DOI: 10.37863/umzh.v73i5.6356

УДК 517.9

Т. О. Комлєва, А. В. Плотніков (Одес. держ. акад. буд-ва та архітектури),
Л. І. Плотнікова (Одес. нац. політех. ун-т),
Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

УМОВИ ІСНУВАННЯ БАЗОВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ МНОЖИННОЗНАЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this paper, we discusses various definitions and properties of the derivative of a set-valued mapping. Also, we consider a linear set-valued differential equation and investigate the problem of existence of solutions of this equation with Hukuhara derivative, PS-derivative and BG-derivative. The obtained results are illustrated with model examples.

Розглянуто різні означення похідної множиннозначного відображення та їхні властивості. Вивчається лінійне множиннозначне диференціальне рівняння та досліджується існування розв'язків цього рівняння з похідною Хукухари, PS-похідною та BG-похідною. Отримані результати проілюстровано на модельних прикладах.

1. Вступ. У 1969 р. F. S. de Blasi та F. Iervolino розглянули множиннозначні диференціальні рівняння з похідною Хукухари [1]. У подальшому множиннозначні диференціальні, інтегральні та дискретні рівняння і включення стали важливою частиною теорії множиннозначного аналізу і вивчались у багатьох роботах (див. [2 – 9] та наведену в них бібліографію).

У цій статті ми спочатку розглянемо деякі означення похідної множиннозначного відображення (похідної Хукухари [10], PS-похідної [12, 13] і BG-похідної [14 – 18]) та деякі їхні властивості. Потім дослідимо лінійні множиннозначні диференціальні рівняння з цими похідними та отримаємо умови існування розв'язків цих рівнянь.

2. Основні означення і позначення. Нехай $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — *простір непорожніх опуклих компактних підмножин* простору $\mathbb{R}^n$ з метрикою Гаусдорфа

$$h(A,B)=\min\{r\geq 0\colon A\subset B+B_r(\mathbf{0}),\; B\subset A+B_r(\mathbf{0})\},$$

де $A,B\in\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, $B_r(\mathbf{c})=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \|x-c\|\leq r\}$ — куля радіуса $r>0$ з центром у $c\in\mathbb{R}^n$.

Крім звичайних теоретико-множинних операцій розглянемо у просторі $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ ще дві операції: *суму Мінковського множин* $A+B=\{a+b\colon a\in A,\; b\in B\}$ і *добуток скаляра на множину* $\lambda A=\{\lambda a\colon a\in A,\; \lambda\in\mathbb{R}^1\}$.

Ці операції задовольняють такі властивості [5 – 7, 19]:

1) $A+\{\mathbf{0}\}=A$;
2) $A+B=B+A$;
3) $1A=A,\; 0A=\{\mathbf{0}\}$;
4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
5) $\beta(A+B)=\beta A+\beta B$;
6) $h(A+C,B+C)=h(A,B)$;
7) $h(\beta A,\beta B)=|\beta|h(A,B)$;
8) $h(\beta A,\gamma A)\leq|\beta-\gamma|h(A,\{\mathbf{0}\})$

для всіх $A, B, C \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1_+$ і $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^1$, де $\{\mathbf{0}\}$ — нульова множина, що містить лише нульовий вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.

Як відомо [19], метричний простір $(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n), h)$ є повним метричним простором. Однак простір $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ не є лінійним простором щодо наведених операцій, тому що в загальному випадку не можна ввести поняття протилежного елемента для $A \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ [2, 5 – 7, 19]. Елемент $(-1)A$, очевидно, таким не є, тому що в загальному випадку $A + (-1)A \neq \{\mathbf{0}\}$, хоча якщо $A = \{a\},\ a \in \mathbb{R}^n$, то $(-1)A = \{-a\}$ — протилежний елемент. Відсутність протилежного елемента в просторі $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ призводить до неоднозначного введення поняття різниці множин і умов її існування. Як наслідок запропоновано альтернативні означення різниці [10, 19, 21, 23], але кожна з них має свої як позитивні, так і негативні властивості.

У даній статті ми будемо використовувати різницю Хукухари [10], яка є окремим випадком різниці Мінковського [11].

Означення 1 [19]. *Нехай $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Максимальна множина $C \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що $B + C \subseteq A$, називається різницею Мінковського множин A і B та позначається $A \overset{*}{-} B$, тобто $C = \{c \in \mathbb{R}^n : c + B \subseteq A\}$.*

Наприклад, якщо $A = \{a \in \mathbb{R}^2 : |a_i| \leq 3,\ i = 1, 2\}$ — квадрат зі стороною, яка дорівнює 6, $B = \{b \in \mathbb{R}^2 : \|b\| \leq 1\}$ — одиничний круг, то $A \overset{*}{-} B = C = \{c \in \mathbb{R}^2 : |c_i| \leq 2,\ i = 1, 2\}$ — квадрат зі стороною, яка дорівнює 4. Зазначимо, що $B + C \subset A$, але $B + C \neq A$.

Різниця Мінковського задовольняє такі властивості [19]:

1) $A \overset{*}{-} A = \{\mathbf{0}\}$ для всіх $A \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$;

2) якщо $A \overset{*}{-} B$ існує, то $(A \overset{*}{-} B) + B \subseteq A$;

3) якщо $A \overset{*}{-} B$ існує, то $(\lambda A) \overset{*}{-} B = (\lambda B) = \lambda(A \overset{*}{-} B)$;

4) якщо $A \overset{*}{-} (B + C)$ існує, то $A \overset{*}{-} (B + C) = A \overset{*}{-} B \overset{*}{-} C = A \overset{*}{-} C \overset{*}{-} B$.

***Зауваження* 1.** Якщо різниця Мінковського $A \overset{*}{-} B$ існує і виконується рівність $(A \overset{*}{-} B) + B = A$, то говорять, що множина B *повністю вимітає множину* A [19].

Зрозуміло, що різниця Мінковського не завжди існує. Але якщо для множин A і B різниця Мінковського $A \overset{*}{-} B$ існує, то виконується така нерівність для діаметрів множин A і B:

$$\mathrm{diam}(A) \geq \mathrm{diam}(B),$$

де $\mathrm{diam}(A) = \max_{\|\psi\|=1} \big(\max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle + \max_{a \in A} \langle a, -\psi \rangle\big)$, $\langle a, \psi \rangle$ — скалярний добуток векторів $a, \psi \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, що в деяких випадках для різниці Мінковського $C = A \overset{*}{-} B$ може виконуватись умова $B + C = A$. Наприклад, якщо $A = \big\{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| \leq 3\big\}$, $B = \big\{b \in \mathbb{R}^2 : \|b\| \leq 1\big\}$, то $A \overset{*}{-} B = C = \big\{c \in \mathbb{R}^2 : \|c\| \leq 2\big\}$ та, очевидно, що $B + C = A$.

Означення 2 [10]. *Нехай $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Множина $C \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що $A = B + C$, називається різницею Хукухари множин A і B та позначається $A \overset{H}{-} B$.*

***Зауваження* 2.** Різниця Хукухари є окремим випадком різниці Мінковського, коли B повністю вимітає множину A [5 – 7, 19].

Наведемо деякі властивості різниці Хукухари [2, 5 – 7, 19]:

1) якщо різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ двох множин $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ існує, то вона єдина;

2) $A \overset{H}{-} A = \{\mathbf{0}\}$ для всіх $A \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$;

3) $(A + B) \overset{H}{-} B = A$ для всіх $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$;

4) якщо різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ двох множин $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ існує, то знайдеться таке $\alpha_0 \geq 1$, що для всіх $\alpha \in (0, \alpha_0]$ буде існувати різниця Хукухари $A \overset{H}{-} \alpha B$;

5) якщо різниця Хукухари $A \overset{H}{-} (B+C)$ існує, то різниці Хукухари $A \overset{H}{-} B$ та $A \overset{H}{-} C$ також існують і $A \overset{H}{-} (B+C) = A \overset{H}{-} B \overset{H}{-} C = A \overset{H}{-} C \overset{H}{-} B$;

6) якщо різниці Хукухари $A \overset{H}{-} B$ та $A \overset{H}{-} C$ існують, то знайдеться таке $\alpha > 0$, що різниця Хукухари $A \overset{H}{-} \alpha(B+C)$ існує;

7) якщо множини A і B є центрально-симетричними (центрально-симетричність розуміється у сенсі [34]) і різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ існує, то різниці Хукухари $A \overset{H}{-} (-1)A$, $B \overset{H}{-} (-1)B$, $(-1)A \overset{H}{-} B$, $A \overset{H}{-} (-1)B$ і $(-1)A \overset{H}{-} (-1)B$ існують;

8) якщо множини A і B не є центрально-симетричними і різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ існує, то різниця Хукухари $(-1)A \overset{H}{-} (-1)B$ існує, а різниці Хукухари $A \overset{H}{-} (-1)A$, $B \overset{H}{-} (-1)B$, $(-1)A \overset{H}{-} B$, $A \overset{H}{-} (-1)B$ не існують.

***Зауваження* 3.** Очевидно, що:

1) якщо різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ існує та одна з множин центрально-симетрична, то друга множина також є центрально-симетричною;

2) якщо різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ існує та одна з множин не є центрально-симетричною, то друга множина також не є центрально-симетричною.

Більш детально властивості різниці Хукухари розглянуто в [2, 5 – 7, 12, 19].

Означення 3 [10]. *Множиннозначне відображення $X(\cdot)\colon [0,T] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ має похідну Хукухари (Н-похідну) в точці $t \in (0,T)$, якщо для всіх достатньо малих $\Delta > 0$ існують відповідні Н-різниці і множина $D_H X(t) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що*

$$\lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}(X(t+\Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t-\Delta)) = D_H X(t).$$

***Зауваження* 4.** Властивості похідної Хукухари докладніше розглянуто в [5 – 7, 12, 19].

Теорема 1 [10]. *Якщо відображення $X\colon [0,T] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ є Н-диференційовним на $[0,T]$, то $X(t) = X(0) + \int_0^t D_H X(s) ds$, де інтеграл розуміється у сенсі* [10].

***Наслідок* 1.** *Якщо відображення $X(\cdot)$ є Н-диференційовним на $[0,T]$, то функція $\mathrm{diam}(X(\cdot))$ є неспадною на $[0,T]$.*

***Зауваження* 5.** Обернене твердження не є правильним. Наприклад, нехай $X\colon [0,1] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ таке, що $X(t) = A(t)C_t(\mathbf{0})$, де $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ — матриця обертання, $C_t(\mathbf{0}) = \big\{x \in \mathbb{R}^2\colon |x_i| \le t,\ i = 1,2\big\}$ — квадрат зі стороною $2t$. Очевидно, що $\mathrm{diam}(X(t)) = 2\sqrt{2}t$. Однак відображення $X(\cdot)$ не є Н-диференційовним на $[0,1]$.

***Наслідок* 2.** *Якщо функція $\mathrm{diam}(X(\cdot))$ є спадною на $[0,T]$, то відображення $X(\cdot)$ не є Н-диференційовним на $[0,T]$.*

Для подолання цих недоліків похідної Хукухари було введено інші типи похідних для множиннозначних відображень (Huygens-похідна [20], π-похідна [21, 22], Т-похідна [23]). Їхні властивості вивчались у статтях [5, 7, 24 – 27]. Однак диференціальні рівняння з похідними таких типів виявилися дуже складними навіть на етапі формулювання [5 – 7, 23 – 27].

Пізніше А. В. Плотніков і Н. В. Скрипник використали підходи, які були запропоновані в [23] для означення T-похідної, і ввели нове означення похідної.

Означення 4 [12, 13]. *Нехай $X\colon [0,T] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Будемо казати, що $X(\cdot)$ має PS-похідну $D_{ps}X(t) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ у точці $t \in (0,T)$, якщо для всіх достатньо малих $\Delta > 0$ відповідні Н-різниці існують і виконується щонайменше одна з таких рівностей*:

1) $\lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t+\Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t-\Delta)) = D_{ps}X(t)$,

2) $\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{ps}X(t)$,
3) $\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t+\Delta)\overset{H}{-}X(t))=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{ps}X(t)$,
4) $\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t-\Delta))=D_{ps}X(t)$.

Властивості цієї похідної було отримано в [12, 13, 35–37].

Пізніше M. T. Malinowski [15, 16], H. Vu і L. S. Dong [17], H. Vu і N. V. Hoa [18], N. V. Hoa і N. D. Phu [28], N. D. Phu і N. N. Hung [29], Ş. E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov і A. G. Fatullayev [14] адаптували концепцію Bede–Gal-похідної [30–32] для відображень з інтервальними значеннями на множиннозначні відображення $X\colon[0,T]\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ і отримали її властивості [14, 18].

Означення 5 [14, 17]. *Нехай* $X\colon[0,T]\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. *Будемо казати, що* $X(\cdot)$ *має BG-похідну* $D_{bg}X(t)\in\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *у точці* $t\in(0,T)$, *якщо для всіх достатньо малих* $\Delta>0$ *відповідні H-різниці існують і виконується щонайменше одна з таких рівностей*:

1) $\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t+\Delta)\overset{H}{-}X(t))=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t-\Delta))=D_{bg}X(t)$,
2) $\lim_{\Delta\to 0}(-\Delta)^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim_{\Delta\to 0}(-\Delta)^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{bg}X(t)$,
3) $\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t+\Delta)\overset{H}{-}X(t))=\lim_{\Delta\to 0}(-\Delta)^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{bg}X(t)$,
4) $\lim_{\Delta\to 0}(-\Delta)^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t-\Delta))=D_{bg}X(t)$.

***Зауваження* 6.** У статтях [15, 16] розглянуто множиннозначні відображення, що задовольняють умову 4 означення 5, і названо цю похідну *похідною Хукухари другого типу*.

Далі наведемо деякі властивості цих похідних.

***Зауваження* 7.** Якщо множиннозначне відображення $X(\cdot)$ H-диференційовне на $[0,T]$, то воно BG-диференційовне на $[0,T]$ і PS-диференційовне на $[0,T]$, а також $D_HX(t)=D_{ps}X(t)=$ $=D_{bg}X(t)$.

***Зауваження* 8.** Існують множиннозначні відображення, які BG-диференційовні і PS-диференційовні, але не H-диференційовні.

***Приклад* 1.** Множиннозначне відображення $X(t)=B_{|t|}(\mathbf{0})$ є PS-диференційовним на $\mathbb{R}^1$ та BG-диференційовним на $\mathbb{R}^1$ і $D_{ps}X(t)\equiv D_{bg}X(t)\equiv B_1(\mathbf{0})$. Але множиннозначне відображення $X(\cdot)$ є H-диференційовним лише на інтервалі $(0,+\infty)$ і $D_HX(t)\equiv B_1(\mathbf{0})$. На інтервалі $(-\infty,0)$ множиннозначне відображення $X(\cdot)$ не є H-диференційовним, оскільки функція $\operatorname{diam}(X(\cdot))$ є спадною на цьому проміжку.

Теорема 2 [13]. *Якщо множиннозначне відображення* $X\colon[0,T]\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *є PS-диференційовним на* $[0,T]$, *то для всіх* $t\in[0,T]$:

1) *якщо функція* $\operatorname{diam}(X(t))$ *є неспадною на* $[0,T]$, *то*

$$X(t)=X(0)+\int\limits_0^t D_{ps}X(s)ds;$$

2) *якщо функція* $\operatorname{diam}(X(t))$ *є спадною на* $[0,T]$, *то*

$$X(t)=X(0)\overset{H}{-}\int\limits_0^t D_{ps}X(s)ds.$$

Теорема 3 [14]. *Якщо множиннозначне відображення* $X\colon[0,T]\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *є BG-диференційовним на* $[0,T]$, *то для всіх* $t\in[0,T]$:

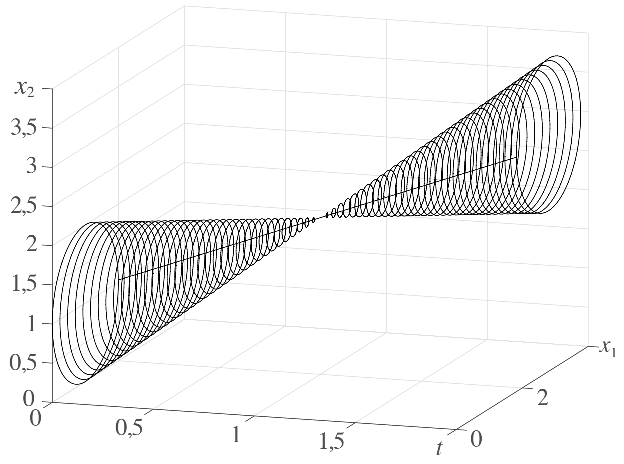


Рис. 1. Графік множиннозначного відображення $X(t)$, $t \in [0, 2]$.

1) *якщо функція* $\operatorname{diam}(X(t))$ *є неспадною на* $[0, T]$, *то*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t D_{bg} X(s) ds;$$

2) *якщо функція* $\operatorname{diam}(X(t))$ *є спадною на* $[0, T]$, *то*

$$X(t) = X(0) \xrightarrow{H} (-1) \int_0^t D_{bg} X(s) ds.$$

***Зауваження* 9.** Існують множиннозначні відображення $X(\cdot)$ такі, що $D_{bg}X(t) \neq D_{ps}X(t)$ для всіх t.

***Приклад* 2.** Нехай $X : [0, 2] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ і $X(t) = B_{|1-t|}(g(t))$, де $g(t) = (t + 1, t + 1)^T$.

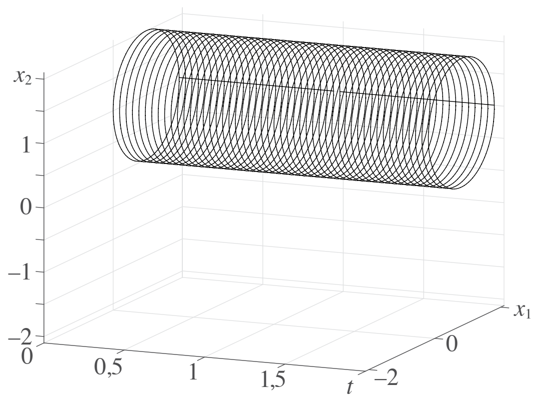
Очевидно, що на проміжку $[0, 1]$ функція $\operatorname{diam}(X(t)) = 2 - 2t$ є спадною, а на проміжку $[1, 2]$ функція $\operatorname{diam}(X(t)) = 2t - 2$ — зростаючою (рис. 1).

Множиннозначне відображення $X(\cdot)$ є BG-диференційовним на проміжку $(0, 2)$ і $D_{bg}X(t) \equiv B_1(a)$, де $a = (1, 1)^T$. Очевидно, що множиннозначне відображення $D_{bg}X(t)$ є неперервним на проміжку $(0, 2)$ (див. рис. 2, *а*). Але множиннозначне відображення $X(\cdot)$ є PS-диференційовним на проміжку $(0, 1)$ і $D_{ps}X(t) \equiv B_1(b) \neq D_{bg}X(t)$, де $b = (-1, -1)^T$, а також на проміжку $(1, 2)$ і $D_{ps}X(t) \equiv B_1(a) = D_{bg}X(t)$. Тобто PS-похідна $D_{ps}X(t)$ не існує в точці $t = 1$ (рис. 2, *б*).

***Приклад* 3.** Нехай $X : [0, 2] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ таке, що

$$X(t) = \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq t,\ x_2 \geq 0\right\}, & t \in [0, 1], \\ \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 2 - t,\ x_2 \geq 0\right\}, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Очевидно, що на проміжку $[0, 1]$ функція $\operatorname{diam}(X(t)) = 2t$ є зростаючою, а на проміжку $[1, 2]$ функція $\operatorname{diam}(X(t)) = 4 - 2t$ — спадною (рис. 3).



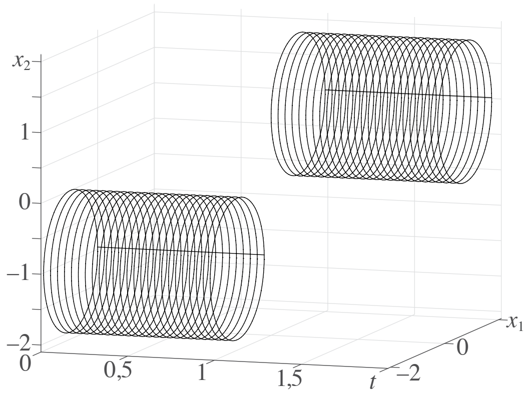


Рис. 2. Графіки множиннозначних відображень $D_{bg}X(t)$ (*а*) і $D_{ps}X(t)$ (*б*), $t \in [0,2]$.

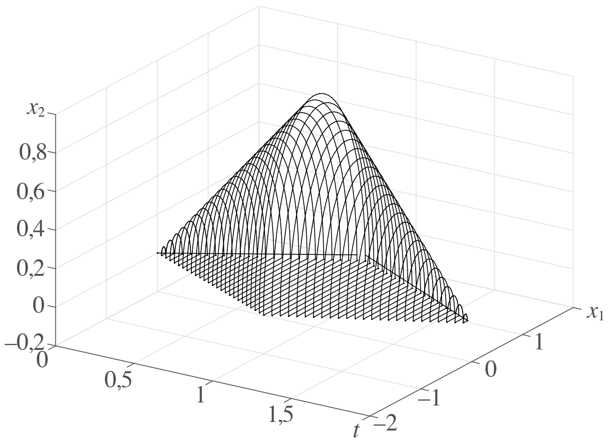


Рис. 3. Графік множиннозначного відображення $X(t)$, $t \in [0,2]$.

Множиннозначне відображення $X(\cdot)$ є PS-диференційовним на проміжку $(0,2)$ і $D_{ps}X(t) \equiv \equiv \{x \in R^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2 \ge 0\}$. Очевидно, що множиннозначне відображення $D_{ps}X(t)$ є неперервним на проміжку $(0,2)$ (рис. 4, *а*).

Але множиннозначне відображення $X(\cdot)$ є BG-диференційовним на $(0,1)$ і $D_{bg}X(t) \equiv \equiv D_{ps}X(t)$, а також BG-диференційовним на проміжку $(1,2)$ і $D_{bg}X(t) \equiv (-1)D_{ps}X(t)$. Тобто BG-похідна $D_{bg}X(t)$ не існує в точці $t=1$ (рис. 4, *б*).

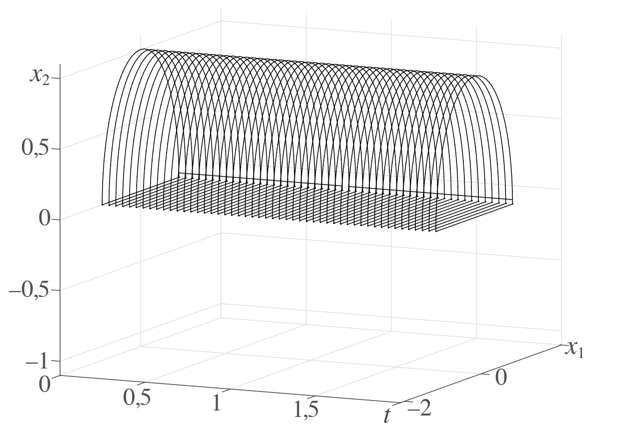
3. Лінійні множиннозначні диференціальні рівняння. Розглянемо лінійне множиннозначне диференціальне рівняння

$$DX(t) = aX(t) + F, \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

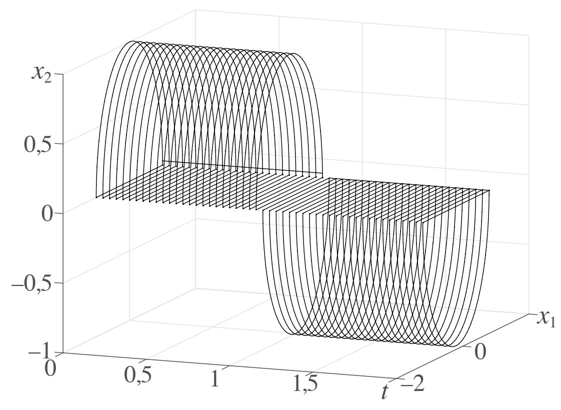
де $a \in \mathbb{R}^1,\ F \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n),\ X : [0,T] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — множиннозначне відображення; $DX(t)$ є однією з розглянутих раніше похідних $\big(D_H X(t), D_{ps}X(t), D_{bg}X(t)\big)$.

***Зауваження* 10.** У статті [12] розглянуто систему (1) для випадку, коли $F \equiv \{\mathbf{0}\}$.

Означення 6. *Множиннозначне відображення* $X(\cdot)$ *називається розв'язком системи* (1) *на проміжку* $[0,T]$, *якщо воно неперервно диференційовне і задовольняє систему* (1) *на* $[0,T]$.



а



б

Рис. 4. Графіки множиннозначних відображень $D_{ps}X(t)$ (*а*) і $D_{bg}X(t)$ (*б*), $t \in [0, 2]$.

Як відомо, лінійне диференціальне рівняння з похідною Хукухари

$$D_H X(t) = aX(t) + F, \quad X(0) = X_0, \tag{2}$$

має єдиний розв'язок на проміжку $[0, T]$, який є також розв'язком інтегрального рівняння [5, 6]

$$X(t) = X_0 + a \int_0^t X(s)ds + tF. \tag{3}$$

Звідси видно, що:

1) початкова множина X_0 і множина F визначають геометричну форму поперечного перерізу розв'язку $X(t)$ в кожен момент часу $t \in [0, T]$, тобто $X(t) = \alpha(t)X_0 + \beta(t)F$, де $\alpha,\ \beta\colon [0, T] \to \mathbb{R}^1_+$ — деякі неперервні функції;

2) функція $\operatorname{diam}(X(t))$ є неспадною на $[0, T]$.

***Зауваження* 11** [5]. Якщо $a > 0$, то $X(t) = e^{at}X_0 + \dfrac{e^{at} - 1}{a}F$ для всіх $t \in [0, T]$, тобто $\alpha(t) = e^{at}$ і $\beta(t) = \dfrac{e^{at} - 1}{a}$.

***Приклад* 4.** Нехай $n = 2,\ a = 1,\ X_0$ — трикутник із вершинами $(-1, 0)^T,\ (0, 1)^T,\ (1, 0)^T$, $F = \big\{f \in \mathbb{R}^2\colon |f_1| \le 0{,}5,\ |f_2| \le 1\big\}$ — прямокутник зі сторонами, які дорівнюють 1 і 2, $T = 1$.

Тоді розв'язок $X(t)$ відповідної системи (2) на проміжку $[0, 1]$ має вигляд $X(t) = e^t X_0 + (e^t - 1)F$ для всіх $t \in [0, T]$. Отже, при $t = 0$ множина $X(0)$ збігається з трикутником X_0, а в кожен момент часу $t \in (0, 1]$ множина $X(t)$ дорівнює сумі трикутника X_0 і прямокутника F з коефіцієнтами $\alpha(t) = e^t$ і $\beta(t) = e^t - 1$ і має вигляд, зображений на рис. 5.

***Зауваження* 12** [33]. Система (2) може не бути еквівалентною системі інтервальнозначних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари

$$\begin{gathered} D_H X_1(t) = aX_1(t) + F_1, \quad X_1(0) = X_{01}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_H X_n(t) = aX_n(t) + F_n, \quad X_n(0) = X_{0n}, \end{gathered} \tag{4}$$

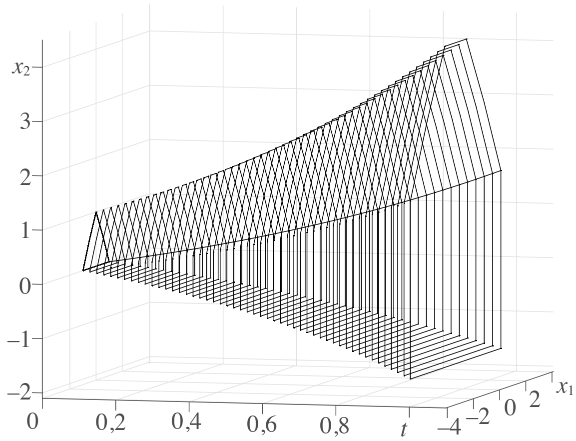


Рис. 5. Розв'язок $X(t)$ диференціального рівняння (2) з похідною Хукухари на проміжку $[0,1]$.

де $X_i\colon [0,T] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^1)$ — інтервальнозначне відображення, X_{0i} — проєкція множини X_0 на вісь Ox_i, F_i — проєкція множини F на вісь Ox_i, $i=\overline{1,n}$.

Якщо $X(\cdot)$ — розв'язок системи (2) і $X_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$, — розв'язки системи (4), то $X(t) \subset \subset X_1(t) \times \ldots \times X_n(t)$ для всіх $t \in [0,T]$.

Якщо $X_0 = X_{01} \times \ldots \times X_{0n}$ і $F = F_1 \times \ldots \times F_n$, то система (2) еквівалентна системі (4).

Продемоструємо це на такому прикладі.

***Приклад* 5.** Нехай $n=2$, $a=1$, $F=\{\mathbf{0}\}$, $X_0 = B_1(\mathbf{0})$. Тоді системи (2) і (4) мають вигляд

$$D_H X(t) = X(t), \qquad X(0) = B_1(\mathbf{0}), \quad t \in [0,2], \tag{5}$$

і

$$\begin{aligned} D_H X_1(t) = X_1(t), &\quad X_1(0) = X_{01} = [-1,1], \\ D_H X_2(t) = X_2(t), &\quad X_2(0) = X_{02} = [-1,1], \end{aligned} \tag{6}$$

де $X\colon [0,2] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — множиннозначне відображення, $X_i\colon [0,2] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^1)$ — інтервальнозначне відображення, X_{0i} — проєкція множини X_0 на вісь Ox_i, $i=1,2$.

Множиннозначне відображення $X(t) = B_{e^t}(\mathbf{0})$ є розв'язком системи (5). Інтервальнозначні відображення $X_i(t) = [-e^t, e^t]$, $i=1,2$, є розв'язками системи (6). Очевидно, що $X(t) \subset \subset X_1(t) \times X_2(t)$ для всіх $t \in [0,2]$ (рис. 6).

Але якщо початкова множина $X(0) = \big\{x \in R^2\colon |x_i| \le 1,\ i=1,2\big\}$ є квадратом, то $X_0 \equiv X_{01} \times X_{02}$ і $X(t) \equiv X_1(t) \times X_2(t)$ для всіх $t \in [0,2]$, тобто розв'язки систем (5) і (6) будуть збігатися між собою (рис. 7).

Тепер розглянемо лінійне диференціальне рівняння (1) із PS- і BG-похідною. Як відомо з [13, 14, 35 – 37], ці диференціальні рівняння мають принаймні один розв'язок. Більш того, один із цих розв'язків (діаметр якого є функцією, що не спадає) збігається з розв'язком відповідного диференціального рівняння з похідною Хукухари (2).

Проілюструємо це на такому прикладі.

***Приклад* 6.** Нехай

$$DX(t) = X(t) + B_1(\mathbf{0}), \qquad X(0) = B_1(\mathbf{0}), \quad t \in [0,1], \tag{7}$$

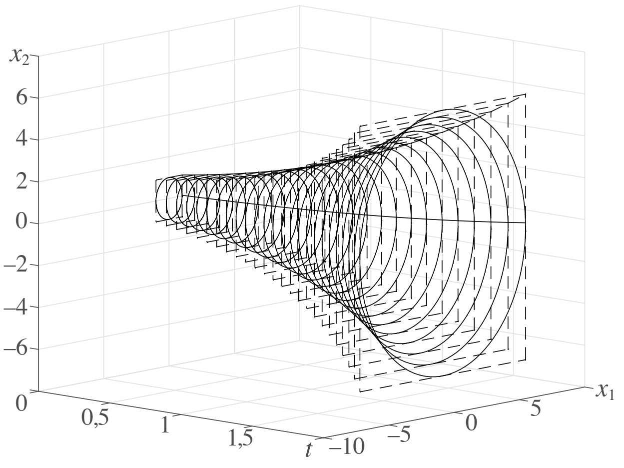


Рис. 6. Розв'язки систем (5) і (6) у випадку $X(t) \subset \subset X_1(t) \times X_2(t),\ t \in [0, 2]$. Графік $X_1(t) \times X_2(t)$ зображено штрихом.

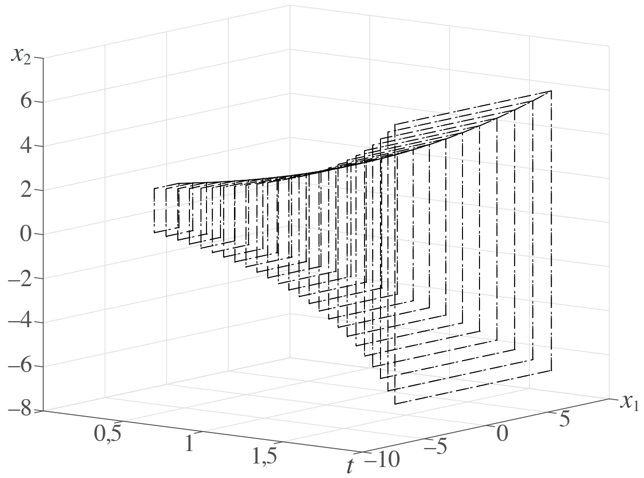


Рис. 7. Розв'язки систем (5) і (6) у випадку $X_0 \equiv X_{01} \times X_{02}$.

де $X\colon [0,1] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — множиннозначне відображення, $DX(t)$ — одна з похідних $\big(D_H X(t), D_{ps}X(t), D_{bg}(t)\big)$.

Множиннозначне відображення $X(t) = B_{2e^t-1}(\mathbf{0})$ є розв'язком диференціального рівняння (7) із похідною Хукухари (рис. 8).

Множиннозначні відображення $X_1(t) = B_{2e^t-1}(\mathbf{0})$ і $X_2(t) = B_{2e^{-t}-1}(\mathbf{0})$ є розв'язками диференціального рівняння (7) із PS- і BG-похідною (рис. 9, 10).

У цьому випадку розв'язки диференціального рівняння з PS-похідною будуть також розв'язками диференціального рівняння з BG-похідною і навпаки. Для першого розв'язку $X_1(\cdot)$ функція $\mathrm{diam}(X_1(t))$ є неспадною на проміжку $[0,1]$. Для другого розв'язку $X_2(\cdot)$ функція $\mathrm{diam}(X_2(t))$ є спадною на проміжку $[0, \ln(2)]$. Також зазначимо, що перший розв'язок $X_1(\cdot)$ можна продовжити на проміжок $[0,+\infty)$, а другий розв'язок $X_2(\cdot)$ існує лише на проміжку $[0, \ln(2)]$. Очевидно, що перший розв'язок $X_1(\cdot)$ є розв'язком диференціального рівняння з похідною Хукухари, тобто $X(t) = X_1(t)$ для всіх $t \in [0,1]$.

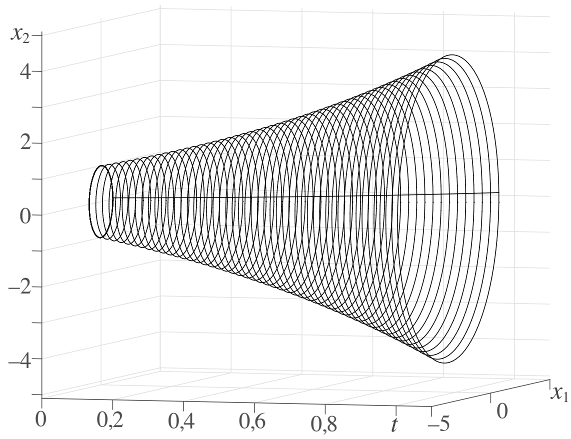


Рис. 8. Розв'язок $X(t)$ диференціального рівняння (7) із похідною Хукухари на проміжку $[0, 1]$.

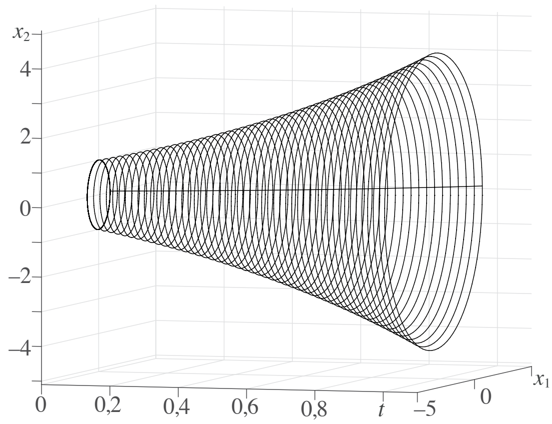


Рис. 9. Перший базовий розв'язок $X_1(t)$ диференціального рівняння (7) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0, 1]$.

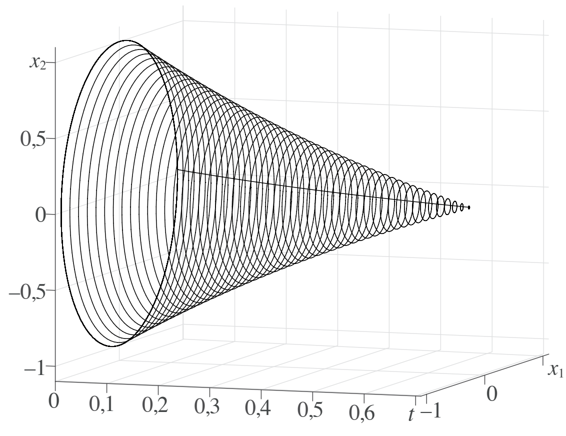


Рис. 10. Другий базовий розв'язок $X_2(t)$ диференціального рівняння (7) з PS- і BG-похідною на проміжку $[0, \ln(2)]$.

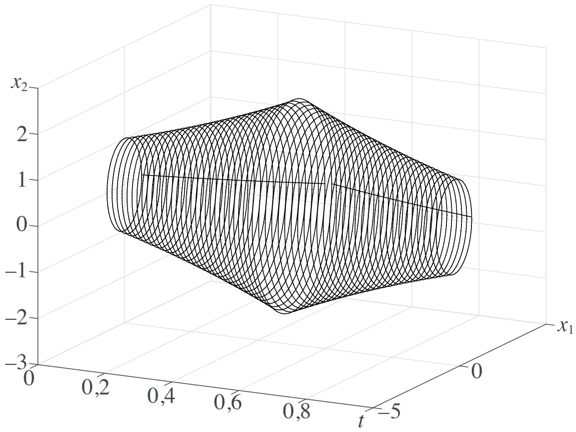


Рис. 11. Мішаний розв'язок $Y_1(t)$ диференціального рівняння (7) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0, 1]$.

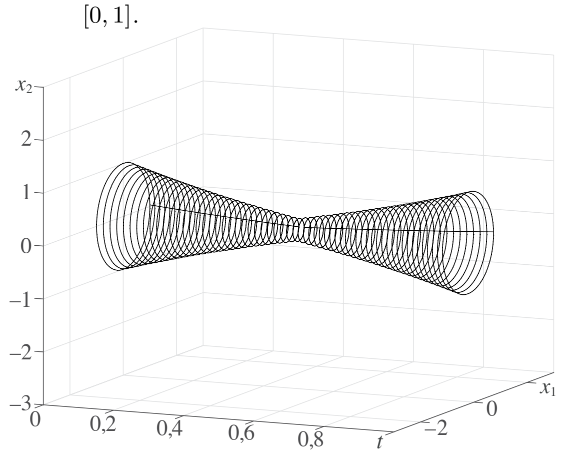


Рис. 12. Мішаний розв'язок $Y_2(t)$ диференціального рівняння (7) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0, 1]$.

Розв'язки $X_1(\cdot)$ і $X_2(\cdot)$ називаються *базовими розв'язками*. Розв'язок $X_1(\cdot)$ називається *першим базовим розв'язком*, а розв'язок $X_2(\cdot)$ — *другим базовим розв'язком*.

Також зазначимо, що множиннозначні відображення

$$Y_1(t) = \begin{cases} B_{2e^t-1}(\mathbf{0}), & t \in [0; 0{,}5], \\ B_{2e^{1-t}-1}(\mathbf{0}), & t \in [0{,}5; 1], \end{cases} \qquad Y_2(t) = \begin{cases} B_{2e^{-t}-1}(\mathbf{0}), & t \in [0; 0{,}5], \\ B_{2e^{t-1}-1}(\mathbf{0}), & t \in [0{,}5; 1], \end{cases}$$

також будуть розв'язками диференціального рівняння (7) із PS- і BG-похідною (рис. 11, 12).

Очевидно, що такі розв'язки легко побудувати завдяки базовим розв'язкам, і для даної системи таких розв'язків буде безліч. Такі розв'язки $Y(\cdot)$ називаються *мішаними розв'язками*, і функція $\mathrm{diam}(Y(\cdot))$ не є монотонно спадною або монотонно зростаючою на всьому розглянутому інтервалі (або на інтервалі, на якому вони існують).

Зазначимо також, що форма поперечного перерізу розв'язків відповідає формі початкової множини X_0 і множини F.

Також зауважимо, що в попередньому прикладі розв'язки для лінійних диференціальних рівнянь із PS- та BG-похідною збігалися між собою, тому що початкова множина X_0 і множина

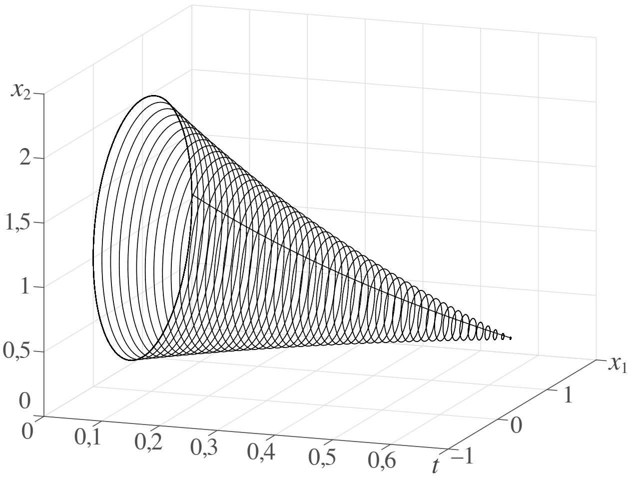


Рис. 13. Другий базовий розв'язок $X_2^{ps}(t)$ диференціального рівняння (8) із PS-похідною на проміжку $[0, \ln(2)]$.

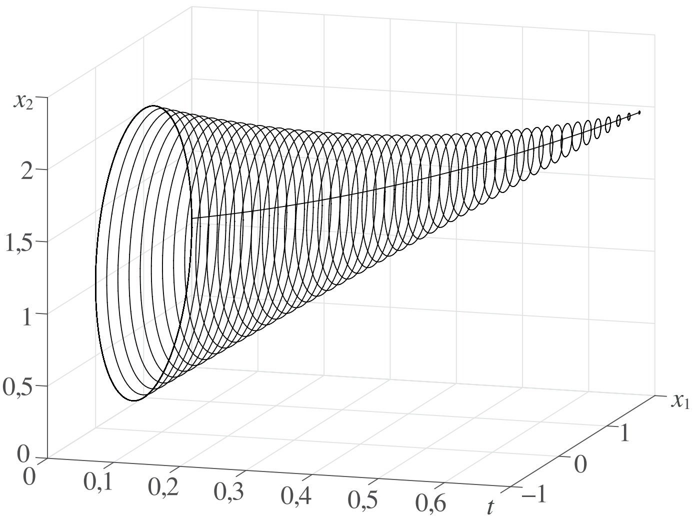


Рис. 14. Другий базовий розв'язок $X_2^{bg}(t)$ диференціального рівняння (9) із BG-похідною на проміжку $[0, \ln(2)]$.

F є центрально-симетричними і $X_0 = (-1)X_0,\ F = (-1)F$. Однак в інших випадках другі базові розв'язки можуть бути різними, якщо ця умова не виконується.

***Приклад* 7.** Нехай

$$D_{ps}X(t) = X(t) + B_1(\mathbf{1}), \qquad X(0) = B_1(\mathbf{0}), \quad t \in [0,1], \tag{8}$$

$$D_{bg}X(t) = X(t) + B_1(\mathbf{1}), \qquad X(0) = B_1(\mathbf{0}), \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

де $B_1(\mathbf{1}) = \big\{ b \in R^2 \colon (b_1-1)^2 + (b_2-1)^2 \le 1 \big\}$.

Очевидно, що $B_1(\mathbf{1}) \ne (-1)B_1(\mathbf{1})$, і тому другі базові розв'язки цих рівнянь будуть задовольняти різні відповідні інтегральні рівняння

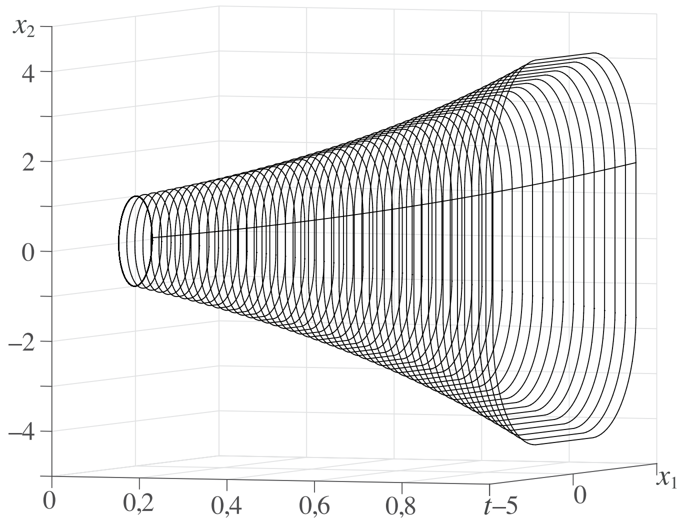


Рис. 15. Розв'язок $X(t)$ диференціального рівняння (10) із похідною Хукухари на проміжку $[0, 1]$.

$$X_2^{ps}(t) = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} \int\limits_0^t X_2^{ps}(s)ds \overset{H}{-} tB_1(\mathbf{1}),$$

$$X_2^{bg}(t) = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1) \int\limits_0^t X_2^{bg}(s)ds \overset{H}{-} (-1)tB_1(\mathbf{1}),$$

а отже, вони будуть різними (рис. 13, 14). Також диференціальні рівняння (8) і (9) будуть мати різні мішані розв'язки.

Варто зауважити, що другий базовий розв'язок для таких рівнянь може не існувати.

***Приклад* 8.** Нехай

$$DX(t) = X(t) + C_1(\mathbf{0}), \qquad X(0) = B_1(\mathbf{0}), \quad t \in [0, 1], \tag{10}$$

де $C_1(\mathbf{0}) = \big\{ v \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \leq 1,\ i = 1, 2 \big\}$ — квадрат, $X : [0, 1] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — множиннозначне відображення, $DX(t)$ — відповідна похідна $\big(D_H X(t), D_{ps} X(t), D_{bg}(t)\big)$.

Множиннозначне відображення $X(t) = B_{e^t}(\mathbf{0}) + C_{e^t - 1}(\mathbf{0})$ є розв'язком диференціального рівняння (10) із похідною Хукухари (рис. 15).

Це диференціальне рівняння з BG- і PS-похідною має лише перший базовий розв'язок, який збігається з розв'язком диференціального рівняння з похідною Хукухари.

Других базових розв'язків для цих рівнянь не буде, оскільки множиннозначні відображення, що задовольняють відповідні інтегральні рівняння

$$X_2^{bg}(t) = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1) \int\limits_0^t D_{bg} X_2^{bg}(s)ds = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1) \int\limits_0^t [X_2^{bg}(s) + C_1(\mathbf{0})]ds =$$

$$= B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1)tC_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1) \int\limits_0^t X_2^{bg}(s)ds, \tag{11}$$

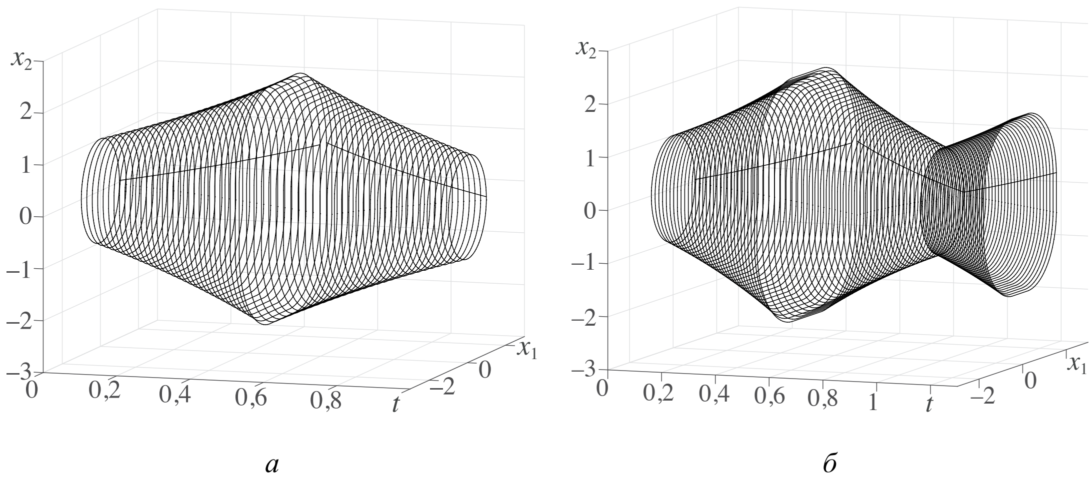


Рис. 16. Мішані розв'язки $Y_1(t)$ (*а*) і $Y_2(t)$ (*б*) диференціального рівняння (10) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0, 1]$.

$$X_2^{ps}(t) = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} \int_0^t D_{ps} X_2^{ps}(s) ds = B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} \int_0^t [X_2^{ps}(s) + C_1(\mathbf{0})] ds =$$

$$= B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} tC_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} \int_0^t X_2^{ps}(s) ds, \tag{12}$$

не існують, тому що різниці Хукухари $B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} tC_1(\mathbf{0})$ і $B_1(\mathbf{0}) \overset{H}{-} (-1)tC_1(\mathbf{0})$ між кругом $B_1(\mathbf{0})$ і квадратом $tC_1(\mathbf{0})$ не існують для всіх $t > 0$.

Але мішані розв'язки для цих диференціальних рівнянь будуть існувати. Наприклад, множиннозначні відображення $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ (рис. 16) є мішаними розв'язками диференціального рівняння (10) із PS- і BG-похідною.

Очевидно, що в цьому прикладі таких розв'язків можна побудувати нескінченно багато. Для цих мішаних розв'язків $Y(\cdot)$ функція діаметра $\mathrm{diam}(Y(\cdot))$ не збільшується і не зменшується в усьому інтервалі. Проте діаметр будь-якого мішаного розв'язку $Y(\cdot)$ повинен збільшуватися на початку інтервалу.

Далі ми будемо розглядати лише базові розв'язки.

Виникає питання: в яких випадках такі диференціальні рівняння мають два базових розв'язки?

Спочатку розглянемо випадок, коли $a = 0$. Тоді система (1) набирає вигляду

$$DX(t) = F, \quad X(0) = X_0. \tag{13}$$

Очевидно, що множиннозначне відображення $X_1(t) = X_0 + tF$ буде розв'язком диференціального рівняння (13) із похідною Хукухари, а також першим базовим розв'язком диференціального рівняння (13) із PS- і BG-похідною.

Також очевидно, що другий базовий розв'язок $X_2(\cdot)$ диференціального рівняння (13) з PS-похідною, якщо він існує, має вигляд

$$X_2(t) = X_0 \overset{H}{-} \int\limits_0^t F ds = X_0 \overset{H}{-} tF.$$

Тобто для існування розв'язку $X_2(t)$ на деякому проміжку $[0, T]$ повинна виконуватись умова: для всіх $t \in [0, T]$ має існувати різниця Хукухари

$$X_0 \overset{H}{-} tF. \tag{14}$$

Аналогічно, другий базовий розв'язок $X_2(\cdot)$ диференціального рівняння (13) із BG-похідною, якщо він існує, має вигляд

$$X_2(t) = X_0 \overset{H}{-} (-1) \int\limits_0^t F ds = X_0 \overset{H}{-} (-1)tF.$$

Тобто для існування розв'язку $X_2(t)$ на деякому проміжку $[0, T]$ повинна виконуватись умова: для всіх $t \in [0, T]$ має існувати різниця Хукухари

$$X_0 \overset{H}{-} (-1)tF. \tag{15}$$

Варто зазначити, що з властивостей різниці Хукухари випливають такі умови:

1) якщо різниця $X_0 \overset{H}{-} TF$ існує, множина F є центрально-симетричною і $F = (-1)F$, то різниця $X_0 \overset{H}{-} (-1)TF$ існує і $X_0 \overset{H}{-} (-1)tF = X_0 \overset{H}{-} tF$ для всіх $t \in [0, T]$. Тобто в цьому випадку другі базові розв'язки диференціальних рівнянь (13) із PS- і PG-похідною існують на проміжку $[0, T]$ і збігаються між собою;

2) якщо різниця $X_0 \overset{H}{-} TF$ існує, множина F є центрально-симетричною і $F \neq (-1)F$, то різниця $X_0 \overset{H}{-} (-1)TF$ існує, але $X_0 \overset{H}{-} (-1)tF \neq X_0 \overset{H}{-} tF$ для всіх $t \in (0, T]$. Тобто в цьому випадку другі базові розв'язки диференціальних рівнянь (13) із PS- і PG-похідною існують на проміжку $[0, T]$, але не збігаються між собою (різні);

3) якщо різниця $X_0 \overset{H}{-} TF$ існує і множина F не є центрально-симетричною, то різниця $X_0 \overset{H}{-} (-1)tF$ не існує для всіх $t \in (0, T]$. Тобто в цьому випадку другий базовий розв'язок диференціального рівняння (13) із PS-похідною існує, а другий базовий розв'язок диференціального рівняння (13) із PG-похідною не існує;

4) якщо різниця $X_0 \overset{H}{-} (-1)TF$ існує і множина F не є центрально-симетричною, то різниця $X_0 \overset{H}{-} tF$ не існує для всіх $t \in (0, T]$. Тобто в цьому випадку другий базовий розв'язок диференціального рівняння (13) із PG-похідною існує, а другий базовий розв'язок диференціального рівняння (13) із PS-похідною не існує.

Тепер розглянемо випадок, коли $a \neq 0$. Як було зазначено раніше, множиннозначне відображення $X(\cdot)$, яке задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) = X_0 + a \int\limits_0^t X(s) ds + tF,$$

збігається з розв'язком диференціального рівняння (1) із похідною Хукухари, а також із першими базовими розв'язками диференціальних рівнянь (1) із PS- і BG-похідною.

Також множиннозначні відображення $X_2^{ps}(\cdot)$ і $X_2^{bg}(\cdot)$ (якщо вони існують), які задовольняють на деякому проміжку $[0,T]$ відповідне інтегральне рівняння

$$X_2^{ps}(t) = X_0 \stackrel{H}{-} \left(a \int_0^t X_2^{ps}(s)ds + tF \right),$$

$$X_2^{bg}(t) = X_0 \stackrel{H}{-} (-1) \left(a \int_0^t X_2^{bg}(s)ds + tF \right),$$

збігаються з другим базовим розв'язком $X_2^{ps}(\cdot)$ диференціального рівняння (1) із PS-похідною та другим базовим розв'язком $X_2^{bg}(\cdot)$ диференціального рівняння (1) із BG-похідною.

Оскільки

$$X_0 \stackrel{H}{-} \left(a \int_0^t X_2^{ps}(s)ds + tF \right) = X_0 \stackrel{H}{-} a \int_0^t X_2^{ps}(s)ds \stackrel{H}{-} tF,$$

$$X_0 \stackrel{H}{-} (-1) \left(a \int_0^t X_2^{ps}(s)ds + tF \right) = X_0 \stackrel{H}{-} (-1)a \int_0^t X_2^{ps}(s)ds \stackrel{H}{-} (-1)tF,$$

то, очевидно, що можливість існування цих розв'язків також залежить від виконання умов (14) і (15), а також від існування множиннозначних відображень $\overline{X}_2^{ps}(\cdot)$ і $\overline{X}_2^{bg}(\cdot)$, які задовольняють на деякому проміжку $[0,T]$ відповідні інтегральні рівняння

$$\overline{X}_2^{ps}(t) = X_0 \stackrel{H}{-} a \int_0^t \overline{X}_2^{ps}(s)ds,$$

$$\overline{X}_2^{bg}(t) = X_0 \stackrel{H}{-} (-1)a \int_0^t \overline{X}_2^{bg}(s)ds,$$

що було розглянуто в роботі [12].

Тепер розглянемо приклади, коли $a = 1$ $(a > 0)$.

***Приклад* 9.** Розглянемо рівняння

$$D_{ps}X(t) = X(t) + K, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1], \tag{16}$$

$$D_{bg}X(t) = X(t) + K, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1], \tag{17}$$

де $X : [0,1] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — множиннозначне відображення, $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2 \ge 0 \right\}$ — верхнє півколо.

Диференціальне рівняння (16) із PS-похідною має два базових розв'язки $X_1(\cdot)$ і $X_2(\cdot)$ (рис. 17, 18).

Також зауважимо, що другий базовий розв'язок $X_2(\cdot)$ існує лише на інтервалі $[0, \ln(2)]$.

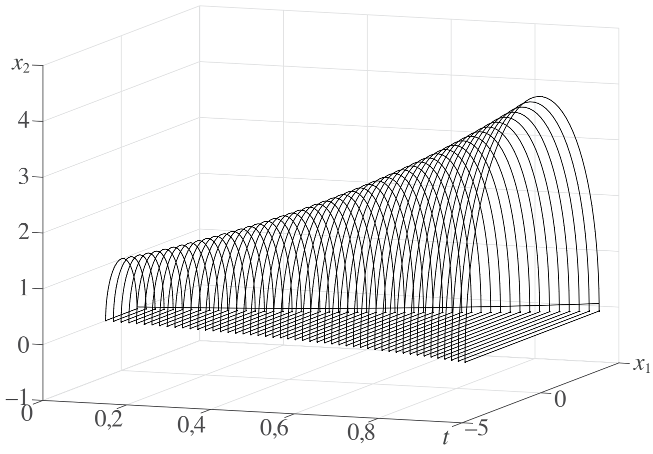


Рис. 17. Перший базовий розв'язок $X_1(t)$ диференціального рівняння (16) із PS-похідною та диференціального рівняння (17) із BG-похідною на проміжку $[0, 1]$.

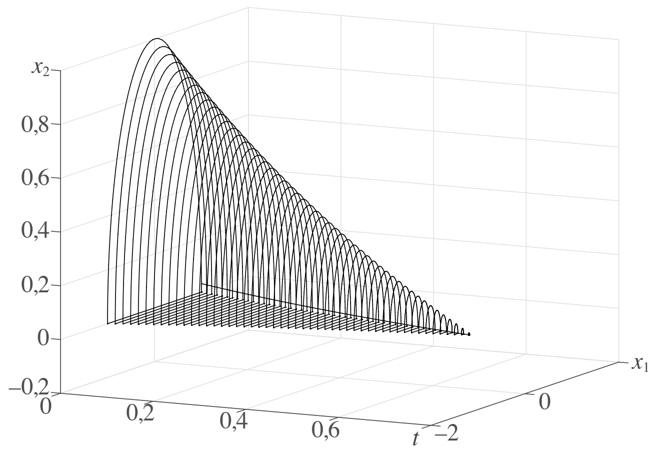


Рис. 18. Другий базовий розв'язок $X_2(t)$ диференціального рівняння (16) із PS-похідною на проміжку $[0, \ln(2)]$.

Диференціальне рівняння (17) із BG-похідною має лише один базовий розв'язок, який збігається з розв'язком диференціального рівняння з похідною Хукухари та першим базовим розв'язком $X_1(\cdot)$ диференціального рівняння з PS-похідною (див. рис. 17).

Оскільки множина K не є центрально-симетричною, то різниця Хукухари $K \overset{H}{-} (-1)tK$ не існує для $t > 0$. Відповідно, другий базовий розв'язок не існує, оскільки не існує множиннозначного відображення, що задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) = K \overset{H}{-} (-1) \int_0^t D_{bg}X(s)ds = K \overset{H}{-} (-1) \int_0^t [X(s) + K]ds =$$

$$= K \overset{H}{-} (-1) \left(\int_0^t X(s)ds + tK \right) = K \overset{H}{-} (-1)tK \overset{H}{-} (-1) \int_0^t X(s)ds.$$

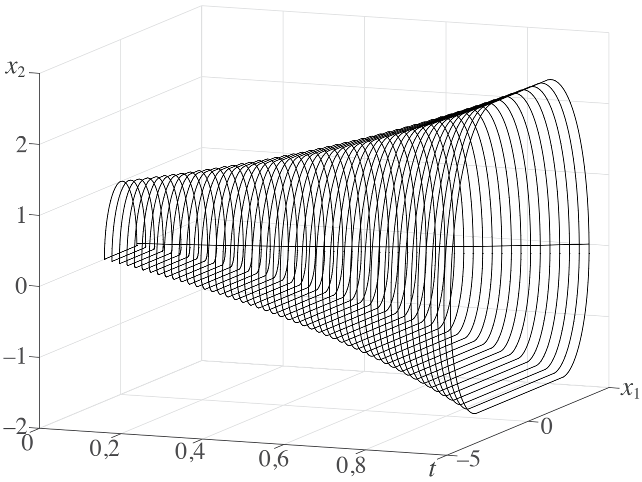


Рис. 19. Перший базовий розв’язок $X(t)$ диференціальних рівнянь (18) і (19) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0,1]$.

***Приклад* 10.** Нехай

$$D_{ps}X(t) = X(t) + \overline{K}, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1], \tag{18}$$

$$D_{bg}X(t) = X(t) + \overline{K}, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1], \tag{19}$$

де $\overline{K} = (-1)K = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2 \le 0\right\}$ — нижнє півколо.

Ці диференціальні рівняння з PS- і BG-похідною мають лише один базовий розв’язок, який збігається з розв’язком диференціального рівняння з похідною Хукухари (рис. 19).

Других базових розв’язків для диференціальних рівнянь (18) та (19) не існує, оскільки не існує множиннозначних відображень, що відповідають інтегральним рівнянням

$$X(t) = K \overset{H}{-} \int_0^t D_{ps}X(s)ds = K \overset{H}{-} \int_0^t \left[X(s) + \overline{K}\right]ds =$$

$$= K \overset{H}{-} \int_0^t X(s)ds \overset{H}{-} t\overline{K} = K \overset{H}{-} t\overline{K} \overset{H}{-} \int_0^t X(s)ds, \tag{20}$$

$$X(t) = K \overset{H}{-} (-1)\int_0^t D_{bg}X(s)ds = K \overset{H}{-} (-1)\int_0^t \left[X(s) + \overline{K}\right]ds =$$

$$= K \overset{H}{-} (-1)\int_0^t X(s)ds \overset{H}{-} (-1)t\overline{K} = K \overset{H}{-} (-1)t\overline{K} \overset{H}{-} (-1)\int_0^t X(s)ds. \tag{21}$$

У рівнянні (20) не буде існувати різниця Хукухари $K \overset{H}{-} t\overline{K}$ для всіх $t > 0$, а для рівняння (21) не буде існувати розв’язок інтегрального рівняння $X(t) = K \overset{H}{-} (-1)\int_0^t X(s)ds$, оскільки множини K і $X(t)$ не є центрально-симетричними [12].

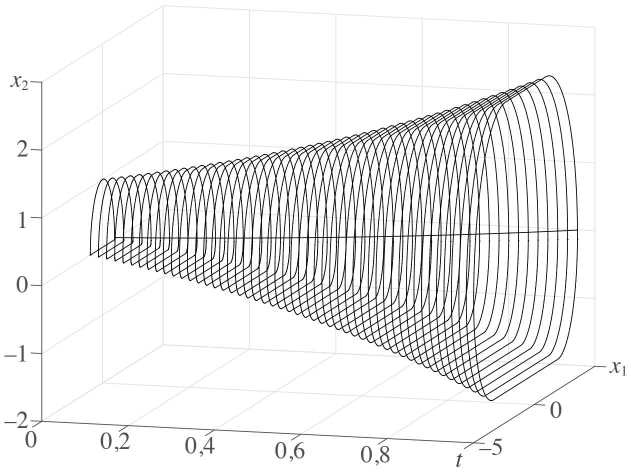


Рис. 20. Перший базовий розв'язок $X(t)$ диференціальних рівнянь (22) і (23) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0,1]$.

Тепер розглянемо приклад, коли $a=-1$ $(a<0)$.

***Приклад* 11.** Нехай

$$D_{ps}X(t)=(-1)X(t)+K \qquad X(0)=K, \quad t\in[0,1], \tag{22}$$

$$D_{bg}X(t)=(-1)X(t)+K, \qquad X(0)=K, \quad t\in[0,1]. \tag{23}$$

Ці диференціальні рівняння з PS- і BG-похідною мають лише один базовий розв'язок, який збігається з розв'язком диференціального рівняння з похідною Хукухари (рис. 20).

Другі базові розв'язки для диференціальних рівнянь (22) і (23) не існують, оскільки не існують множиннозначні відображення, що відповідають інтегральним рівнянням

$$X(t)=K\overset{H}{-}\int_0^t D_{ps}X(s)ds=K\overset{H}{-}\int_0^t[(-1)X(s)+K]ds=$$

$$=K\overset{H}{-}(-1)\int_0^t X(s)ds\overset{H}{-}tK, \tag{24}$$

$$X(t)=K\overset{H}{-}(-1)\int_0^t D_{bg}X(s)ds=K\overset{H}{-}(-1)\int_0^t[(-1)X(s)+K]ds=$$

$$=K\overset{H}{-}\int_0^t X(s)ds\overset{H}{-}(-1)tK=K\overset{H}{-}(-1)tK\overset{H}{-}\int_0^t X(s)ds. \tag{25}$$

Для рівняння (24) не буде існувати розв'язок інтегрального рівняння

$$X(t)=K\overset{H}{-}(-1)\int_0^t X(s)ds,$$

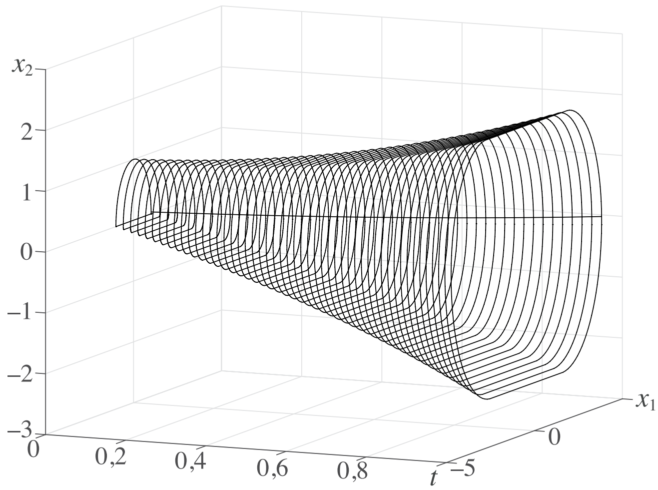


Рис. 21. Перший базовий розв'язок $X_1(t)$ диференціальних рівнянь (26) і (27) із PS- і BG-похідною на проміжку $[0,1]$.

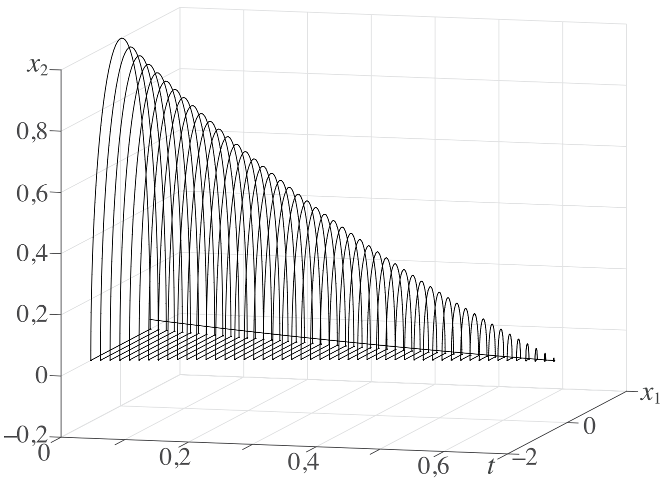


Рис. 22. Другий базовий розв'язок $X_2(t)$ диференціального рівняння (26) із BG-похідною на проміжку $[0,\ln(2)]$.

а в рівнянні (25) не буде існувати різниця Хукухари $K \overset{H}{-} (-1)tK$ для всіх $t > 0$, оскільки множини K і $X(t)$ не є центрально-симетричними [12].

***Приклад* 12.** Нехай

$$D_{bg}X(t) = (-1)X(t) + \overline{K}, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1], \tag{26}$$

$$D_{ps}X(t) = (-1)X(t) + \overline{K}, \qquad X(0) = K, \quad t \in [0,1]. \tag{27}$$

Диференціальне рівняння (26) із BG-похідною має два базових розв'язки $X_1(\cdot)$ і $X_2(\cdot)$ (рис. 21, 22).

Також зауважимо, що другий базовий розв'язок $X_2(\cdot)$ існує лише на інтервалі $[0,\ln(2)]$.

Диференціальне рівняння (27) із PS-похідною має лише перший базовий розв'язок, який збігається з розв'язком диференціального рівняння з похідною Хукухари та першим базовим розв'язком $X_1(\cdot)$ диференціального рівняння з BG-похідною (див. рис. 21).

Другий базовий розв'язок не існує, оскільки відсутнє множиннозначне відображення, що задовольняє відповідне інтегральне рівняння

$$X(t) = K \stackrel{H}{-} \int\limits_0^t D_{ps}X(s)ds = K \stackrel{H}{-} \int\limits_0^t \left[(-1)X(s) + \overline{K}\right] ds =$$

$$= K \stackrel{H}{-} (-1) \int\limits_0^t X(s)ds \stackrel{H}{-} t\overline{K}.$$

Оскільки множини K і $\overline{K}$ не є центрально-симетричними, то різниця Хукухари $K \stackrel{H}{-} t\overline{K}$ не існує для $t > 0$, а також не буде існувати розв'язок інтегрального рівняння $X(t) = = K \stackrel{H}{-} \int_0^t (-1)X(s)ds$ [12].

На підставі викладеного вище можна сформулювати таке твердження.

Твердження 1. 1. *Якщо множини* X_0 *і* F *є центрально-симетричними*, $aX_0 = (-1)aX_0$, $F = (-1)F$ *і знайдеться* $\alpha > 0$ *таке, що H-різниця* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha F$ *існує, то диференціальне рівняння* (1) *із PS-похідною та диференціальне рівняння* (1) *із BG-похідною мають два базових розв'язки і вони будуть однаковими.*

2. *Якщо множини* X_0 *і* F *є центрально-симетричними*, $aX_0 \neq (-1)aX_0$ *і (або)* $F \neq (-1)F$ *та знайдеться* $\alpha > 0$ *таке, що H-різниця* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha F$ *існує, то диференціальне рівняння* (1) *із PS-похідною та диференціальне рівняння* (1) *із BG-похідною мають два базових розв'язки, але їхні другі базові розв'язки будуть різними.*

3. *Якщо множини* X_0 *і* F *не є центрально-симетричними*, $a \geq 0$ *і знайдеться* $\alpha > 0$ *таке, що H-різниця* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha F$ *існує, то диференціальне рівняння* (1) *із PS-похідною має два базових розв'язки, а диференціальне рівняння* (1) *із BG-похідною має лише перший базовий розв'язок.*

4. *Якщо множини* X_0 *і* F *не є центрально-симетричними*, $a \leq 0$ *і знайдеться* $\alpha > 0$ *таке, що H-різниця* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha(-1)F$ *існує, то диференціальне рівняння* (1) *із BG-похідною має два базових розв'язки, а диференціальне рівняння* (1) *із PS-похідною має лише перший базовий розв'язок.*

5. *Якщо для всіх* $\alpha > 0$ *H-різниці* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha F$ *та* $X_0 \stackrel{H}{-} \alpha(-1)F$ *не існують, то диференціальне рівняння* (1) *із BG-похідною і диференціальне рівняння* (1) *із PS-похідною мають лише перші базові розв'язки, які збігаються із розв'язком диференціального рівняння* (1) *із похідною Хукухари.*

4. Висновки. У статті показано, що лінійні множиннозначні диференціальні рівняння мають суттєві відмінності від звичайних та інтервальнозначних лінійних диференціальних рівнянь. Тобто кількість розв'язків для цих рівнянь може залежати від розглядуваної похідної, геометричної форми початкової множини X_0, геометричної форми множини F та коефіцієнта у правій частині диференціального рівняння.

Також зауважимо, що в статтях [13, 35–37] було розглянуто інший тип диференціальних рівнянь з PS-похідною, для яких може існувати не більше ніж один розв'язок, і цей розв'язок буде збігатися з одним із розв'язків системи (1) із PS-похідною.

Література

1. F. S. de Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., **2**, № 4-5, 491–501 (1969).

2. V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Sci. Publ. (2006).
3. V. Lupulescu, D. O'Regan, *A new derivative concept for set-valued and fuzzy-valued functions. Differential and integral calculus in quasilinear metric spaces*, Fuzzy Sets and Syst., **404**, 75 – 110 (2021).
4. A. A. Martynyuk, *Qualitative analysis of set-valued differential equations*, Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham (2019).
5. N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities*, De Gruyter Stud. Math., **40**, Walter De Gruyter GmbH& Co., Berlin, Boston (2011).
6. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (2009).
7. В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (1999).
8. A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).
9. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, *Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative*, J. Uncertain Syst., **13**, 3 – 13 (2019).
10. M. Hukuhara, *Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac., **10**, 205 – 223 (1967).
11. H. Minkowski, *Zur Geometrie der Zahlen*, Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, Heidelberg, Berlin (1904), p. 164 – 173.
12. T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, N. V. Skripnik, A. V. Plotnikov, *Some remarks on linear set-valued differential equations*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **65**, № 3, 415 – 431 (2020); DOI: https://doi.org/10.24193/subbmath.2020.3.09.
13. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *Set-valued differential equations with generalized derivative*, J. Adv. Res. Pure Math., **3**, № 1, 144 – 160 (2011); DOI: https://doi.org/10.5373/jarpm.475.062210.
14. Ş. E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A. G. Fatullayev, *Relationship between Bede – Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions*, Fuzzy Sets and Syst., **265**, 57 – 72 (2016); DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.12.002.
15. M. T. Malinowski, *Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations*, Appl. Math. and Comput., **218**, 9427 – 9437 (2012); DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.027.
16. M. T. Malinowski, *On set differential equations in Banach spaces — a second type Hukuhara differentiability approach*, Appl. Math. and Comput., **219**, 289 – 305 (2012); DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.06.019.
17. H. Vu, L. S. Dong, *Initial value problem for second-order random fuzzy differential equations*, Adv. Difference Equat., **2015**, Article 373 (2015), 23 p.; DOI: https://doi.org/10.1186/s13662-015-0710-5.
18. H. Vu, N. Van Hoa, *On impulsive fuzzy functional differential equations*, Iran. J. Fuzzy Syst., **13**, № 4, 79 – 94 (2016); DOI: https://doi.org/10.22111/IJFS.2016.2597.
19. Е. С. Половинкин, *Многозначный анализ и дифференциальные включения*, Физматлит, Москва (2014).
20. T. F. Bridgland, *Trajectory integrals of set valued functions*, Pacif. J. Math., **33**, № 1, 43 – 68 (1970).
21. H. T. Banks, M. Q. Jacobs, *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. and Appl., **29**, 246 – 272 (1970); DOI: https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90078-8.
22. Yu. N. Tyurin, *Mathematical statement of the simplified model of industrial planning* (in Russian), Econ. Math. Meth., **3**, 391 – 409 (1965).
23. А. В. Плотников, *Дифференцирование многозначных отображений, T-производная*, Укр. мат. журн., **52**, № 8, 1119 – 1126 (2000).
24. Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, M. D. Jimenez-Gamero, *Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions*, Inform. Sci., **181**, № 11, 2177 – 2188 (2011); DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.01.023.
25. A. Lasota, A. Strauss, *Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized*, J. Different. Equat., **10**, 152 – 172 (1971); DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(71)90103-3.
26. M. Martelli, A. Vignoli, *On differentiability of multi-valued maps*, Boll. Unione Mat. Ital., **10**, 701 – 712 (1974).
27. N. V. Plotnikova, *Systems of linear differential equations with π-derivative and linear differential inclusions*, Sb. Math., **196**, № 11, 1677 – 1691 (2005); DOI: https://doi.org/10.1070/SM2005v196n11ABEH003727.
28. N. V. Hoa, N. D. Phu, *Fuzzy functional integro-differential equations under generalized H-differentiability*, J. Intell. Fuzzy Syst., **26**, 2073 – 2085 (2014); DOI: https://doi.org/10.3233/IFS-130883.

29. N. D. Phu, N. N. Hung, *Minimum stability control problem and time-optimal control problem for fuzzy linear control systems*, Fuzzy Sets and Syst., **371**, 1 – 24 (2019); DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.09.005.
30. B. Bede, S. G. Gal, *Almost periodic fuzzy-number-valued functions*, Fuzzy Sets and Syst., **147**, 385 – 403 (2004); DOI: https://doi.org/ 10.1016/j.fss.2003.08.004.
31. B. Bede, S. G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation*, Fuzzy Sets and Syst., **151**, 581 – 599 (2005); DOI: https://doi.org/ 10.1016/j.fss.2004.08.001.
32. L. Stefanini, B. Bede, *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Anal., **71**, 1311 – 1328 (2009); DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005.
33. Н. В. Плотникова, *Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений*, Нелінійні коливання, **9**, № 3, 386 – 400 (2006).
34. V. G. Boltyanski, J. Jerónimo Castro, *Centrally symmetric convex sets*, J. Convex Anal., **14**, № 2, 345 – 351 (2007).
35. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations*, Int. J. Control Sci. and Eng., **2**, № 1, 1 – 6 (2012); DOI: https://doi.org/10.5923/j.control.20120201.01.
36. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalized set differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal., **20**, № 4, 433 – 445 (2013).
37. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной*, Укр. мат. журн., **65**, № 10, 1350 – 1362 (2013).

Одержано 03.11.20,
після доопрацювання — 23.02.21