DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6260

УДК 517.928

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
П. Ф. Самусенко (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКАМИ ПОВОРОТУ. II

We consider the problem of finding asymptotic solutions to linear singular perturbed differential-algebraic equations with a simple turning point and develop a technique of constructing such asymptotic solutions.

Розроблено алгоритм знаходження асимптотичних розв'язків лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з простою точкою повороту.

Дана стаття є продовженням роботи [1], де розглядається сингулярно збурена диференціально-алгебраїчна система

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad t \in [0;T], \tag{1}$$

з точкою повороту.

Нехай виконуються такі умови:

1) $A(0,0) = \operatorname{diag}\{E_q, J_p\},\ B(0,0) = \operatorname{diag}\{J_q, E_p\},\ p+q=n$, де E_q — одинична матриця порядку q, J_q — квадратна матриця порядку q, елементи верхньої наддіагоналі якої дорівнюють 1, решта елементів – нулю; аналогічно визначаються матриці E_p і J_p;

2) $\dfrac{d}{dt}(\det A(t,0))_{|t=0} \neq 0,\ \dfrac{d}{dt}(\det B(t,0))_{|t=0} \neq 0.$

У статті [1] знайдено фундаментальну систему розв'язків системи (1) на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{\frac{p}{p+1}}; t_0\right]$, $t_0 \leq T$. У цій частині роботи розв'язки системи (1) побудовано на відрізку $\left[0; k_0'\varepsilon^{\frac{p}{p+1}}\right]$, $k_0' > k_0$, і здійснено зрощування знайдених асимптотичних розвинень.

Згідно з результатами [2–4] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon) \in [0;t_1] \times [0;\varepsilon_1]$, $t_1 \leq T$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що мають місце рівності

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\left\{E_q(t,\varepsilon), J_p(t,\varepsilon)\right\}, \tag{2}$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\left\{J_q(t,\varepsilon), E_p(t,\varepsilon)\right\}, \tag{3}$$

де

$$\Omega(t,0) = \Omega(t) \equiv \operatorname{diag}\{E_q, J_p(t)\}, \quad H(t,0) = H(t) \equiv \operatorname{diag}\{J_q(t), E_p\},$$

$$J_q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ b_q(t) & b_{q-1}(t) & b_{q-2}(t) & \ldots & b_1(t) \end{pmatrix},$$

$$J_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_p(t) & a_{p-1}(t) & a_{p-2}(t) & \ldots & a_1(t) \end{pmatrix},$$

функції $b_i(t) = t\widetilde{b}_i(t)$, $i = \overline{1,q}$, і $a_i(t) = t\widetilde{a}_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, визначаються відповідно характеристичними многочленами матриць $B(t,0)$ і $A(t,0)$ [4]. При цьому з умови 2 випливає, що $\widetilde{b}_q(0) \neq 0$ й $\widetilde{a}_p(0) \neq 0$.

Покладемо

$$x(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon).$$

Тоді система (1) набере вигляду

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y, \tag{4}$$

де $C(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon)$. За побудовою $Q'(t,0) = 0$ [3].

Нехай

$$H(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k H_k(t), \qquad C(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t).$$

Тоді

$$H_0(t) = H(t), \qquad H_1(t) = \operatorname{diag}\big\{H_{1q}(t), H_{1p}(t)\big\},$$
$$C_0(t) = \Omega(t), \qquad C_1(t) = \operatorname{diag}\big\{C_{1q}(t), C_{1p}(t)\big\},$$

де $H_{1q}(t),\ C_{1q}(t)$ — квадратні матриці порядку q.

Нехай $K(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\big\{E_q + \varepsilon C_{1q}(t), E_p + \varepsilon H_{1p}(t)\big\}$. Домножимо зліва обидві частини системи (4) на матрицю $K^{-1}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon G(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = D(t,\varepsilon)y. \tag{5}$$

За побудовою [1]

$$G(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k G_k(t), \qquad D(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k D_k(t),$$
$$D_0(t) = C_0(t), \qquad D_1(t) = \operatorname{diag}\big\{0, D_{1p}(t)\big\} \equiv \operatorname{diag}\big\{0, C_{1p}(t) - H_{1p}(t)J_p(t)\big\},$$
$$G_0(t) = H_0(t), \qquad G_1(t) = \operatorname{diag}\big\{G_{1q}(t), 0\big\} \equiv \operatorname{diag}\big\{H_{1q}(t) - C_{1q}(t)J_q(t), 0\big\}.$$

Внутрішнє розвинення. Розв'язок системи (5) шукатимемо на відрізку $\left[0; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right]$, $\beta = \dfrac{1}{p+1}$, $k_0' > k_0$. Виконаємо заміну $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$. Тоді система (5) набере вигляду

$$G(\varepsilon\tau,\varepsilon)\frac{dy}{d\tau} = D(\varepsilon\tau,\varepsilon)y, \tag{6}$$

де

$$G(\varepsilon\tau,\varepsilon) = H(0) + \varepsilon\left(\tau H'(0) + G_1(0)\right) + \sum_{k\ge 2}\varepsilon^k\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\,\frac{\partial^k G(0,0)}{\partial t^{k-i}\partial\varepsilon^i}\,\tau^{k-i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k G_k(\tau),$$

$$D(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \Omega(0) + \varepsilon\left(\tau\Omega'(0) + D_1(0)\right) + \sum_{k\ge 2}\varepsilon^k\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\,\frac{\partial^k D(0,0)}{\partial t^{k-i}\partial\varepsilon^i}\,\tau^{k-i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k D_k(\tau).$$

Позначимо $\rho_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\big(\tau\widetilde{b}_q(0) + \left\{G_{1q}(0)\right\}_{q1}\big)$, $\rho_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\big(\tau\widetilde{a}_p(0) + \left\{D_{1p}(0)\right\}_{p1}\big)$.

Нехай виконується умова

3) $\operatorname{Re}\sqrt[q]{\tau\widetilde{b}_q(0) + \left\{G_{1q}(0)\right\}_{q1}} \neq 0$, $\tau \in \left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$, і

$$\operatorname{Re}\left\{D_{1p}(0)\right\}_{p1}\operatorname{Re}\widetilde{a}_p(0) + \operatorname{Im}\left\{D_{1p}(0)\right\}_{p1}\operatorname{Im}\widetilde{a}_p(0) > 0.$$

Зазначимо, що з умови 3 випливає, що $\tau\widetilde{a}_p(0) + \left\{D_{1p}(0)\right\}_{p1} \neq 0$, $\tau \in \left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$.

Зведемо матриці $G_0(\tau) + \varepsilon G_1(\tau)$ і $D_0(\tau) + \varepsilon D_1(\tau)$ до діагонального вигляду. Для цього, насамперед, зазначимо, що розв'язки рівнянь

$$\det\!\big(J_q(0) + \varepsilon\big(\tau J_q'(0) + G_{1q}(0)\big) - \omega E_q\big) = 0$$

і

$$\det(J_p(0) + \varepsilon(\tau J_p'(0) + D_{1p}(0)) - \omega E_p) = 0$$

мають вигляд [5]

$$\omega_j(\tau,\varepsilon) = \rho_1^{\frac{1}{q}}(\tau,\varepsilon) + O\Big(\rho_1^{\frac{q+1}{q^2}}(\tau,\varepsilon)\Big), \quad j = \overline{1,q},$$

$$\omega_j(\tau,\varepsilon) = \rho_2^{\frac{1}{p}}(\tau,\varepsilon) + O\Big(\rho_2^{\frac{p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big), \quad j = \overline{q+1,n}.$$

Згідно з умовою 3 вважаємо, що функції $\operatorname{Re}\omega_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q}$, і $\omega_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{q+1,n}$, на відрізку $\left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$ відмінні від нуля.

Нехай

$$\widetilde{T}_q^{-1}(\tau,\varepsilon)\big(J_q(0) + \varepsilon\big(\tau J_q'(0) + G_{1q}(0)\big)\big)\widetilde{T}_q(\tau,\varepsilon) = \Phi_q(\tau,\varepsilon) \equiv$$

$$\equiv \operatorname{diag}\big\{\omega_1(\tau,\varepsilon),\omega_2(\tau,\varepsilon),\ldots,\omega_q(\tau,\varepsilon)\big\},$$

$$\widetilde{T}_p^{-1}(\tau,\varepsilon)\big(J_p(0)+\varepsilon(\tau J_p'(0)+D_{1q}(0))\big)\widetilde{T}_p(\tau,\varepsilon)=\Phi_p(\tau,\varepsilon)\equiv$$

$$\equiv \operatorname{diag}\big\{\omega_{q+1}(\tau,\varepsilon),\omega_{q+2}(\tau,\varepsilon),\ldots,\omega_n(\tau,\varepsilon)\big\},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

Позначимо через $\psi_j(\tau,\varepsilon)$, $j=\overline{1,q}$, стовпці матриці $\widetilde{T}_q(\tau,\varepsilon)$. Тоді, вважаючи компонентами векторів $\psi_j(\tau,\varepsilon)$, $j=\overline{1,q}$, алгебраїчні доповнення елементів q-го рядка матриці $J_q(0)+$ $+\,\varepsilon\big(\tau J_q'(0)+G_{1q}(0)\big)-\omega_j(\tau,\varepsilon)E_q$, отримуємо

$$\psi_j(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1+O(\varepsilon)\\ \rho_1^{\frac{1}{q}}(\tau,\varepsilon)+O\Big(\rho_1^{\frac{q+1}{q^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ \rho_1^{\frac{2}{q}}(\tau,\varepsilon)+O\Big(\rho_1^{\frac{2q+1}{q^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_1^{\frac{q-1}{q}}(\tau,\varepsilon)+O\Big(\rho_1^{\frac{(q-1)q+1}{q^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\end{pmatrix},\quad j=\overline{1,q},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

Отже,

$$\widetilde{T}_q^{-1}(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}O(1) & O\Big(\rho_1^{-\frac{1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_1^{-\frac{q-1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ O(1) & O\Big(\rho_1^{-\frac{1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_1^{-\frac{q-1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ O(1) & O\Big(\rho_1^{-\frac{1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_1^{-\frac{q-1}{q}}(\tau,\varepsilon)\Big)\end{pmatrix},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

Аналогічну структуру має матриця $\widetilde{T}_p(\tau,\varepsilon)$.

Нехай $\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)=\operatorname{diag}\big\{\widetilde{T}_q(\tau,\varepsilon),\widetilde{T}_p(\tau,\varepsilon)\big\}$. Покладаючи у системі (6) $y(\tau,\varepsilon)=\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)v(\tau,\varepsilon)$, одержуємо

$$N(\tau,\varepsilon)\frac{dv}{d\tau}=M(\tau,\varepsilon)v, \tag{7}$$

де

$$N(\tau,\varepsilon)=\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)G(\varepsilon\tau,\varepsilon)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)\equiv\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k N_k(\tau,\varepsilon),$$

$$N_0(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix},\quad N_1(\tau,\varepsilon)=0,\quad N_k(\tau,\varepsilon)=\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)G_k(\tau)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon),\quad k\ge 2,$$

$$M(\tau,\varepsilon)=\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)D(\varepsilon\tau,\varepsilon)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)-\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)G(\varepsilon\tau,\varepsilon)\widetilde{T}'(\tau,\varepsilon)\equiv\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k M_k(\tau,\varepsilon),$$

$$M_0(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & \Phi_p(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix},\qquad M_1(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}N_0(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}'(\tau,\varepsilon),$$

$$M_k(\tau,\varepsilon)=\widetilde{T}^{-1}(\tau,\varepsilon)\big(D_k(\tau)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)-G_k(\tau)\widetilde{T}'(\tau,\varepsilon)\big),\quad k\geq 2.$$

Докладніше проаналізуємо структуру, наприклад, матриці $\widetilde{T}_p^{-1}(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}_p'(\tau,\varepsilon)$. За побудовою

$$\widetilde{T}_p(\tau,\varepsilon)=K_0(\tau,\varepsilon)K_1+K_2(\tau,\varepsilon),$$

$$K_0(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & |\rho_2(\tau,\varepsilon)|^{\frac{1}{p}}\omega_0(\tau,\varepsilon) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & |\rho_2(\tau,\varepsilon)|^{\frac{2}{p}}\omega_0^2(\tau,\varepsilon) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & |\rho_2(\tau,\varepsilon)|^{\frac{p-1}{p}}\omega_0^{p-1}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$$\omega_0(\tau,\varepsilon)=e^{\frac{i\arg\rho_2(\tau,\varepsilon)}{p}},$$

$$K_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{p-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(p-1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \omega^{p-1} & \omega^{2(p-1)} & \ldots & \omega^{(p-1)(p-1)}\end{pmatrix},\quad \omega=e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

$$K_2(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \ldots & O(\varepsilon)\\ O\Big(\rho_2^{\frac{p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & O\Big(\rho_2^{\frac{p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_2^{\frac{p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ O\Big(\rho_2^{\frac{2p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & O\Big(\rho_2^{\frac{2p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_2^{\frac{2p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ O\Big(\rho_2^{\frac{(p-1)p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & O\Big(\rho_2^{\frac{(p-1)p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big) & \ldots & O\Big(\rho_2^{\frac{(p-1)p+1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big)\end{pmatrix},$$

$$\tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big],\quad \varepsilon\to 0+.$$

Тоді

$$\widetilde{T}_p^{-1}(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}_p'(\tau,\varepsilon)=\big(K_0(\tau,\varepsilon)K_1+K_2(\tau,\varepsilon)\big)^{-1}\big(K_0'(\tau,\varepsilon)K_1+K_2'(\tau,\varepsilon)\big)=$$

$$=\Big(E_p+\rho_2^{\frac{1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)K_3(\tau,\varepsilon)\Big)\Big(K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\varepsilon\rho_2^{-1+\frac{1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)K_4(\tau,\varepsilon)\Big)=$$

$$=K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\varepsilon\rho_2^{-1+\frac{1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)K_5(\tau,\varepsilon),$$

де

$$\Phi_0(\tau,\varepsilon)=K_0^{-1}(\tau,\varepsilon)K_0'(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{p}\left(\frac{|\rho_2(\tau,\varepsilon)|'}{|\rho_2(\tau,\varepsilon)|}+i(\arg\rho_2(\tau,\varepsilon))'\right)I,$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p-1 \end{pmatrix},$$

$$K_3(\tau,\varepsilon) = O(1), \qquad K_4(\tau,\varepsilon) = O(1), \qquad K_5(\tau,\varepsilon) = O(1), \quad \tau \in \left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right], \quad \varepsilon \to 0+.$$

Таким чином, можна вважати, що

$$M_0(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$M_1(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} -\Phi_q(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}_q^{-1}(\tau,\varepsilon)\widetilde{T}_q'(\tau,\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\varepsilon\rho_2^{-1+\frac{1}{p^2}}K_5(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Формальний матричний розв'язок системи (7) шукаємо у вигляді

$$V(\tau,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k V_k(\tau,\varepsilon). \tag{8}$$

Модифікуємо процедуру визначення функцій $V_k(\tau,\varepsilon)$, зрівнюючи коефіцієнти при степенях ε^k, таким чином:

$$\begin{pmatrix} \Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}\frac{dV_0}{d\tau} = \begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix} V_0, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}\frac{dV_k}{d\tau} = \begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix} V_k + F_k(\tau,\varepsilon), \quad k \geq 1, \tag{10}$$

де

$$F_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{k} M_s(\tau,\varepsilon)V_{k-s}(\tau,\varepsilon) - \sum_{s=2}^{k} N_s(\tau,\varepsilon)V_{k-s}'(\tau,\varepsilon).$$

Із рівнянь (9), (10) отримуємо

$$V_0(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{V_{01}(\tau,\varepsilon), V_{02}(\tau,\varepsilon)\right\}, \tag{11}$$

де

$$V_{01}(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\exp\left(\int_{b_1}^{\tau}\omega_1^{-1}(s,\varepsilon)ds\right), \ldots, \ \exp\left(\int_{b_q}^{\tau}\omega_q^{-1}(s,\varepsilon)ds\right)\right\},$$

$V_{02}(\tau,\varepsilon)$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dV_{02}}{d\tau} = \big(-K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon)\big)V_{02},$$

$$V_k(\tau,\varepsilon) = \int\limits_b^\tau V_0(\tau,\varepsilon)V_0^{-1}(s,\varepsilon)R_k(s,\varepsilon)\,ds, \quad k\in N. \tag{12}$$

Тут

$$R_k(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix}\Phi_q^{-1}(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}F_k(\tau,\varepsilon),$$

$b = \big(b_1,\ldots,b_q,k_0'\varepsilon^{-\beta},\ldots,k_0'\varepsilon^{-\beta}\big)$, нижня межа інтегрування в інтегралі, що міститься у i-му рядку системи (12), дорівнює $b_i,\ i=\overline{1,q}$, або $k_0'\varepsilon^{-\beta},\ i=\overline{q+1,n}$,

$$b_i = \begin{cases}0, & \operatorname{Re}\omega_i(\tau,\varepsilon)<0,\\ k_0'\varepsilon^{-\beta}, & \operatorname{Re}\omega_i(\tau,\varepsilon)>0, \quad t\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big], \quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0].\end{cases}$$

***Зауваження* 1.** Оскільки власні значення матриці $-\Phi_0(\tau,\varepsilon)$, згідно з умовою 3, мають недодатні дійсні частини, то $V_{02}(\tau,\varepsilon)$ обмежена на відрізку $\tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big]$. Справді, матриця $V_{02}(\tau,\varepsilon)$ задовольняє систему інтегральних рівнянь

$$V_{02}(\tau,\varepsilon) = \Psi(\tau,\varepsilon)C + \int\limits_0^\tau \Psi(\tau,\varepsilon)\Psi^{-1}(s,\varepsilon)\Phi_p(s,\varepsilon)V_{02}(s,\varepsilon)ds,$$

де $\Psi(\tau,\varepsilon) = K_1^{-1}\exp\left(-\int_0^\tau \Phi_0(s,\varepsilon)ds\right)K_1$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dv_2}{d\tau} = -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1v_2,$$

C — матриця довільних сталих.

За побудовою $\big\|\Psi(\tau,\varepsilon)\big\| \le l_0,\ \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big]$. Тому

$$\big\|V_{02}(\tau,\varepsilon)\big\| \le c_1 + l_1\int\limits_0^\tau \big\|\Phi_p(s,\varepsilon)\big\|\,\big\|V_{02}(s,\varepsilon)\big\|ds.$$

Отже, згідно з лемою Гронуолла – Беллмана

$$\big\|V_{02}(\tau,\varepsilon)\big\| \le c_1\exp\left(l_1\int\limits_0^\tau \big\|\Phi_p(s,\varepsilon)\big\|ds\right) \le l, \quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big],$$

де стала l не залежить від ε. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $C=E_p$.

Нехай $\gamma = \min\left\{\dfrac{p}{q(p+1)},\dfrac{1}{p(p+1)}\right\}$. Тоді за побудовою

$$V_0(\tau,\varepsilon) = O(1), \qquad V_k(\tau,\varepsilon) = O\big(\varepsilon^{-k(1-\gamma)}\big), \quad k\in N, \quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

Доведемо асимптотичний характер формального розв'язку (8) системи (7). Для цього в системі (7) покладемо

$$v_i(\tau,\varepsilon)=r_i(\tau,\varepsilon)+\widetilde{v}_i^{(m)}(\tau,\varepsilon), \qquad \widetilde{v}_i^{(m)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_i^{(k)}(\tau,\varepsilon),$$

де $v_i^{(k)}(\tau,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},$ — стовпці матриці $V_k(\tau,\varepsilon),$ а $r_i(\tau,\varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція. Маємо

$$N(\tau,\varepsilon)\frac{dr_i}{d\tau}=M(\tau,\varepsilon)r_i+f_i(\tau,\varepsilon). \tag{13}$$

Тут

$$f_i(\tau,\varepsilon)=M(\tau,\varepsilon)\widetilde{v}_i^{(m)}(\tau,\varepsilon)-N(\tau,\varepsilon)\frac{d\widetilde{v}_i^{(m)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}$$

і

$$f_{i1}(\tau,\varepsilon)=O\big(\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{q}}\big), \qquad f_{i2}(\tau,\varepsilon)=O\big(\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}}\big), \quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big], \quad \varepsilon\to 0+,$$

де $f_{i1}(\tau,\varepsilon)$ — q-вимірний вектор, що містить q перших компонент вектора $f_i(\tau,\varepsilon),$ $f_{i2}(\tau,\varepsilon)$ — $(n-q)$-вимірний вектор, що містить решту компонент $f_i(\tau,\varepsilon).$

Враховуючи неособливість матриці $N(\tau,\varepsilon),$ записуємо систему (13) таким чином:

$$\frac{dr_i}{d\tau}=\big(\Psi_0(\tau,\varepsilon)+L(\tau,\varepsilon)\big)r_i+g_i(\tau,\varepsilon), \tag{14}$$

де

$$\Psi_0(\tau,\varepsilon)=N_0^{-1}(\tau,\varepsilon)M_0(\tau,\varepsilon),$$

$$L(\tau,\varepsilon)=N^{-1}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k M_k(\tau,\varepsilon)+(N^{-1}(\tau,\varepsilon)-N_0^{-1}(\tau,\varepsilon))M_0(\tau,\varepsilon),$$

$$g_i(\tau,\varepsilon)=N^{-1}(\tau,\varepsilon)f_i(\tau,\varepsilon),$$

$$N^{-1}(\tau,\varepsilon)=N_0^{-1}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^2\begin{pmatrix}\rho_1^{-1}(\tau,\varepsilon)E_q & 0\\ 0 & \rho_2^{-1+\frac{1}{p}}(\tau,\varepsilon)E_p\end{pmatrix}S(\tau,\varepsilon)N_0^{-1}(\tau,\varepsilon),$$

$$S(\tau,\varepsilon)=O(1), \quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big], \quad \varepsilon\to 0+.$$

Згідно з умовою 3 вважаємо, що

$$\Phi_q(\tau,\varepsilon)=\operatorname{diag}\big\{\Phi_{q-}(\tau,\varepsilon),\Phi_{q+}(\tau,\varepsilon)\big\},$$

де $\Phi_{q-}(\tau,\varepsilon)$ і $\Phi_{q+}(\tau,\varepsilon)$ — матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $\Phi_q(\tau,\varepsilon)$ відповідно з від'ємними та додатними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\Phi_{q-}(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця порядку $k_1.$

Еквівалентна система інтегральних рівнянь до системи (14) з початковою умовою

$$r_i(b_i,\varepsilon)=0$$

має вигляд

$$r_{i1-}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau Z_{1-}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{11}(s,\varepsilon)r_{i1-}+L_{12}(s,\varepsilon)r_{i1+}+L_{13}(s,\varepsilon)r_{i2}+g_{i1-}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{15}$$

$$r_{i1+}(\tau,\varepsilon)=-\int\limits_\tau^{k_0'\varepsilon^{-\beta}} Z_{1+}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{21}(s,\varepsilon)r_{i1-}+L_{22}(s,\varepsilon)r_{i1+}+L_{23}(s,\varepsilon)r_{i2}+g_{i1+}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{16}$$

$$r_{i2}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau Z_{2}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{31}(s,\varepsilon)r_{i1-}+L_{32}(s,\varepsilon)r_{i1+}+L_{33}(s,\varepsilon)r_{i2}+g_{i2}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{17}$$

$$i=\overline{1,n},$$

де

$$L(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix} L_{11}(\tau,\varepsilon) & L_{12}(\tau,\varepsilon) & L_{13}(\tau,\varepsilon)\\ L_{21}(\tau,\varepsilon) & L_{22}(\tau,\varepsilon) & L_{23}(\tau,\varepsilon)\\ L_{31}(\tau,\varepsilon) & L_{32}(\tau,\varepsilon) & L_{33}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

розмірності векторів $r_{i1-}(\tau,\varepsilon)$, $r_{i1+}(\tau,\varepsilon)$ і $r_{i2}(\tau,\varepsilon)$ дорівнюють порядку матриць $\Phi_{q-}(\tau,\varepsilon)$, $\Phi_{q+}(\tau,\varepsilon)$ і $\Phi_0(\tau,\varepsilon)$ відповідно, $Z_{1-}(\tau,s,\varepsilon)$, $Z_{1+}(\tau,s,\varepsilon)$ і $Z_2(\tau,s,\varepsilon)$ — фундаментальні матриці однорідних систем

$$\frac{dr_{i1-}}{d\tau}=\Phi_{q-}^{-1}(\tau,\varepsilon)r_{i1-},\qquad Z_{1-}(s,s,\varepsilon)=E_{k_1},$$

$$\frac{dr_{i1+}}{d\tau}=\Phi_{q+}^{-1}(\tau,\varepsilon)r_{i1+},\qquad Z_{1+}(s,s,\varepsilon)=E_{q-k_1}$$

і

$$\frac{dr_{i2}}{d\tau}=\big(-K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\Phi_p(\tau,\varepsilon)\big)r_{i2},\qquad Z_2(s,s,\varepsilon)=E_p$$

відповідно. Зазначимо, що

$$Z_1(\tau,s,\varepsilon)=\operatorname{diag}\big\{Z_{1-}(\tau,s,\varepsilon),Z_{1+}(\tau,s,\varepsilon)\big\}\equiv V_{01}(\tau,\varepsilon)V_{01}^{-1}(s,\varepsilon),$$

а матриця $Z_2(\tau,s,\varepsilon)$ є розв'язком сумісної системи інтегральних рівнянь

$$Z_2(\tau,s,\varepsilon)=\Psi(\tau,\varepsilon)\Psi^{-1}(s,\varepsilon)+\int\limits_s^\tau \Psi(\tau,\varepsilon)\Psi^{-1}(s,\varepsilon)\Phi_p(s,\varepsilon)Z_2(\tau,s,\varepsilon)ds.$$

За побудовою

$$L_{ij}(\tau,\varepsilon)=O(1),\quad i=1,2,\quad j=\overline{1,3},$$

$$L_{3j}(\tau,\varepsilon)=O\Big(\varepsilon\rho_2^{-1+\frac{1}{p^2}}(\tau,\varepsilon)\Big),\quad j=\overline{1,3},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big],\quad \varepsilon\to 0+,$$

$$\big\|Z_{1-}(\tau,s,\varepsilon)\big\|\le d\exp\bigg(\frac{c_{1-}}{\varepsilon^{\frac{p}{q(p+1)}}}(\tau-s)\bigg),\quad 0\le s\le\tau\le k_0'\varepsilon^{-\beta},$$

$$\big\|Z_{1+}(\tau,s,\varepsilon)\big\|\le d\exp\bigg(\frac{c_{1+}}{\varepsilon^{\frac{p}{q(p+1)}}}(\tau-s)\bigg),\quad 0\le \tau\le s\le k_0'\varepsilon^{-\beta},$$

$$\big\|Z_2(\tau,s,\varepsilon)\big\|\le d,\quad 0\le s\le\tau\le k_0'\varepsilon^{-\beta},$$

$$c_{1-}<0,\quad c_{1+}>0.$$

Для доведення існування розв'язку системи (15)–(17) скористаємось методом послідовних наближень, які визначаємо за формулами

$$r_i^{(0)}(\tau,\varepsilon)\equiv 0,\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big],$$

$$r_{i1-}^{(l)}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau Z_{1-}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{11}(s,\varepsilon)r_{i1-}^{(l-1)}+L_{12}(s,\varepsilon)r_{i1+}^{(l-1)}+L_{13}(s,\varepsilon)r_{i2}^{(l-1)}+g_{i1-}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{18}$$

$$r_{i1+}^{(l)}(\tau,\varepsilon)=-\int\limits_\tau^{k_0'\varepsilon^{-\beta}} Z_{1+}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{21}(s,\varepsilon)r_{i1-}^{(l-1)}+L_{22}(s,\varepsilon)r_{i1+}^{(l-1)}+L_{23}(s,\varepsilon)r_{i2}^{(l-1)}+g_{i1+}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{19}$$

$$r_{i2}^{(l)}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau Z_{2}(\tau,s,\varepsilon)\big(L_{31}(s,\varepsilon)r_{i1-}^{(l-1)}+L_{32}(s,\varepsilon)r_{i1+}^{(l-1)}+L_{33}(s,\varepsilon)r_{i2}^{(l-1)}+g_{i2}(s,\varepsilon)\big)ds, \tag{20}$$

$$i=\overline{1,n},\quad l\in N.$$

Нехай

$$\big\|g_{i1}(\tau,\varepsilon)\big\|\le d_1\varepsilon^{m\gamma},\qquad \big\|g_{i2}(\tau,\varepsilon)\big\|\le d_1\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

За побудовою

$$\big\|r_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big\|\le d_2\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}},$$

$$\big\|r_i^{(l)}(\tau,\varepsilon)-r_i^{(l-1)}(\tau,\varepsilon)\big\|\le d_2^l\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big],\quad d_2<1,\quad l\in N.$$

Вважатимемо, що $m\gamma+\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p+1}>0$. Тоді послідовні наближення (18)–(20) збігаються до розв'язку $r_i=r_i(\tau,\varepsilon)$ системи (15)–(17), причому

$$\big\|r_i(\tau,\varepsilon)\big\|\le c\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}},\quad \tau\in\big[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}\big].$$

Зазначимо, що стала c не залежить від m.

Для доведення єдиності розв'язку системи (15)–(17) скористаємось методом доведення від супротивного. Нехай $\overline{r}_i(\tau,\varepsilon)$ і $\overline{\overline{r}}_i(\tau,\varepsilon)$ — розв'язки системи (15)–(17), причому $\overline{r}_i(\tau,\varepsilon) \not\equiv$ $\not\equiv \overline{\overline{r}}_i(\tau,\varepsilon)$, $\tau \in \left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$. Позначимо

$$\theta_i = \max_{\tau\in[0;k_0'\varepsilon^{-\beta}]} \left\|\overline{r}_i(\tau,\varepsilon) - \overline{\overline{r}}_i(\tau,\varepsilon)\right\|, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді згідно з (15)–(17) отримуємо

$$\theta_i \leq k\varepsilon^{\gamma}\theta_i < \theta_i$$

(стала k не залежить від ε), що неможливо. А тому система (15)–(17) має єдиний розв'язок.

***Зауваження* 2.** Нехай $V^{(m)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k V_k(\tau,\varepsilon)$, а $R(\tau,\varepsilon)$ — матриця зі стовпцями $r_i(\tau,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$. Тоді стовці матриці $V^{(m)}(\tau,\varepsilon) + R(\tau,\varepsilon)$ лінійно незалежні на відрізку $\left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$. Справді, нехай $C(\varepsilon)$ — така діагональна матриця, що

$$(V^{(m)}(\tau,\varepsilon) + R(\tau,\varepsilon))C(\varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Позначимо $C(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{C_{q-}(\varepsilon), C_{q+}(\varepsilon), C_{n-q}(\varepsilon)\right\}$, де порядки матриць $C_{q-}(\varepsilon)$ і $C_{q+}(\varepsilon)$ відповідно дорівнюють k_1 і $q - k_1$. Покладаючи у рівності (21) $\tau = 0$, згідно з (11), (12), (15) і (17) отримуємо $C_{q-}(\varepsilon) = 0$, $C_{n-q}(\varepsilon) = 0$. Якщо ж $\tau = k_0'\varepsilon^{-\beta}$, то аналогічно одержуємо $C_{q+}(\varepsilon) = 0$. Отже, стовпці матриці $V^{(m)}(\tau,\varepsilon)+R(\tau,\varepsilon)$ лінійно незалежні на відрізку $\left[0; k_0'\varepsilon^{-\beta}\right]$.

Теорема. *Нехай* $A(t,\varepsilon)$ *і* $B(t,\varepsilon)$ *належать* $C^{m+1}(\overline{K})$, *де* $\overline{K} = \left\{(t,\varepsilon)\colon 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq \right.$ $\left.\leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\right\}$, *і виконуються умови* 1–3. *Тоді існує таке* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *що система* (1) *на відрізку* $\left[0; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right]$, $k_0' > k_0$, $\beta = \dfrac{1}{p+1}$, *для всіх* $m > \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p^2}\right)$ *має* n *лінійно незалежних розв'язків* $x_i = x_i(t,\varepsilon)$, *причому*

$$\left\|x_i(t,\varepsilon) - x_i^{(m)}(t,\varepsilon)\right\| \leq c\varepsilon^{m\gamma + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+1}}, \quad t \in \left[0; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right],$$

де $x_i^{(m)}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)\widetilde{v}_i^{(m)}(\tau,\varepsilon)$, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$.

Зрощування асимптотичних розвинень. Позначимо через $X_1(t,\varepsilon)$ і $X_2(t,\varepsilon)$ фундаментальні матриці системи (1) відповідно на відрізках $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_0\right]$ і $\left[0; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right]$,

$$X_1(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\Big(E_n + O\Big(m^{-1}k_0^{-m(1+\frac{1}{p})}\Big)\Big)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

$$X_2(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)\Big(V^{(m)}(\tau,\varepsilon) + O\Big(\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}}\Big)\Big),$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1(t,\varepsilon), \lambda_2(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon)\right\}, \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ [1].$$

Оскільки, за побудовою, $k_0' > k_0$, то на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right]$ побудовано дві фундаментальні матриці системи (1). А тому існує така стала матриця $D(\varepsilon)$, що

$$X_2(t,\varepsilon) = X_1(t,\varepsilon)D(\varepsilon), \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right].$$

Для її визначення достатньо взяти деяке $t' \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; k_0'\varepsilon^{1-\beta}\right]$ і покласти

$$D(\varepsilon) = X_1^{-1}(t', \varepsilon) X_2(t', \varepsilon).$$

Нехай, наприклад, $t' = k_0 \varepsilon^{1-\beta}$. Тоді

$$X_1^{-1}\big(k_0\varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon\big) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^{k_0\varepsilon^{1-\beta}} \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\Big(E_n + O\Big(m^{-1}k_0^{-m(1+\frac{1}{p})}\Big)\Big)^{-1}\times$$

$$\times U^{-1}\big(k_0\varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon\big) Q^{-1}\big(k_0\varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon\big),$$

$$X_2\big(k_0\varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon\big) = Q\big(k_0\varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon\big)\widetilde{T}(k_0\varepsilon^{-\beta}, \varepsilon)\Big(V^{(m)}(k_0\varepsilon^{-\beta}, \varepsilon) + O\big(\varepsilon^{m\gamma + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+1}}\big)\Big).$$

Припускаючи $\operatorname{Re}\sqrt[q]{\widetilde{b}_q(0)} \neq 0$, $\operatorname{Re}\sqrt[p]{\widetilde{a}_p(0)} \neq 0$, вважаємо, що

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\big\{\Lambda_q(t,\varepsilon), \Lambda_p(t,\varepsilon)\big\},$$

$$\Lambda_q(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\big\{\Lambda_{q-}(t,\varepsilon), \Lambda_{q+}(t,\varepsilon)\big\}, \qquad \Lambda_p(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\big\{\Lambda_{p-}(t,\varepsilon), \Lambda_{p+}(t,\varepsilon)\big\},$$

де, наприклад, $\Lambda_{q-}(t,\varepsilon)$ і $\Lambda_{q+}(t,\varepsilon)$ — матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $\Lambda_q(t,\varepsilon)$ відповідно з від'ємними і додатними дійсними частинами. Аналогічну структуру має $\Lambda_p(t,\varepsilon)$.

Тоді за побудовою

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^{k_0\varepsilon^{1-\beta}} \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{E_{k_1},\ \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{k_0\varepsilon^{1-\beta}}^{t_6} \Lambda_{q+}(\tau,\varepsilon)d\tau\right),\ E_{k_2},\ \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{k_0\varepsilon^{1-\beta}}^{t_6} \Lambda_{p+}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\},$$

де k_1 і k_2 — порядки квадратних матриць $\Lambda_{q-}(t,\varepsilon)$ і $\Lambda_{p-}(t,\varepsilon)$ відповідно, сталу t_6 визначено в [1].

Приклад. Розглянемо систему

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y, \quad t \in [0;1], \tag{22}$$

де

$$H(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ t+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Зовнішнє розвинення. Вважаємо, що $t \in \big[10\varepsilon^{\frac{2}{3}}; 1\big]$. За побудовою $p = q = 2$,

$$J_q(t) = J_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{1p}(t) = D_{1p}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_{1q}(t) = G_{1q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриць $J_q(t)+\varepsilon G_{1q}(t)$ і $J_p(t)+\varepsilon D_{1p}(t)$ відповідно дорівнюють

$$w_{12}(t)=\pm\sqrt{t+\varepsilon}=\pm\sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big)$$

і

$$w_{34}(t)=\pm\sqrt{t+\varepsilon}=\pm\sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big).$$

У системі (22) покладемо $y(t,\varepsilon)=U(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)$, де $U(t,\varepsilon)=U_0(t,\varepsilon)+\varepsilon U_1(t,\varepsilon)$. Матрицю $U(t,\varepsilon)$ підберемо так, щоб виконувалась рівність

$$C(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)-\varepsilon H(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon)=H(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\big(\Lambda(t,\varepsilon)+\varepsilon^2\Delta(t,\varepsilon)\big),$$

де $\Lambda(t,\varepsilon)=\Lambda_0(t,\varepsilon)+\varepsilon\Lambda_1(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\big\{\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_4(t,\varepsilon)\big\}$.

За побудовою

$$U(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)\big(P_0+\varepsilon P_1(t,\varepsilon)\big),$$

де

$$T(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ -\sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big) & \sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -\sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big) & \sqrt{t}+O\big(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\big)\end{pmatrix},\quad P_0=E_4,$$

$$P_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{8\sqrt{t}}+O(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}) & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{8\sqrt{t}}+O(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{8t\sqrt{t}}+O(\varepsilon t^{-\frac{3}{2}})\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{8t\sqrt{t}}+O(\varepsilon t^{-\frac{3}{2}}) & 0\end{pmatrix}.$$

Крім того,

$$\Lambda_0(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{t}}(1+O(\varepsilon t^{-1})) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{t}}(1+O(\varepsilon t^{-1})) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{t}+O(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{t}+O(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}})\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4t}+O(\varepsilon t^{-1}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{4t}+O(\varepsilon t^{-1}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4t}+O(\varepsilon t^{-\frac{3}{2}}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4t}+O(\varepsilon t^{-\frac{3}{2}})\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^2\|\Delta(t,\varepsilon)\|\le\frac{1}{4}\varepsilon^2t^{-\frac{5}{2}},\quad t\in[10\varepsilon^{\frac{2}{3}};1].$$

Згідно з результатами [1] система (22) має чотири лінійно незалежних розв'язки

$$y_j(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\big(e_j + O\big(10^{-\frac{3}{2}}\big)\big)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{a_j}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad j=\overline{1,4},$$

де e_j — чотиривимірний вектор, j-та координата якого дорівнює 1, решта координат дорівнюють 0; $a_1 = a_3 = 10\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, $a_2 = a_4 = 1$.

Внутрішнє розвинення. Систему (22) розглядаємо на відрізку $\big[0; 20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\big]$. Покладаючи $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, отримуємо

$$H(\varepsilon\tau,\varepsilon)\frac{dy}{d\tau} = C(\varepsilon\tau,\varepsilon)y, \quad \tau\in\big[0; 20\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\big]. \tag{23}$$

У даному випадку

$$\rho_1(\tau,\varepsilon) = \rho_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(\tau+1),$$

власні значення матриць $J_q(0) + \varepsilon\big(\tau J_q'(0) + G_{1q}(0)\big)$ і $J_p(0) + \varepsilon\big(\tau J_p'(0) + D_{1p}(0)\big)$ відповідно дорівнюють

$$\omega_{12}(\tau,\varepsilon) = \pm\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}$$

і

$$\omega_{34}(\tau,\varepsilon) = \pm\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}.$$

Нехай $y(\tau,\varepsilon) = \widetilde{T}(\tau,\varepsilon)v(\tau,\varepsilon)$, де

$$\widetilde{T}(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\varepsilon(\tau+1)} & \sqrt{\varepsilon(\tau+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\varepsilon(\tau+1)} & \sqrt{\varepsilon(\tau+1)} \end{pmatrix}.$$

Тоді система (23) набере вигляду

$$N(\tau,\varepsilon)\frac{dv}{d\tau} = M(\tau,\varepsilon)v, \tag{24}$$

де

$$N(\tau,\varepsilon) \equiv N_0(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon(\tau+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon(\tau+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(\tau,\varepsilon) = M_0(\tau,\varepsilon) + \varepsilon M_1(\tau,\varepsilon),$$

$$M_0(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\dfrac{1}{4(\tau+1)}-\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}&\dfrac{1}{4(\tau+1)}\\0&0&\dfrac{1}{4(\tau+1)}&-\dfrac{1}{4(\tau+1)}+\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}\end{pmatrix},$$

$$M_1(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Формальний розв'язок системи (24) шукаємо у вигляді (8). При цьому

$$V_0(\tau,\varepsilon)=\operatorname{diag}\big\{V_{01}(\tau,\varepsilon),V_{02}(\tau,\varepsilon)\big\},$$

де

$$V_{01}(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\exp\left(-\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\tau+1}-1)\right)&0\\0&\exp\left(\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{\tau+1}-\sqrt{20\varepsilon^{-\frac{1}{3}}+1}\right)\right)\end{pmatrix},$$

а $V_{02}(\tau,\varepsilon)$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dV_{02}}{d\tau}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4(\tau+1)}-\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}&\dfrac{1}{4(\tau+1)}\\\dfrac{1}{4(\tau+1)}&-\dfrac{1}{4(\tau+1)}+\sqrt{\varepsilon(\tau+1)}\end{pmatrix}V_{02}.$$

За побудовою $V_{02}(\tau,\varepsilon)=O(1),\ \tau\in\big[0;20\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\big],\ \varepsilon\to 0+$. Згідно з (12) визначаємо $V_1(\tau,\varepsilon)$. При цьому $V_1(\tau,\varepsilon)=O\big(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\big),\ \tau\in\big[0;20\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\big],\ \varepsilon\to 0+$.

Покладаючи у системі (24)

$$v_i(\tau,\varepsilon)=r_i(\tau,\varepsilon)+\widetilde{v}_i^{(1)}(\tau,\varepsilon),\qquad \widetilde{v}_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)=v_i^{(0)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon v_i^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

де $v_i^{(k)}(\tau,\varepsilon),\ i=\overline{1,4}$, — стовпці матриці $V_k(\tau,\varepsilon)$, доводимо, що вектор-функція $r_i(\tau,\varepsilon)$ є розв'язком системи (15)–(17) і

$$r_i(\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon),\quad \tau\in\big[0;20\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\big],\quad \varepsilon\to 0+.$$

Таким чином, система (22) на відрізку $\big[0;20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\big]$ має чотири лінійно незалежних розв'язки $y_i=y_i(t,\varepsilon)$, причому

$$y_i(t,\varepsilon)=y_i^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon),\quad t\in\big[0;20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\big],\quad \varepsilon\to 0+,$$

де $y_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\widetilde{T}(\tau,\varepsilon)\widetilde{v}_i^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$.

Зрощування асимптотичних розвинень. Нехай $X_1(t,\varepsilon)$ і $X_2(t,\varepsilon)$ — фундаментальні матриці системи (22) на відрізках $\left[10\varepsilon^{\frac{2}{3}};1\right]$ і $\left[0;20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right]$ відповідно, тобто

$$X_1(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\big(E_4 + O\big(10^{-\frac{3}{2}}\big)\big)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

$$X_2(t,\varepsilon) = \widetilde{T}(\tau,\varepsilon)\big(V^{(1)}(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon)\big),$$

де $V^{(1)}(\tau,\varepsilon) = V_0(\tau,\varepsilon) + \varepsilon V_1(\tau,\varepsilon),\ a = \big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}}, 1, 10\varepsilon^{\frac{2}{3}}, 1\big)$.

На відрізку $\left[10\varepsilon^{\frac{2}{3}};20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right]$ побудовано дві фундаментальні матриці системи (22). А тому існує така стала матриця $D(\varepsilon)$, що

$$X_2(t,\varepsilon) = X_1(t,\varepsilon)D(\varepsilon), \quad t \in \left[10\varepsilon^{\frac{2}{3}};20\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right].$$

Нехай $t = 10\varepsilon^{\frac{2}{3}}$. Тоді

$$D(\varepsilon) = X_1^{-1}\big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}},\varepsilon\big)X_2\big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}},\varepsilon^{\frac{2}{3}}\big).$$

За побудовою

$$X_1^{-1}\big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}},\varepsilon\big) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^{10\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\big(E_4 + O\big(10^{-\frac{3}{2}}\big)\big)^{-1}U^{-1}\big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}},\varepsilon\big),$$

$$U^{-1}\big(10\varepsilon^{\frac{2}{3}},\varepsilon\big) = O(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}),$$

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^{10\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{10\varepsilon^{\frac{2}{3}}}^1 \lambda_2(\tau,\varepsilon)d\tau\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{10\varepsilon^{\frac{2}{3}}}^1 \lambda_4(\tau,\varepsilon)d\tau\right) \end{pmatrix}.$$

Література

1. А. М. Самойленко, П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь з точками повороту. I*, Укр. мат. журн., **72**, № 12, 1669 – 1681 (2020).
2. Y. Sibuya, *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*, Funkcial. Ekvac., **4**, 29 – 56 (1962).
3. П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями*, Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, Київ (2011).
4. W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer-Verlag, New York (1985).
5. A. Ostrowski, *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*, Acad. Press, New York (1973).

Одержано 29.12.20