h(x)\mu^{\frac{p-1}{2}}(x)$. Тоді внаслідок (43) і (44) відносно f приходимо до граничної задачі

$$f^p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \mu^{-\frac{p-1}{2}}(t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm 1. \tag{46}$$

Виходячи з властивостей функції μ, легко можна перевірити, що $\lambda_2 := \mu^{-\frac{p-1}{2}}(x)$ задовольняє умови 1 – 3 для функції λ_2 при $n = 1$. Очевидно, що ядро $K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ має властивості I – V.

З отриманих результатів випливає, що рівняння (45) має нетривіальний знакозмінний обмежений і неперервний розв'язок. Використовуючи результати роботи [3], можна довести також, що цей розв'язок має граничні співвідношення (46) і є єдиним у певному класі непарних обмежених функцій, що мають границю ± 1 відповідно на $\pm\infty$.

5.2. Застосування в математичній теорії просторово-часового поширення епідемії. У математичній теорії географічного поширення епідемії зустрічаються нелінійні багатовимірні інтегральні рівняння вигляду (див. [5, 6])

$$\begin{gathered} u(t, \mathrm{x}) = \lambda_1(\mathrm{x}) \int\limits_0^{\infty} H(\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(u(t-\tau, \mathrm{y})) \lambda_2(\mathrm{y}) K(\mathrm{x} - \mathrm{y}) d\mathrm{y} d\tau, \\ t \in (-\infty, T], \quad \mathrm{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{47}$$

щодо шуканої функції $u(t, \mathrm{x})$, де

$$g(u) = \begin{cases} S_0(1 - e^{-u}), & u \geq 0, \\ S_0(e^u - 1), & u < 0, \end{cases} \quad S_0 \gg 1.$$

У рівнянні (47) H задовольняє умови

$$H(\tau) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad H \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_M(\mathbb{R}^+), \quad \int\limits_0^\infty H(\tau)d\tau = 1,$$

де $C_M(\mathbb{R}^+)$ — простір неперервних і обмежених функцій на множині $\mathbb{R}^+$, а ядро K має властивості I – IV. Функції λ_1 і λ_2 задовольняють умови 1 – 3.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що якщо ядро K має також властивість V, $Q = g^{-1}$ задовольняє умови A – D, то функція $u(t, \mathrm{x}) = u(t, x_1, x_2) = Q(f(x_1, x_2))$ є стаціонарним розв'язком рівняння (47), де f — обмежений і знакозмінний розв'язок інтегрального рівняння

$$Q(f(x_1, x_2)) = \lambda_1(x_1, x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^2} K(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\lambda_2(y_1, y_2)f(y_1, y_2)dy_1dy_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

з нелінійністю

$$Q(u) = \begin{cases} \ln \dfrac{S_0}{S_0 - u}, & u \in [0, S_0), \\ -\ln \dfrac{S_0}{S_0 + u}, & u \in (-S_0, 0]. \end{cases}$$

Слід зазначити, що функція

$$S(t, x_1, x_2) = S_0 e^{-u(t, x_1, x_2)}$$

описує щільність сприйнятливих осіб у момент часу t в точці $\mathrm{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, а ядро

$$A(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{y}) := H(\tau)\lambda_1(\mathrm{x})\lambda_2(\mathrm{y})K(\mathrm{x} - \mathrm{y})$$

має імовірнісний сенс: $A(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{y})d\tau d\mathrm{y}$ є ймовірністю того, що сприйнятлива людина в точці x отримує інфекцію від інфікованих осіб, що знаходяться в області $(\mathrm{y}, \mathrm{y} + d\mathrm{y})$ і заражені у момент часу з інтервалу $(\tau - d\tau, \tau)$.

5.3. Приклади функцій Q, λ_1, λ_2 і K. Насамкінець наведемо кілька прикладів функцій Q, λ_1, λ_2 і K, що задовольняють умови теореми 1.

Приклади функції Q:

1) $Q(u) = u^p,\ p > 2$ — непарне число,

2) $Q(u) = au^p + (1 - a)u,\ p > 2$ — непарне число, $a \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right]$ — довільний параметр,

3) $Q(u) = \begin{cases} \ln \dfrac{S_0}{S_0 - u}, & u \in [0, S_0), \\ -\ln \dfrac{S_0}{S_0 + u}, & u \in (-S_0, u), \end{cases} \qquad S_0 \geq 5.$

Приклади функцій λ_1 і λ_2:

1) $\lambda_1(x, y) = 1 - e^{-(x+y)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+,$

2) $\lambda_1(x, y) = 1 - \varepsilon e^{-(x^2+y^2)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+,\ \varepsilon \in [0, 1]$ — довільний параметр,

3) $\lambda_2(x, y) = 1 + e^{-(x+y)} \dfrac{1}{\sqrt{xy}},\ x, y > 0,$

4) $\lambda_2(x, y) = 1 + e^{-(x^2+y^2)} \dfrac{1}{x^\alpha y^\beta},\ \alpha, \beta \in (0, 1),\ x, y > 0.$

***Приклади ядра K*:**

$K(x,y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

$K(x,y) = \displaystyle\int_a^b e^{-(|x|+|y|)s} d\sigma(s),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, де $\sigma(s)$ — монотонно неспадна функція на інтервалі $[a,b),\ 0 < a < b \leq \infty$, причому

$$\int_a^b \frac{1}{s^2} d\sigma(s) = \frac{1}{4}.$$

Нескладно переконатися, що наведені вище приклади функцій $Q,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ і K задовольняють усі умови теореми 1.

Література

1. В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны*, Теор. и мат. физика, **138**, № 3, 355 – 368 (2004).
2. В. С. Владимиров, *О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн*, Теор. и мат. физика, **149**, № 3, 354 – 367 (2006).
3. Х. А. Хачатрян, *О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p-адических открыто-замкнутых струн*, Теор. и мат. физика, **200**, № 1, 106 – 117 (2019).
4. I. Ya. Arefeva, B. G. Dragovic, I. V. Volovich, *Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields*, Phys. Lett. B, **212**, № 3, 283 – 291 (1988).
5. O. Diekmann, *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*, J. Math. Biology, **6**, № 2, 109 – 130 (1978).
6. А. Г. Сергеев, Х. А. Хачатрян, *О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии*, Тр. Моск. мат. о-ва, **80**, № 1, 113 – 131 (2019).
7. C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer-Verlag, New York (1988).
8. Н. Б. Енгибарян, *Об одной задаче нелинейного переноса излучения*, Астрофизика, **2**, № 1, 31 – 36 (1966).
9. Х. А. Хачатрян, *О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн*, Тр. Моск. мат. о-ва, **79**, № 1, 117 – 132 (2018).
10. Х. А. Хачатрян, *Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью*, Изв. РАН. Сер. мат., **84**, № 4, 198 – 207 (2020).
11. С. М. Андриан, А. К. Кроян, Х. А. Хачатрян, *О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в p-адической теории струн*, Уфим. мат. журн., **10**, № 4, 12 – 23 (2018).
12. Х. А. Хачатрян, *О разрешимости нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки*, Тр. Моск. мат. о-ва, **81**, № 1, 3 – 40 (2020).
13. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, М. О. Аветисян, *Вопросы разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки в $\mathbb{R}^n$*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **24**, № 3, 247 – 262 (2018).
14. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения*, Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ, **22**, 175 – 244 (1984).
15. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва (1975).
16. А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, V-е изд., Наука, Москва (1981).
17. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, Москва (1966).
18. Х. А. Хачатрян, *О разрешимости одного класса двумерных интегральных уравнений Урысона на четверти плоскости*, Мат. тр., **20**, № 2, 193 – 205 (2017).

Одержано 23.01.21