DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6256

УДК 517.587

В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ)

НОВИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

In this paper, we develop a new method for constructing generalized classical polynomials, primarily Hermite polynomials in the sense of A. Krall, J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, L. Littlejohn, et al. We construct a differential operator of infinite order whose eigenfunctions are such polynomials. For generalized Hermite polynomials, we investigate a number of properties inherent in classical orthogonal polynomials (orthogonality, generalized Rodrigues formula, three-term recurrence relation forming a function). The versatility of the method is revealed in constructing generalized Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind.

Роботу присвячено розробці нового методу побудови узагальнених класичних поліномів, насамперед поліномів Ерміта, у сенсі A. Krall, J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, L. Littlejohn та ін. Побудовано диференціальний оператор нескінченного порядку, власними функціями якого є такі поліноми. Досліджено ряд властивостей узагальнених поліномів Ерміта, що притаманні класичним ортогональним поліномам (ортогональність, узагальнену формулу Родріга, тричленне рекурентне співвідношення, твірну функцію). Продемонстровано універсальність нового методу для побудови узагальнених поліномів Лежандра та Чебишова першого роду.

Вступ. Узагальнені класичні ортогональні поліноми, що задовольняють звичайні диференціальні рівняння вищих порядків вигляду

$$\sum_{i=0}^{2k} a_i(x) y^{(i)}(x) - \lambda_n y(x) = 0, \qquad a_i(x) = \sum_{p=0}^{i} a_{ip} x^p, \quad k \in \{2, 3, \ldots, \infty\},$$
$$\lambda_n = \sum_{p=0}^{2k} a_{pp} \frac{n!}{(n-p)!}, \tag{1}$$

досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 4]). При цьому суттєвими вимогами були такі: коефіцієнти перед похідними повинні бути поліномами певного степеня від незалежної змінної та не залежати від степенів поліномів, що задовольняють дані диференціальні рівняння. Вказані узагальнення у зазначених роботах та інших зроблено для всіх класичних ортогональних поліномів, окрім поліномів Ерміта. У роботі [5] побудовано узагальнені поліноми Ерміта і вивчено їхні властивості, спираючись на відомий зв'язок поліномів Ерміта з поліномами Лагерра. Для останніх раніше було одержано ряд результатів [1], що були використані у роботі [5]. Ця техніка є специфічною та не може бути застосована для побудови інших узагальнень поліномів Ерміта.

У даній статті запропоновано новий, у певному розумінні універсальний, метод побудови узагальнених класичних ортогональних поліномів, насамперед поліномів Ерміта, у вказаному вище сенсі. Також отримано диференціальний оператор нескінченного порядку, власними функціями якого є ці поліноми. Розглянуто ряд властивостей узагальнених поліномів Ерміта, що мають класичні ортогональні поліноми, а саме, ортогональність, узагальнену формулу Родріга, тричленне рекурентне співвідношення, твірну функцію. Крім того, проілюстровано застосування нового методу для побудови узагальнених поліномів Лежандра та Чебишова першого роду.

Розроблено алгоритм побудови диференціального рівняння (1), яке задовольняють узагальнені ортогональні поліноми. Проміжним результатом є одержання нового двопараметричного диференціального рівняння четвертого порядку вигляду (1), яке задовольняють класичні поліноми Лежандра.

Робота складається з двох частин. У перший частині для прикладу узагальнених поліномів Ерміта викладено наш підхід до побудови узагальнених поліномів Ерміта і вивчення їхніх властивостей. Наведено алгоритм побудови диференціального рівняння вигляду (1), яке вони задовольняють. Цей алгоритм має універсальний характер і може бути застосований до будь-якої системи поліномів. Універсальність запропонованого алгоритму підтверджено у другій частині статті для прикладів узагальнених поліномів Лежандра та поліномів Чебишова першого роду.

1. Узагальнені поліноми Ерміта. Продемонструємо дієвість нового підходу до побудови узагальнених поліномів Ерміта у сенсі [1 – 3]. Наша мотивація зробити акцент на узагальненні поліномів Ерміта полягає в тому, що, як зазначено вище, саме таких узагальнень бракує в математичній літературі.

За відправну точку виберемо довільну лінійну комбінацію поліномів Ерміта, яка містить параметр M, причому таку, що при $M = 0$ перетворюється на класичний поліном Ерміта. Для визначеності розглянемо формулу

$$v_n(x) = H_n(x) + MH_{n-2}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$H_{-1}(x) = 0, \qquad H_{-2}(x) = \frac{1}{2}.$$

Ортогоналізуємо цю послідовність за допомогою процесу ортогоналізації Грамма – Шмідта (див., наприклад, [6, с. 157]), в якому за скалярний добуток візьмемо

$$(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} u(x)v(x)dx + Mu(0)v(0).$$

Зауважимо, що скалярний добуток вибираємо також таким чином, щоб він залежав від параметра M і при $M = 0$ збігався зі скалярним добутком, відносно якого поліноми Ерміта є ортогональними. Маємо

$$u_i(x) = v_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(u_i, v_j)}{(v_j, v_j)} v_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Зокрема,

$$u_0(x) = 1 + \frac{y}{2},$$
$$u_1(x) = H_1(x),$$
$$u_2(x) = H_2(x) + \frac{2y}{1+y},$$
$$u_3(x) = H_3(x),$$

$$u_4(x) = H_4(x) + \frac{12y(2x^2-3)}{2+3y},$$

$$u_5(x) = H_5(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \frac{M}{\sqrt{\pi}}.$$

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Має місце зображення*

$$u_n(x) = \frac{1}{2^{\alpha(n)} + \beta(n)y} \left[2^{\alpha(n)} H_n(x) + \beta(n)\frac{y}{x}\ H_{n-1}(x)\right], \tag{2}$$

де $\beta(n) = 0$, *якщо* n — *непарне число,*

$$\begin{gathered} \beta(2m+2) = \text{ denominator } (2^{2m}(m!)^2/(2m+1)!), \\ \alpha(2m) = k_m, \qquad k_m = k_{[m/2]} + m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

а поліноми $u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} k_{n,n-p} x^{n-p}$ *визначаються з рекурентного співвідношення*

$$\begin{gathered} u_{n+1}(x) = (2x + B_n)u_n(x) - C_n u_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \\ u_{-1}(x) = 0, \qquad u_0(x) = 1 + \frac{y}{2}, \\ k_{n,n} = 2^n, \qquad k_{n,n-1} = 0, \\ k_{n,n-2} = \frac{2^{n-1}}{2^{\alpha(n)} + \beta(n)y}\left(-2^{\alpha(n)-1} n(n-1) + \beta(n)y\right), \\ B_n = 0, \qquad C_n = \frac{1}{k_{n-1,\,n-1}}\,(2k_{n,\,n-2} - k_{n+1,\,n-1}) \end{gathered} \tag{4}$$

$(\text{denominator}\ (a/b) = b,$ *де* a, b — *натуральні взаємно прості числа*$)$.

У формулі (3) у виразі для k_m квадратні дужки в індексі означають цілу частину числа, яке вони містять. При отриманні формул (3) ми скористались енциклопедією [7].

Схема одержання (4) є такою. Спочатку для будь-якої заданої послідовності ортогональних поліномів

$$P_n\,(x) = \sum_{i=0}^{n} k_{n,\,i}\, x^{n-i}$$

за допомогою рекурентного співвідношення

$$P_{n+1}(x) = (A_n\, x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n = \frac{k_{n+1,\,n+1}}{k_{n,\,n}}, \qquad B_n = A_n\left(\frac{k_{n+1,\,n}}{k_{n+1,\,n+1}} - \frac{k_{n,\,n-1}}{k_{n,\,n}}\right),$$

$$C_n = \frac{1}{k_{n-1,\,n-1}}\,(A_n\, k_{n,\,n-2} + B_n\, k_{n,\,n-1} - k_{n+1,\,n-1}),$$

знаходимо рекурентне співвідношення для поліномів (2). Зауважимо, що формула для визначення коефіцієнта C_n відрізняється від традиційної (див. [6, с. 161], формули (8)) і в ній не використовуються норми поліномів $P_n(x)$. Таким чином, згідно з (4) отримуємо формулу, що визначає коефіцієнт C_n.

Застосовуючи рекурентне співвідношення (4), неважко одержати тричленні рекурентні співвідношення як для парних поліномів $u_{2n}(x),\ n=0,1,\ldots,$ так і для непарних $u_{2n-1}(x) = H_{2n-1}(x),\ n=1,2,\ldots,$ які збігаються з поліномами Ерміта.

Має місце тотожність Кристоффеля – Дарбу

$$\sum_{p=0}^{n} h_p{}^{-1} u_p(x) u_p(y) = \frac{1}{2h_n} \frac{u_{n+1}(x)u_n(y) - u_{n+1}(y)u_n(x)}{x-y},$$

де

$$h_{2n} = \left(\frac{2^{\alpha(2n)}}{2^{\alpha(2n)} + \beta(2n)y}\right)^2 \sqrt{\pi}\, 2^{2n}(2n)! + \left(\frac{\beta(2n)y}{2^{\alpha(2n)} + \beta(2n)y}\right)^2 \sqrt{\pi}\, 4^{n+1}(2n+1) +$$

$$+ y\sqrt{\pi}\left(\frac{2^{\alpha(2n)}(-1)^n(2n)!/n! + \beta(2n)y(-1)^{n+1}2^n(2n-1)!}{2^{\alpha(2n)} + \beta(2n)y}\right)^2,$$

$$h_{2n+1} = \sqrt{\pi} 2^{2n+1}(2n+1)!.$$

Перейдемо до знаходження однорідного звичайного диференціального рівняння нескінченного порядку в загальному випадку

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} - \lambda_n y(x) = 0,$$

$$a_k(x) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{m} a_{2m,2(m-p)} \dfrac{(2m)!}{(2m-2p)!} x^{2p}, & k = 2m, \\ \sum_{p=0}^{m} a_{2m+1,2(m-p)+1} \dfrac{(2m+1)!}{(2m+1-2p)!} x^{2p+1}, & k = 2m+1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \frac{n!}{(n-k)!},$$

яке повинні задовольняти члени заданої послідовності поліномів

$$p_n(x), \quad n = 0,1,\ldots, \qquad \mathrm{degree}(p_n(x)) = n.$$

Алгоритм полягає у такій послідовності кроків.

***Крок* 1.** Задаємо послідовність старших коефіцієнтів $a_{k,k}$ у поліномах $a_k(x)$ перед похідними порядку k, що входять у рівняння (5), $k = 1,2,\ldots,n$.

***Крок* 2.** Покладаємо $n=2$, підставляємо в рівняння (5) $y(x) = p_2(x)$. Як результат одержуємо поліном нульового степеня, прирівнюємо його до нуля і з отриманого рівняння знаходимо $a_{2,0}$.

***Крок* 3.** Покладаємо $n = 3$, підставляємо в рівняння (5) $y(x) = p_3(x)$. Як результат одержуємо поліном першого степеня. Прирівнюємо його коефіцієнт біля x до нуля, з отриманого рівняння знаходимо $a_{3,0}$.

І так далі.

***Крок* k.** Покладаємо $n = k$, підставляємо в рівняння (5) $y(x) = p_k(x)$. Як результат одержуємо поліном $(k-2)$-го степеня. Прирівнюємо його коефіцієнти перед

$$x^{k-2},\, x^{k-4}, \ldots, \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad k - \text{непарне}, \\ 1, & \text{якщо} \quad k - \text{парне}, \end{cases}$$

до нуля. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, кожне з яких містить тільки одне невідоме

$$a_{k,k-2p}, \quad p = 1, 2, \ldots, 2\left[\frac{k}{2}\right].$$

Після їхнього розв'язання замінюємо k на $k+1$ і повторюємо крок k.

Процес може закінчитись на певному кроці $n = N$, якщо всі коефіцієнти

$$a_{k,k-2p} = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, 2\left[\frac{k}{2}\right], \quad \forall k > N.$$

В іншому випадку процес буде продовжуватись до нескінченності.

Проілюструємо скінченнокроковий процес на такому прикладі.

***Приклад* 1.** Побудуємо диференціальне рівняння вигляду (5) для послідовності класичних поліномів Ерміта $p_n(x) = H_n(x),\ n = 0, 1, \ldots$. На першому кроці задаємо $a_{1,1} = -2$, $a_{k,k} = 0$, $k \geq 2$. На другому кроці підставляємо в рівняння (5) $n = 2,\ y(x) = H_2(x) = 4x^2 - 2$, після чого отримуємо поліном нульового степеня

$$8a_{2,0} - 16x^2 + 4(4x^2 - 2) = 8a_{2,0} - 8.$$

Прирівнюємо його до нуля й одержуємо $a_{2,0} = 1$. На наступному кроці підставляємо в рівняння (5)

$$n = 3, \quad y(x) = H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

В результаті отримуємо

$$48a_{3,1} + 48x - 2x(24x^2 - 12) + 6(8x^3 - 12x) = 48a_{3,1} = 0.$$

Звідси випливає, що $a_{3,1} = 0$. На наступному кроці підставляємо в рівняння (5)

$$n = 4, \quad y(x) = H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

У результаті одержуємо співвідношення

$$(a_{4,2}x^2 + a_{4,0})192 + 192x^2 - 96 - 2x(64x^3 - 96x) + 8(16x^4 - 48x^2 + 12) =$$
$$= (a_{4,2}x^2 + a_{4,0})192 \equiv 0,$$

з якого випливає, що

$$a_{4,2} = 0, \quad a_{4,0} = 0.$$

Продовжуючи далі, на всіх наступних кроках отримуємо, що всі

$$a_{k,k-2p} = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, 2\left[\frac{k}{2}\right], \quad \forall k > 2.$$

Таким чином, будемо мати класичне диференціальне рівняння, яке задовольняють поліноми Ерміта.

Тепер перейдемо до побудови диференціального рівняння, яке задовольняють узагальнені поліноми Ерміта.

***Приклад* 2.** Побудуємо диференціальне рівняння вигляду (5) для послідовності поліномів (2). Вибираємо послідовність старших коефіцієнтів поліномів $a_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, у вигляді

$$a_{1,1} = -2, \qquad a_{k,k} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

а далі застосовуємо наш алгоритм. У результаті одержуємо

$$a_{1,1} = -2 - \frac{2y}{\pi},$$

$$a_{2,0} = 1, \qquad a_{2,2} = 0,$$

$$a_{3,1} = \frac{y}{\pi}, \qquad a_{3,3} = 0,$$

$$a_{4,0} = \frac{y}{8(2\pi + 3y)}, \qquad a_{4,2} = -\frac{y(5\pi + 7y)}{4\pi(2\pi + 3y)}, \qquad a_{4,4} = 0,$$

$$a_{5,1} = -\frac{y}{8(2\pi + 3y)}, \qquad a_{5,3} = \frac{y(7\pi + 9y)}{12\pi(2\pi + 3y)}, \qquad a_{5,5} = 0,$$

$$a_{6,0} = \frac{y(2\pi + 9y)}{96(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)}, \qquad a_{6,2} = \frac{7y(4\pi + 7y)}{48(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)},$$

$$a_{6,4} = -\frac{y(42\pi^2 + 128\pi y + 93y^2)}{24\pi(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)}, \qquad a_{6,6} = 0,$$

$$a_{7,1} = -\frac{y(2\pi + 9y)}{96(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)}, \qquad a_{7,3} = -\frac{y(12\pi + 19y)}{48(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)},$$

$$a_{7,5} = \frac{y(66\pi^2 + 194\pi y + 135y^2)}{120\pi(2\pi + 3y)(8\pi + 15y)}, \qquad a_{7,7} = 0.$$

Наступні значення коефіцієнтів ми не наводимо через їхню громіздкість. Загальні формули для них одержати не вдалося. Зауважимо, що після підстановки у вищенаведені формули $y = 0$ ми отримуємо значення коефіцієнтів поліномів $a_k(x)$, $k = 1, 2$, які входять у класичне диференціальне рівняння другого порядку для поліномів Ерміта, а при $y \to \infty$ одержуємо граничні значення цих коефіцієнтів, що входять у диференціальне рівняння нескінченного порядку для поліномів $u_n(x)\,|_{y=\infty}$.

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб поліноми*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k_{n,\,n-2\,i}\, x^{n-2i}$$

(*у тому числі ортогональні*) *задовольняли диференціальне рівняння четвертого порядку* (5), *необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення*

$$\begin{gathered}
k_{n,\,n}\left[\frac{n!}{(n-2)!}a_{2,0} + \frac{n!}{(n-3)!}a_{3,1} + \frac{n!}{(n-4)!}a_{4,2}\right] - \\
- k_{n,\,n-2}\Big[2a_{1,1} + 2(2n-3)a_{2,2} + 6(n-2)^2 a_{3,3} + \\
+ (2n+2)(2n+3)(2n+4)a_{4,4}\Big] = 0, \\
n = 4, 5, \ldots, \\
k_{n,\,n-2m}\frac{(n-2m)!}{(n-2m-4)!}a_{4,0} + k_{n,\,n-2m-2}\left[\frac{(n-2m-2)!}{(n-2m-4)!}a_{2,0} + \right. \\
\left. + \frac{(n-2m-2)!}{(n-2m-5)!}a_{3,1} + \frac{(n-2m-2)!}{(n-2m-6)!}a_{4,0}\right] - \\
- k_{n,\,n-2m-4}12\Big[a_{1,1} + (2n-2m-5)a_{2,2} + \\
+ (3n^2 - 6(m+5)n + 3m^2 + 30m + 110)a_{3,3} + \\
+ 2(2n-4m+9)(n^2-(4m-9)n+4m^2-18m+55)a_{4,4}\Big] = 0, \\
n = 2m+6,\ 2m+7, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots .
\end{gathered} \tag{6}$$

Продемонструємо застосування цієї теореми у випадку поліномів Ерміта. Враховуючи явний вигляд коефіцієнтів поліномів Ерміта

$$k_{n,\,n-2m} = \frac{(-1)^m n!}{m!(n-2m)!}, \quad m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

і те, що коефіцієнти диференціального рівняння не повинні залежати від n, із першого рівняння з (6) шляхом прирівнювання коефіцієнтів із однаковими степенями n одержуємо

$$a_{4,4} = 0, \qquad 2a_{2,0} + a_{1,1} = 0, \qquad a_{3,1} + a_{2,2} = 0, \qquad 2a_{4.2} + 3a_{3,3} = 0. \tag{7}$$

Підставляючи у перше рівняння з (6) $n = 4, 5,$ з урахуванням (7) отримуємо два рівняння

$$a_{2,2} + 6a_{3,3} = 0, \qquad a_{2,2} + 9a_{3,3} = 0,$$

які можуть одночасно виконуватись лише тоді, коли

$$a_{2,2} = a_{3,3} = 0.$$

В результаті, з точністю до сталого множника, одержуємо класичне диференціальне рівняння другого порядку для поліномів Ерміта.

Зауважимо, що у роботі [8] наведно необхідні та достатні умови того, щоб система ортогональних поліномів $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняла диференціальне рівняння четвертого порядку з коефіцієнтами перед похідними, які не залежать від n. Зазначені умови визначаються через коефіцієнти диференціального рівняння та моменти, пов'язані з цією ортогональною системою. Скористатися цими умовами в нашому випадку було неможливо, оскільки вихідною інформацією, яку ми могли б задіяти, були коефіцієнти диференціального рівняння та коефіцієнти ортогональних поліномів.

Застосування запропонованої техніки не обмежується лише узагальненими поліномами Ерміта. Вона є, в певному сенсі, універсальною, що, зокрема, проілюстровано в наступному пункті щодо узагальнених поліномів Лежандра та Чебишова.

2. Узагальнені поліноми Лежандра та Чебишова. ***2.1.*** Розглянемо лінійно незалежну систему

$$v_n(x) = P_n(x) + MP_{n-2}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad P_{-1}(x) = 0, \qquad P_{-2}(x) = 0,$$

побудовану за допомогою поліномів Лежандра. Ортогоналізуємо цю послідовність за допомогою процесу ортогоналізації Грамма – Шмідта, в якому за скалярний добуток візьмемо

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx + Mu(0)v(0).$$

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Має місце зображення*

$$u_n(x) = \frac{1}{2^{\alpha(n)} + \beta(n)y} \left[2^{\alpha(n)} P_n(x) + y\beta(n) \left(P_n(x) + \frac{1}{n\,x} P_{n-1}(x) \right) \right], \tag{8}$$

де $\beta(n) = 0$, *якщо* n — *непарне число*,

$$\beta(2m + 2) = \left[\mathrm{denominator}(2^{2m}(m!)^2/(2m + 1)!) \right]^2,$$
$$\alpha(2m) = 4m - \mathrm{hammingweight}(m) + 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\mathrm{hammingweight}(m)$ — *кількість одиниць у бінарному зображенні числа* m, *а поліноми*

$$u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} k_{n,n-p} x^{n-p}$$

визначаються з рекурентного співвідношення

$$u_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)u_n(x) - C_n u_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$u_{-1}(x) = 0, \quad u_0(x) = 1 + \frac{y}{2},$$

$$k_{n,n} = 2^{-n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad k_{n,n-1} = 0,$$

$$k_{n,n-2} = \frac{2^{-n}(2n-2)!}{\big[(n-1)!\big]^2}\left(-n+1+\frac{2\beta(n)y}{2^{\alpha(n)}+\beta(n)y}\right),$$

$$A_n = \frac{k_{n+1,\,n+1}}{k_{n,\,n}} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad B_n = 0, \qquad C_n = \frac{1}{k_{n-1,\,n-1}}(2\,k_{n,\,n-2} - k_{n+1,\,n-1}).$$

Підставляючи у диференціальне рівняння (5)

$$n = k, \qquad y(x) = u_k(x), \quad k = 3, 4, 5,$$

і додаючи вимогу, щоб одержані вирази тотожно дорівнювали нулю, отримуємо співвідношення

$$\begin{gathered}
a_{4,0} = -\frac{1}{4(225y+128)}\Big[135a_{2,0}y + 64(a_{1,1}+2a_{2,0})\Big],\\
a_{3,1} = \frac{45}{16}a_{2,0}y + a_{1,1} + 2a_{2,0},\\
a_{4,2} = \frac{1}{3600y+2048}\Big[-3375a_{2,0}y^2 - 600(2a_{1,1}+3a_{2,0}) + 512(a_{1,1}+2a_{2,0})\Big],\\
a_{4,4} = \frac{1}{3600y+2048}\Big[4275a_{2,0}y^2 + 4(360a_{1,1}+761a_{2,0}) - 512(a_{1,1}+2a_{2,0})\Big],\\
a_{3,3} = -\frac{1}{16}\Big(51a_{2,0}y + 16(2a_{2,0}+a_{1,1})\Big),\\
a_{2,2} = -\frac{3}{2}a_{2,0}y - a_{1,1} - 3a_{2,0},\\
a_{2,0}, a_{1,1} \text{ — довільні.}
\end{gathered} \tag{9}$$

Якщо далі підставити у диференціальне рівняння (5)

$$n = 6, \quad y(x) = u_6(x)$$

і накласти умову, щоб одержані вирази тотожно дорівнювали нулю, то переконаємося, що це можливо лише тоді, коли

$$a_{2,0} = a_{1,1} = 0.$$

Отже, згідно з (9) можна зробити такий висновок.

Теорема 4. *Для узагальнених поліномів Лежандра* (8) *не існує диференціального рівняння четвертого порядку вигляду* (5), *яке б вони задовольняли.*

Той самий висновок ми одержали б, якщо б скористались теоремою 2.

Аналогічно доводимо, що не існує диференціального рівняння шостого порядку вигляду (5), яке задовольняють узагальнені поліноми Лежандра.

Якщо у диференціальному рівнянні (5) ми врахуємо (9) і покладемо $y = 0$, то отримаємо двопараметричне диференціальне рівняння четвертого порядку, яке задовольняють класичні поліноми Лежандра

$$\sum_{i=0}^{4} a_i\,(x)y^{(i)}(x) - \lambda_n y(x) = 0,$$

$$
\begin{gathered}
a_4(x) = -\frac{1}{8}(1-x^2)^2(2a_{2,0}+a_{1,1}), \\
a_3(x) = -(1-x^2)x(2a_{2,0}+a_{1,1}), \\
a_2(x) = -(3a_{2,0}+a_{1,1})x^2 + a_{2,0}, \\
\lambda_n = \frac{1}{8}\Big[(n+3)(n-2)a_{1,1} + 2(n+2)(n-1)a_{2,0}\Big]\,(n+1)n, \\
a_{2,0}, a_{1,1} \text{ — довільні сталі.}
\end{gathered} \tag{10}
$$

Якщо у (10) покласти $a_{2,0} = 1,\ a_{1,1} = -2$, то одержимо коефіцієнти класичного диференціального рівняння другого порядку, яке задовольняють поліноми Лежандра (див. [6, с. 180], формула (11)).

Так само, як для випадку узагальнених поліномів Ерміта, згідно з нашим алгоритмом можна побудувати диференціальне рівняння нескінченного порядку, яке задовольняють узагальнені поліноми Лежандра. Оскільки принципові відмінності при цьому не виникають, результати побудови ми не наводимо.

2.2. Переходячи до узагальнення поліномів Чебишова першого роду, розглянемо лінійно незалежну систему поліномів

$$
\begin{gathered}
v_n(x) = T_n(x) + yT_{n-2}(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \\
T_{-1}(x) = x, \qquad P_{-2}(x) = 2x^2 - 1,
\end{gathered}
$$

побудовану за допомогою поліномів Чебишова першого роду. Ортогоналізуємо цю послідовність, використавши процес ортогоналізації Грамма – Шмідта, в якому за скалярний добуток візьмемо

$$
(u,v) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)dx + yu(0)v(0).
$$

Справджується така теорема.

Теорема 5. *Має місце зображення*

$$
\begin{gathered}
u_n(x) = \\
= \frac{1}{\pi + \beta(n)y}\left[\pi T_n(x) + y\beta(n)\left(T_n(x) + \frac{1}{x}\ T_{n-1}(x)\right)\right], \\
n = 3,4,\ldots,
\end{gathered} \tag{11}
$$

де $\beta(n) = 0$, *якщо* n *— непарне число,*

$$
\beta(2m) = 2m-1, \quad m = 2,3,\ldots,
$$

а поліноми

$$
u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} k_{n,n-p}x^{n-p}
$$

визначаються з рекурентного співвідношення

$$u_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)u_n(x) - C_n u_{n-1}(x), \quad n = 4, 5, \ldots,$$

$$u_3(x) = T_3(x), \qquad u_4(x) = \frac{1}{\pi + 3y}\left[(\pi + 3y)T_4(x) + y\frac{1}{x}T_3(x)\right],$$

$$k_{n,\,n} = 2^{n-1}, \qquad k_{n,\,n-1} = 0,$$

$$k_{n,\,n-2} = 2^{n-3}\left(-n + \frac{2\beta(n)y}{\big[\pi + \beta(n)y\big](n-1)}\right),$$

$$A_n = \frac{k_{n+1,\,n+1}}{k_{n,\,n}} = 2, \qquad B_n = 0,$$

$$C_n = \frac{1}{k_{n-1,\,n-1}}\left(2\,k_{n,\,n-2} - k_{n+1,\,n-1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2\beta(n+1)y}{\big[\pi + \beta(n+1)y\big]n} + \frac{2\beta(n)y}{\big[\pi + \beta(n)y\big](n-1)},$$

$$\beta(n) = \left(1 - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}\right)(n-1)$$

(*фігурні дужки позначають дробову частину числа*, *яке вони містять*).

Доповнимо зображення узагальнених поліномів Чебишова його початковими значеннями, що були одержані в процесі ортогоналізації та не вкладаються у формулу (11). Маємо

$$u_0(x) = 2x^2y - y + 1,$$

$$u_1(x) = x(y+1),$$

$$u_2(x) = \frac{4(y^2-1)}{2y^3 + (\pi-4)y^2 + 2y + 2\pi}\left[x^2(y^2 - y - \pi) + \frac{\pi}{4}(y+2)\right].$$

Застосувавши теорему 2, визначимо, чи існує диференціальне рівняння четвертого порядку (5), яке задовольняють узагальнені поліноми Чебишова. Перша система рівнянь із (6) у цьому випадку має розв'язок

$$a_{3,3} = -\frac{a_{1,1}}{18}, \qquad a_{1,1},\ a_{4,0} \text{ — довільні},$$

всі інші коефіцієнти диференціального рівняння дорівнюють нулю. З другої системи рівнянь із (6) отримуємо, що $a_{1,1} = a_{4,0} = 0$. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 6. *Не існує диференціального рівняння четвертого порядку вигляду* (5), *яке б задовольняли узагальнені поліноми Чебишова першого роду.*

Разом з тим для класичних поліномів Чебишова першого роду з першої системи рівнянь із співвідношень (6) одержуємо, що її розв'язком є такий:

$$a_{4,4} = -\frac{a_{3,1}}{21}, \qquad a_{4,2} = \frac{2a_{3,1}}{21},$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{126}\big(38a_{3,1} - 7(a_{2,0} + a_{1,1})\big), \tag{12}$$

$$a_{2,2} = -a_{2,0} + \frac{18a_{3,1}}{7},$$

$$a_{4,0},\ a_{3,1},\ a_{2,0},\ a_{1,1} \text{ — довільні.}$$

Із другої системи рівнянь із співвідношень (6) знаходимо

$$a_{4,0} = 0, \qquad a_{3,1} = 0, \qquad a_{2,0} = -a_{1,1}.$$

Отже, враховуючи (12), з точністю до множника $a_{1,1}$ отримуємо класичне диференціальне рівняння другого порядку для поліномів Чебишова першого роду (див. [6, с. 186], формула (18)). Цілком природно, даний результат можна також довести, підставивши у диференціальне рівняння (5)

$$n = k, \qquad y(x) = u_k(x), \quad k = 3, 4, 5,$$

і з використанням співвідношень (12) задовольнивши умову, щоб одержані вирази тотожно дорівнювали нулю.

Так само, як для випадку узагальнених поліномів Ерміта, згідно з нашим алгоритмом можна побудувати диференціальне рівняння нескінченного порядку, яке задовольняють узагальнені поліноми Чебишова першого роду. Оскільки принципові відмінності при цьому не виникають, результати побудови ми не наводимо.

Література

1. J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, *On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., **350**, № 1, 347 – 393 (1998).
2. R. Koekoek, H. G. Meijer, *A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24**, № 3, 768 – 782 (1993).
3. A. M. Krall, *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **87**, № 3-4, 271 – 288 (1981); DOI: https://doi.org/10.1017/S0308210500015213.
4. L. L. Littlejohn, *The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials*, Quaest. Math., **5**, 255 – 265 (1982).
5. В. Л. Макаров, *Узагальнені поліноми Ерміта, їх властивості та диференціальне рівняння, яке вони задовольняють*, Доп. НАН України, № 9, 3 – 9 (2020); DOI: https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.003.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции,* т. 2, Наука, Москва (1974).
7. The on-line encyclopedia of integer sequences, founded in 1964 by N. J. A. Sloane.
8. H. L. Krall, *Certain differential equations for Tchebysheff polynomials*, Duke Math. J., **4**, 705 – 718 (1938); DOI:10.1215/S0012-7094-38-00462-4; https://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077490943.

Одержано 04.08.20