DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6527

УДК 517.587

С. М. Загороднюк (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

ПРО РЯДИ ЗА ОРТОГОНАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТА СИСТЕМИ МНОГОЧЛЕНІВ КЛАСИЧНОГО ТИПУ

If $\sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x)$, is a formal series of orthonormal polynomials $g_k(x)$ on the real line that has positive coefficients c_k, then its partial sums $u_n(x)$ are associated with Jacobi type pencils. Therefore, they possess a recurrence relation and special orthonormality conditions. The cases where $g_k(x)$ are Jacobi or Laguerre polynomials will be of a special interest. For a suitable choice of parameters c_k, the partial sums $u_n(x)$ are Sobolev orthogonal polynomials with a (3×3) matrix measure. A further selection of parameters gives differential equations for u_n. In this case, polynomials $u_n(x)$ are solutions to generalized eigenvalue problems both in x and in n.

Якщо $\sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x)$ — формальний ряд за ортонормованими многочленами $g_k(x)$ на дійсній осі з додатними коефіцієнтами c_k, то відповідні часткові суми $u_n(x)$ будуть асоційованими зі жмутками якобієвого типу. Отже, вони мають рекурентне співвідношення та спеціальні співвідношення ортонормальності. Випадки, коли $g_k(x)$ є многочленами Якобі або Лагерра, мають додатковий інтерес. Придатний підбір параметрів c_k забезпечує те, що $u_n(x)$ будуть соболевськими ортогональними многочленами з (3×3) матричною мірою. Більше того, подальший відбір параметрів забезпечує диференціальні рівняння для u_n. В останньому випадку многочлени $u_n(x)$ є розв'язками узагальнених задач на власні значення відносно x та n.

1. Вступ. Теорія ортогональних поліномів на дійсній осі має дуже великий об'єм досліджень і багато застосувань в різних галузях науки (див. [3, 8, 9, 15 – 17]). Нехай $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg g_n = n$, — ортонормовані поліноми на дійсній осі з додатними старшими коефіцієнтами:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) g_m(x) d\mu_g(x) = \delta_{n,m}, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Тут μ_g — (невід'ємна) міра на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Як відомо, поліноми g_n задовольняють рекурентне співвідношення

$$\widehat{a}_{n-1} g_{n-1}(x) + \widehat{b}_n g_n(x) + \widehat{a}_n g_{n+1}(x) = x g_n(x), \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

де $\widehat{a}_j > 0$, $\widehat{b}_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{Z}_+$, і $\widehat{a}_{-1}=0$, $g_{-1}(x)=0$. Співвідношення (2) можна записати у матричному вигляді

$$G\vec{g}(x) = x\vec{g}(x), \tag{3}$$

де $\vec{g}(x) = (g_0(x), g_1(x), \ldots)^T$. Тут G позначає матрицю Якобі з $\widehat{b}_k$ на головній діагоналі, та з $\widehat{a}_k$ на першій піддіагоналі [1]. Поліноми

$$K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(t) g_k(x), \qquad n\in\mathbb{Z}_+,$$

відомі як *ядерні поліноми* (див., наприклад, [17, с. 39]). Зауважимо, що ми користуємося дещо відмінним позначенням для цих поліномів. Ядерні поліноми (або поліноміальне ядро) мають *відновлювальну властивість* та інші важливі властивості. Зокрема, якщо носій міри лежить в $(-\infty, b]$ і $t = t_0 \geq b$, то ядерні поліноми $K_n(t_0,x)$ є ортогональними на $\mathbb{R}$ відносно $(t_0 - x)d\mu_g$ (див. [17, с. 40]).

Нехай $\vec{c} = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — вектор-рядок довільних додатних чисел. Розглянемо поліноми

$$u_n(x) = u_n(\vec{c};x) := \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Зрозуміло, що поліноми $u_n(x)$ є частковими сумами формального ряду за ортогональними поліномами:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x).$$

З іншого боку, у випадку $c_k = g_k(t_0) > 0$ поліноми $u_n(x)$ узагальнюють наведені вище поліноми $K_n(t_0,x)$. Поліноми $u_n(x)$ можно також називати *модифікованими ядерними поліномами*. Як ми побачимо далі, поліноми $u_n(x)$ не повинні бути ортогональними на дійсній осі. Проте вони мають ряд цікавих властивостей. У випадку, коли $c_k = \int_{\mathbb{R}} f(t)g_k(t)d\mu_g$, поліном $u_n(x)$ можна компактно записати з використанням поліноміального ядра під інтегралом.

Окрім рядів за ортогональними поліномами поліноми $u_n(x)$ можуть виникати при використанні формули Гріна для розв'язків різницевого рівняння, пов'язаного з (2) [1, с. 9]. Наприклад, можна вибрати $c_0 = 1,\ c_k = q_k(t_0),\ k \geq 1$, у випадку, коли останні числа додатні. Тут q_k позначають поліноми другого роду для g_k. Використання формули Гріна також забезпечує компактне зображення для поліномів $u_n(x)$.

У даній статті ми побудуємо приклади поліномів $u_n(x)$, які приводять до соболевських ортогональних поліномів класичного типу. Теорія соболевських ортогональних поліномів на даний час розвивається і викликає великий інтерес. Короткий огляд теорії наведено в [5], а більш повний виклад теорії можно знайти в [13]. Нам знадобиться таке означення.

Означення 1 [18]. *Набір* $\Theta = (J_3, J_5, \alpha, \beta)$, *де* $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ J_3$ — *матриця Якобі та* J_5 — *напівнескінченна дійсна симетрична п'ятидіагональна матриця з додатними числами на другій піддіагоналі, називається жмутком* (*матриць*) *якобієвого типу.*

Матриці J_3 і J_5 мають вигляд

$$J_3 = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}, \qquad a_k > 0, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_0 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad \gamma_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Із жмутком якобієвого типу Θ асоціюють таку систему поліномів $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, що

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$$

і

$$(J_5 - \lambda J_3)\vec{p}(\lambda) = 0, \tag{7}$$

де $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots)^T$. Поліноми $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ називають *асоційованими для жмутка матриць якобієвого типу* Θ.

Співвідношення (7) показує, що $\vec{p}(\lambda)$ є узагальненим власним вектором лінійного операторного жмутка (або операторного полінома) $J_5 - \lambda J_3$, який відповідає власному значенню λ. Співвідношення (7) є узагальненням співвідношення (3). Воно є дискретизацією диференціального рівняння четвертого порядку, яке виникає в деяких фізичних задачах [19]. Запишемо співвідношення (7) у скалярній формі

$$\gamma_{n-2}p_{n-2}(\lambda) + (\beta_{n-1} - \lambda a_{n-1})p_{n-1}(\lambda) + (\alpha_n - \lambda b_n)p_n(\lambda) + \\ + (\beta_n - \lambda a_n)p_{n+1}(\lambda) + \gamma_n p_{n+2}(\lambda) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

де $p_{-2}(\lambda) = p_{-1}(\lambda) = 0$, $\gamma_{-2} = \gamma_{-1} = a_{-1} = \beta_{-1} = 0$. Поліноми p_n мають спеціальні співвідношення ортонормованості [20].

Іншим можливим узагальненням співвідношення (3) є таке:

$$J_{2N+1}\vec{p}(\lambda) = \lambda^N \vec{p}(\lambda),$$

де J_{2N+1} — $(2N+1)$-діагональна комплексна напівнескінченна ермітова матриця. Воно виникає при вивченні ортогональних поліномів на радіальних променях у комплексній площині (див., наприклад, [4, 6, 14] та наведену там бібліографію). Зазначимо, що жмутки тридіагональних матриць та пов'язані з ними біортогональні раціональні функції вивчались у [23].

Опишемо коротко зміст даної роботи. Модифіковані ядерні поліноми $u_n(x)$ задовольняють рекурентне співвідношення типу (8) (теорема 1). Для доведення ми використовуємо облямовування співвідношення (3) дводіагональними матрицями *спеціального вигляду*. Ідею облямовування дводіагональними матрицями для побудови систем поліномів, які задовольняють (7), запропонував автору один із рецензентів статті [19].

Спеціальні випадки, коли g_k є многочленами Якобі аба Лагерра, мають додаткові переваги. Придатний вибір параметрів c_k приводить до того, що u_n будуть соболевськими ортогональними многочленами. Тут ми користуємося ідеями з [21].

Подальший відбір параметрів c_k дає диференціальні рівняння для u_n. Відповідні результати містяться в теоремах 2 і 3. Оскільки u_n будуть (узагальненими) власними функціями як для різницевого, так і для диференціального операторів, то можна говорити про соболевські ортогональні многочлени класичного типу. Як відомо, класичні системи поліномів Якобі, Лагерра та Ерміта задовольняють диференціальне рівняння (крім різницевого рівняння). Починаючи з 20-го століття багато уваги приділяється подібним системам, що є розв'язками (узагальнених) спектральних задач. Зокрема, це стосується і систем соболевських ортогональних многочленів. Загальну постановку відповідної спектральної задачі можна знайти, наприклад, у [22] (задачі 1, 2), де також наведено історичні коментарі. Крім наведених у списку літератури в [22] праць можна вказати, наприклад, роботи [7, 10, 11]. У багатьох із вищезгаданих робіт вивчалися класичні міри, збурені додаванням атомічних мір, з можливим використанням похідних до певного порядку, і будувалися диференціальні рівняння (можливо, нескінченного порядку) для них. У розглядуваному випадку матрична міра у співвідношеннях ортогональності соболевського типу не є атомічною (див. теореми 2 і 3).

Як зазвичай, через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Z}_+$ ми позначаємо множини дійсних, комплексних, натуральних, цілих і невід'ємних чисел відповідно. Верхній індекс T означає транспонування матриці. Під $\mathbb{Z}_{k,l}$ ми розуміємо всі цілі числа j, що задовольняють нерівність $k \leq j \leq l$,

$k, l \in \mathbb{Z}$. Через $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ позначається множина всіх борелевських підмножин $\mathbb{R}$, а через $\mathbb{P}$ — множина всіх поліномів із комплексними коефіцієнтами. Для комплексного числа c ми позначаємо $(c)_0 = 1,\ (c)_k = c(c+1)\dots(c+k-1),\ k \in \mathbb{N}$ (*зсунутий факторіал або символ Похгаммера*). Узагальнена гіпергеометрична функція позначається так:

$$ {}_mF_n(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{x^k}{k!}, $$

де $m, n \in \mathbb{N},\ a_j, b_l \in \mathbb{C}$. Через $\Gamma(z)$ і $\mathrm{B}(z)$ ми позначаємо гамма- та бета-функції відповідно. Під $J_\nu(z)$ ми розуміємо функцію Бесселя першого роду.

2. Часткові суми рядів за ортогональними поліномами. Спочатку отримаємо рекурентне співвідношення для поліномів (4).

Теорема 1. *Нехай* $\{g_n(x)\}_{n=0}^\infty,\ \deg g_n = n,$ *— ортонормовані поліноми на дійсній осі з додатними старшими коефіцієнтами, які задовольняють співвідношення* (2). *Нехай* $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ *— множина з довільних додатних чисел, а* u_n *— модифіковані ядерні поліноми з* (4). *Поліноми*

$$ p_n(x) := \frac{1}{c_0 g_0} u_n(x) = \frac{1}{c_0 g_0} \sum_{j=0}^{n} c_j g_j(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9} $$

є асоційованими для жмутка якобієвого типу

$$ \widetilde{\Theta} = \left(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_5, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \right), $$

де

$$ \widetilde{\alpha} = \frac{c_1}{c_0 \widehat{a}_0}, \quad \widetilde{\beta} = 1 - \frac{c_1 \widehat{b}_0}{c_0 \widehat{a}_0}, \tag{10} $$

матриці $\mathbf{J}_3$ *і* $\mathbf{J}_5$ *мають вигляд* (5) *і* (6) *відповідно з*

$$ a_n = \frac{1}{c_{n+1}^2}, \quad b_n = -\frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{c_{n+1}^2}, \tag{11} $$

$$ \begin{gathered} \alpha_n = \frac{2\widehat{a}_n}{c_n c_{n+1}} - \frac{\widehat{b}_n}{c_n^2} - \frac{\widehat{b}_{n+1}}{c_{n+1}^2}, \quad \beta_n = \frac{\widehat{b}_{n+1}}{c_{n+1}^2} - \frac{\widehat{a}_{n+1}}{c_{n+1} c_{n+2}} - \frac{\widehat{a}_n}{c_n c_{n+1}}, \\ \gamma_n = \frac{\widehat{a}_{n+1}}{c_{n+1} c_{n+2}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{12} $$

Поліноми p_n *та* u_n *задовольняють співвідношення* (8) *з наведеними вище коефіцієнтами з* (12).

Доведення. Нехай $\{g_n(x)\}_{n=0}^\infty,\ \deg g_n = n,$ — ортонормовані поліноми на дійсній осі з додатними старшими коефіцієнтами і виконано співвідношення (1)–(3). Визначимо модифіковані ядерні поліноми через співвідношення (4), де $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ — набір довільних додатних чисел. Розглянемо напівнескінченну дводіагональну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що

$$\vec{g}(x) = C\vec{u}(x), \tag{13}$$

де $\vec{g}(x) = (g_0(x), g_1(x), \ldots)^T$, $\vec{u}(x) = (u_0(x), u_1(x), \ldots)^T$. Співвідношення (13) можна перевірити безпосередньо, використавши співвідношення (4). Підставимо $\vec{g}(x)$ із (13) у (3):

$$(GC)\vec{u}(x) = xC\vec{u}(x).$$

Позначимо через C^* матрицю, формально спряжену до C:

$$C^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} & -\frac{1}{c_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_2} & -\frac{1}{c_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$(-C^*GC)\vec{u}(x) = x(-C^*C)\vec{u}(x). \tag{14}$$

Позначимо

$$\mathbf{J}_3 = -C^*C, \quad \mathbf{J}_5 = -C^*GC.$$

Обчислимо елементи матриць $\mathbf{J}_3$ і $\mathbf{J}_5$. Позначимо через $\vec{e}_n$ напівнескінченний вектор-стовпець $(\delta_{j,n})_{j=0}^{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $\vec{e}_{-1} = \vec{e}_{-2}$ будуть вектор-стовпцями, що складаються з нулів. Маємо

$$C\vec{e}_n = \frac{1}{c_n}\vec{e}_n - \frac{1}{c_{n+1}}\vec{e}_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{15}$$

$$C^*\vec{e}_m = -\frac{1}{c_m}\vec{e}_{m-1} + \frac{1}{c_m}\vec{e}_m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{16}$$

Тоді

$$\mathbf{J}_3\vec{e}_n = \frac{1}{c_n^2}\vec{e}_{n-1} - \left(\frac{1}{c_n^2} + \frac{1}{c_{n+1}^2}\right)\vec{e}_n + \frac{1}{c_{n+1}^2}\vec{e}_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Записуємо

$$G\vec{e}_k = \widehat{a}_{k-1}\vec{e}_{k-1} + \widehat{b}_k\vec{e}_k + \widehat{a}_k\vec{e}_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

З (15), (16) і (18) випливає, що

$$\mathbf{J}_5\vec{e}_n = \frac{\widehat{a}_{n-1}}{c_n c_{n-1}}\vec{e}_{n-2} + \left(\frac{\widehat{b}_n}{c_n^2} - \frac{\widehat{a}_n}{c_n c_{n+1}} - \frac{\widehat{a}_{n-1}}{c_n c_{n-1}}\right)\vec{e}_{n-1} +$$
$$+ \left(\frac{2\widehat{a}_n}{c_n c_{n+1}} - \frac{\widehat{b}_n}{c_n^2} - \frac{\widehat{b}_{n+1}}{c_{n+1}^2}\right)\vec{e}_n + \left(\frac{\widehat{b}_{n+1}}{c_{n+1}^2} - \frac{\widehat{a}_{n+1}}{c_{n+1}c_{n+2}} - \frac{\widehat{a}_n}{c_n c_{n+1}}\right)\vec{e}_{n+1} +$$
$$+ \frac{\widehat{a}_{n+1}}{c_{n+1}c_{n+2}}\vec{e}_{n+2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

де $c_{-1} := 1$, $\widehat{a}_{-1} := 0$. Із (17) і (19) видно, що матриці $\mathbf{J}_3$ і $\mathbf{J}_5$ мають вигляд (5) і (6) відповідно. Їхні елементи задаються співвідношеннями (11) і (12). Визначимо поліноми p_n за формулою (9). Тоді $p_0 = 1$, а p_1 можна обчислити безпосередньо, що приводить до $\widetilde{\alpha}$ і $\widetilde{\beta}$ з (10). Із (14) випливає, що p_n є асоційованими для жмутка якобієвого типу $\left(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_5, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right)$.

Теорему 1 доведено.

Нагадаємо, що многочлени Якобі

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

є ортогональними на $[-1, 1]$ відносно ваги $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ [2]. Ортонормовані многочлени мають вигляд

$$\widehat{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{\alpha+\beta+1}\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)}},$$
$$\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Многочлени $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ і $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ є розв'язками диференціального рівняння

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0. \tag{20}$$

Нехай $c > 0$ — довільне додатне число. Запишемо рівняння (20) у вигляді

$$D_{\alpha,\beta,c}y(x) = l_{n,c}y(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

де

$$D_{\alpha,\beta,c} := (x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + [(\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta]\frac{d}{dx} + c, \tag{22}$$
$$l_{n,c} := c + n(n+\alpha+\beta+1). \tag{23}$$

Тут для наших цілей буде важливим, що $l_{n,c}$ є додатними. Взагалі, співвідношення (21)–(23) можна записати і для всіх дійсних значень параметра. Визначимо поліноми

$$P_n(\alpha, \beta, c, t_0; x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l_{k,c}}\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t_0)\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

де $t_0 \geq 1$ — довільний параметр. Оскільки $\dfrac{1}{l_{k,c}}\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t_0) > 0$, то $P_n(\alpha,\beta,c,t_0;x)$ — модифіковані ядерні поліноми типу (4). Зазначимо, що нормовані через власні значення поліноміальні ядра деяких *соболевських ортогональних поліномів* виникали раніше (див. [12]). Маємо

$$D_{\alpha,\beta,c}P_n(\alpha,\beta,c,t_0;x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t_0)\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x) =: p_n(\alpha,\beta,t_0;x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Поліноми $p_n(\alpha,\beta,t_0;x)$ є звичайними ядерними поліномами. Як зазначено у вступі, вони є ортогональними на $\mathbb{R}$. Таким чином, поліноми $P_n(\alpha,\beta,c,t_0;x)$ підходять для схеми дій зі статті [21, с. 3] (див. означення 1). Це означає, що $P_n(\alpha,\beta,c,t_0;x)$ є соболевськими ортогональними поліномами.

Випадок $t_0 = 1$ має додаткову перевагу. Справді, $p_n(\alpha,\beta,1;x)$ є кратним поліному Якобі з індексами $(\alpha+1,\beta)$. В цьому випадку диференціальне рівняння для $p_n(\alpha,\beta,1;x)$ разом з (25) дають диференціальне рівняння для $P_n(\alpha,\beta,c,1;x)$.

Теорема 2. *Нехай $\alpha,\beta > -1$, $c > 0$ і $t_0 \geq 1$ — довільні параметри. Поліноми $P_n(x) = P_n(\alpha,\beta,c,t_0;x)$, що задані співвідношенням* (24), *є соболевськими ортогональними многочленами на $\mathbb{R}$:*

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x), P_n'(x), P_n''(x)) M_{\alpha,\beta,c}(x) \begin{pmatrix} P_m(x) \\ P_m'(x) \\ P_m''(x) \end{pmatrix} (t_0 - x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx =$$

$$= A_n \delta_{n.m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+,$$

де A_n — деякі додатні числа і

$$M_{\alpha,\beta,c} = \begin{pmatrix} c \\ (\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta \\ x^2 - 1 \end{pmatrix} \left(c, (\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta, x^2 - 1\right).$$

Для $P_n(\alpha,\beta,c,1;x)$ справджується диференціальне рівняння

$$D_{\alpha+1,\beta,0}D_{\alpha,\beta,c}P_n(\alpha,\beta,c,1;x) = l_{n,0}D_{\alpha,\beta,c}P_n(\alpha,\beta,c,1;x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

де $D_{\alpha,\beta,c}$, $l_{n,c}$ визначено так, як у (22), (23).

Доведення. Всі твердження теореми випливають із міркувань, наведених перед її формулюванням.

***Приклад* 1.** Розглянемо поліном вигляду

$$w_2(c;x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\widetilde{a}_k}{\widetilde{b}_k + c}\widetilde{g}_k(x), \qquad c > 0, \tag{27}$$

де $\widetilde{a}_k > 0$, $\widetilde{b}_k \geq 0$, а $\widetilde{g}_k$ — дійсний поліном степеня k з додатним старшим коефіцієнтом, $k = 0,1,2$. Многочлен $P_2(\alpha,\beta,c,t_0;x)$ із деякими фіксованими допустимими параметрами α,β,t_0 має вигляд (27). Інший многочлен вигляду (27) буде наведено нижче. Нехай

$$\widetilde{g}_k = \sum_{j=0}^{k} \mu_{k;j}x^j, \qquad k = 0,1,2, \tag{28}$$

з $\mu_{k;j} \in \mathbb{R},\ \mu_{k;k} > 0$. Підставивши $\widetilde{g}_k$ з (28) у (27), отримаємо

$$w_2(c;x) = \frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;2}x^2 + \left(\frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{b}_1 + c}\mu_{1;1} + \frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;1}\right)x +$$
$$+ \frac{\widetilde{a}_0}{\widetilde{b}_0 + c}\mu_{0;0} + \frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{b}_1 + c}\mu_{1;0} + \frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;0}.$$

Дискримінант D останнього квадратичного рівняння дорівнює

$$D = \left(\frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{b}_1 + c}\mu_{1;1} + \frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;1}\right)^2 -$$
$$- 4\frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;2}\left(\frac{\widetilde{a}_0}{\widetilde{b}_0 + c}\mu_{0;0} + \frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{b}_1 + c}\mu_{1;0} + \frac{\widetilde{a}_2}{\widetilde{b}_2 + c}\mu_{2;0}\right). \tag{29}$$

У випадку $P_2(\alpha, \beta, c, t_0; x)$ маємо $\widetilde{b}_0 = 0$, тоді як $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2 > 0$. Отже, для деяких малих додатних значень c дискримінант D є від'ємним. Таким чином, поліноми $P_n(\alpha, \beta, c, t_0; x)$ (для деяких малих значень c) не є ортогональними многочленами на дійсній осі.

Нагадаємо, що (узагальнені) многочлени Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n+\alpha}{n}\, {}_1F_1\left(-n; \alpha+1; x\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

ортогональні на $[0, +\infty)$ відносно ваги $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ [2]. Ортонормовані многочлени $\widehat{L}_n^\alpha(x)$ мають вигляд

$$\widehat{L}_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}} L_n^\alpha(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Многочлени $L_n^\alpha(x)$ задовольняють диференціальне рівняння

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' = -ny. \tag{30}$$

Поліноми

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{L}_n(\alpha; x) := \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}} L_n^\alpha(-x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

є ортонормованими на $(-\infty, 0]$ відносно ваги $(-x)^\alpha e^x$ (див. [17], розділ 2.3). Використовуючи (30), отримуємо, що $\mathcal{L}_n(x)$ є розв'язками диференціального рівняння

$$x\mathcal{L}_n''(x) + (\alpha + 1 + x)\mathcal{L}_n'(x) = n\mathcal{L}_n(x). \tag{31}$$

Нехай знову $c > 0$ — довільне додатне число. Рівняння (31) запишемо у вигляді

$$D_{\alpha,c}\mathcal{L}_n(x) = \lambda_{n,c}\mathcal{L}_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$D_{\alpha,c} := x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1+x)\frac{d}{dx} + c, \tag{32}$$

$$\lambda_{n,c} := c + n. \tag{33}$$

Зауважимо, що $\lambda_{n,c}$ є додатними. Визначимо поліноми

$$L_n(\alpha,c,t_0;x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_{k,c}} \mathcal{L}_k(\alpha;t_0)\mathcal{L}_k(\alpha;x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{34}$$

де $t_0 \geq 0$ — довільний параметр. Оскільки $\dfrac{1}{\lambda_{k,c}}\mathcal{L}_k(\alpha;t_0) > 0$, то $L_n(\alpha,c,t_0;x)$ є модифікованими ядерними поліномами типу (4). Ми можемо записати

$$D_{\alpha,c}L_n(\alpha,c,t_0;x) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k(\alpha;t_0)\mathcal{L}_k(\alpha;x) =: p_n(\alpha,t_0;x), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Многочлени $p_n(\alpha,t_0;x)$ — звичайні ядерні поліноми. Оскільки $t_0 \geq 0$, вони є ортогональними на дійсній осі. Поліноми $L_n(\alpha,c,t_0;x)$ потрапляють у згадувану вище схему з [21] і, отже, $L_n(\alpha,c,t_0;x)$ — соболевські ортогональні поліноми.

Розглянемо випадок $t_0 = 0$. У цьому випадку $p_n(\alpha,0;x)$ є скалярним кратним $\mathcal{L}_n(\alpha+1;x)$. Диференціальне рівняння для $p_n(\alpha,0;x)$ разом із (31) дають диференціальне рівняння для $L_n(\alpha,c,0;x)$.

Теорема 3. *Нехай $\alpha > -1$, $c > 0$ і $t_0 \geq 0$ — довільні параметри. Поліноми $L_n(x) = L_n(\alpha,c,t_0;x)$, визначені співвідношенням* (34), *є соболевськими ортогональними поліномами на $\mathbb{R}$:*

$$\int_{-\infty}^{0} (L_n(x), L_n'(x), L_n''(x)) M_{\alpha,c}(x) \begin{pmatrix} L_m(x) \\ L_m'(x) \\ L_m''(x) \end{pmatrix} (t_0 - x)(-x)^{\alpha} e^{x} dx =$$

$$= B_n \delta_{n.m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+,$$

де B_n — деякі додатні числа і

$$M_{\alpha,c} = \begin{pmatrix} c \\ \alpha+1+x \\ x \end{pmatrix} (c, \alpha+1+x, x).$$

Для $L_n(\alpha,c,0;x)$ справджується диференціальне рівняння

$$D_{\alpha+1,0}D_{\alpha,c}L_n(\alpha,c,0;x) = \lambda_{n,0}D_{\alpha,c}L_n(\alpha,c,0;x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $D_{\alpha,c}$ і $\lambda_{n,c}$ визначені формулами (32) *і* (33). *Для довільного $x < 0$ і $c \in \mathbb{N}$ поліноми $L_n(\alpha,c,0;x)$ мають інтегральне зображення*

$$L_n(\alpha,c,0;x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)n!} e^{-x}(-x)^{-\frac{\alpha}{2}} *$$

$$* \int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-c} \theta^{n+c-1} J_{\alpha}\left(2\sqrt{-tx}\right) {}_2F_0\left(-n,1;-;-\frac{1}{\theta}\right) d\theta dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{35}$$

Доведення. Всі твердження теореми, окрім останнього, випливають із міркувань, наведених перед її формулюванням. Зафіксуємо довільне $\alpha > -1,\ c \in \mathbb{N}$. Використовуючи означення $L_n(\alpha, c, 0; x), \mathcal{L}_k(\alpha; t_0)$ і значення $L_n^\alpha(0) = \dfrac{(\alpha+1)_n}{n!}$, отримуємо

$$L_n(\alpha, c, 0; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+c} L_k^\alpha(-x).$$

Якщо $x < 0$, то (див. [16, с. 206])

$$L_n^\alpha(-x) = \frac{1}{n!} e^{-x} (-x)^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{-tx}\right) dt.$$

Отже,

$$L_n(\alpha, c, 0; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-x} (-x)^{-\frac{\alpha}{2}} *$$

$$* \int\limits_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+c} \frac{t^k}{k!} \right) e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{-tx}\right) dt, \qquad x < 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{36}$$

Розглянемо поліноми

$$f_n(t) = f_n(c; t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+c} \frac{t^k}{k!}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що

$$(f_n(t) t^c)' = t^{c-1} \widetilde{f}_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{37}$$

де

$$\widetilde{f}_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Многочлен $\widetilde{f}_n(t)$ має зображення

$$\widetilde{f}_n(t) = \frac{1}{n!} t^n {}_2F_0\left(-n, 1; -; -\frac{1}{t}\right), \tag{38}$$

де при $t = 0$ ми розуміємо граничне значення. Співвідношення (38) можна перевірити через запис ${}_2F_0(\ldots)$ у вигляді ряду, що обривається, при заміні індексу суми. Інтегруючи (37) і використовуючи (38), бачимо, що

$$f_n(t) = \frac{1}{n!} t^{-c} \int\limits_0^t \theta^{n+c-1} {}_2F_0\left(-n, 1; -; -\frac{1}{\theta}\right) d\theta, \qquad t > 0. \tag{39}$$

Далі, використовуючи (39) і (36), одержуємо потрібне інтегральне зображення (35). Зазначимо, що при $t = 0$ формула (39) не є правильною, проте на значення інтеграла в (35) це не впливає.

Теорему 3 доведено.

***Приклад* 2.** Розглянемо многочлен

$$L_2(\alpha, c, t_0; x) := \sum_{k=0}^{2} \frac{\mathcal{L}_k(\alpha; t_0)}{k+c} \mathcal{L}_k(\alpha; x).$$

Він має вигляд (27). Тут $\widetilde{b}_0 = 0$ і $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2 > 0$. Таким чином, для деяких малих додатних значень c дискримінант D з (29) є від'ємним. Отже, многочлени $L_n(\alpha, c, t_0; x)$ (принаймні для деяких значень c) не є ортогональними многочленами на дійсній осі.

***Зауваження* 1.** У формулах (24), (34) замість $\dfrac{1}{l_{k,c}}$, $\dfrac{1}{\lambda_{k,c}}$ можна взяти степені або навіть додатні поліноми $r(x)$ від цих виразів. Потім можна застосувати поліном r від відповідного диференціального оператора $D_{\alpha,\beta,c}$ або $D_{\alpha,c}$ до многочленів з (24), (34) і далі діяти подібним чином.

Розглянемо многочлени $P_n(\alpha, \beta, c, 1; x)$ (див. (24)) з $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$. Позначимо через

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in [-1, 1],$$

многочлени Чебишова першого роду. Ортонормовані многочлени мають вигляд [16]

$$\widehat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \widehat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{40}$$

Тоді

$$t_n(c; x) = t_n(x) := P_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, c, 1; x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + c} T_k(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad c > 0; \quad x \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Тут ми використали співвідношення (24), (40) і рівність $T_k(1) = 1$. Зображення (41) показує, що

$$|t_n(c; x)| \leq \frac{1}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad c > 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Оскільки [16, c. 91]

$$|T_n'(x)| \leq n^2, \qquad x \in [-1, 1],$$

то

$$|t_n'(c; x)| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{c + k^2} \leq \frac{2}{\pi} n, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad c > 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Зазначимо, що

$$\pi t_1(c; x) = \frac{1}{c} + \frac{2}{c+1} x,$$

$$\pi t_2(c; x) = \frac{4}{c+4} x^2 + \frac{2}{c+1} x + \frac{1}{c} - \frac{2}{c+4}.$$

Корінь t_1 є $x_1 = -\dfrac{c+1}{2c} \to -\dfrac{1}{2}$ при $c \to +\infty$. Ми бачимо, що він не повинен лежати в $[-1, 1]$ при малих значеннях c. Корені t_2 можуть бути недійсними при малих c. Інші властивості поліномів $t_n(c; x)$ також є цікавими для подальших досліджень.

Література

1. N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner Publ. Co., New York (1965).
2. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vols. I, II, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York etc. (1953).
3. T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Math. and its Appl., Vol. 13, Gordon and Breach Sci. Publ., New York etc. (1978).
4. A. E. Choque Rivero, S. M. Zagorodnyuk, *Orthogonal polynomials on rays: Christoffel's formula*, Bol. Soc. Mat. Mex., **15**, № 3, 149 – 164 (2009).
5. R. S. Costas-Santos, J. J. Moreno-Balcázar, *The semiclassical Sobolev orthogonal polynomials: a general approach*, J. Approx. Theory, **163**, № 1, 65 – 83 (2011).
6. A. J. Durán, W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher-order recurrence relations*, Linear Algebra and Appl., **219**, 261 – 280 (1995).
7. W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett, A. Ronveaux, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **26**, № 2, 446 – 467 (1995).
8. G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Oxford etc. (1971).
9. M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia Math. and Appl., **98**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
10. J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, *On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., **350**, № 1, 347 – 393 (1998).
11. R. Koekoek, H. G. Meijer, *A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24**, № 3, 768 – 782 (1993).
12. L. L. Littlejohn, J. F. Mañas-Mañas, J. J. Moreno-Balcázar, R. Wellman, *Differential operator for discrete Gegenbauer – Sobolev orthogonal polynomials: eigenvalues and asymptotics*, J. Approx. Theory, **230**, 32 – 49 (2018).
13. F. Marcellán, Y. Xu, *On Sobolev orthogonal polynomials*, Expo. Math., **33**, № 3, 308 – 352 (2015).
14. G. V. Milovanović, *Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications*, Proc. Fourth Intern. Conf. Funct. Anal. and Approx. Theory, vol. I (Potenza, 2000), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., № 68, part I, 65 – 94 (2002).
15. P. G. Nevai, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **18**, № 213 (1979).
16. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, 3-е изд., Физматлит, Москва (2005).
17. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, fourth ed., Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1975).
18. С. М. Загороднюк, *Ортогональные многочлены, ассоциированные с некоторыми пучками якобиевого типа*, Укр. мат. журн., **68**, № 9, 1180 – 1190 (2016).
19. S. M. Zagorodnyuk, *The inverse spectral problem for Jacobi-type pencils*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods and Appl., **13**, Paper 085 (2017), 16 p.
20. S. M. Zagorodnyuk, *Difference equations related to Jacobi-type pencils*, J. Difference Equat. and Appl., **24**, № 10, 1664 – 1684 (2018).
21. S. M. Zagorodnyuk, *On some classical type Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **250**, Article 105337 (2020).
22. S. M. Zagorodnyuk, *On some Sobolev spaces with matrix weights and classical type Sobolev orthogonal polynomials*, J. Difference Equat. and Appl., **27**, № 2, 261 – 283 (2021).
23. A. Zhedanov, *Biorthogonal rational functions and the generalized eigenvalue problem*, J. Approx. Theory, **101**, № 2, 303 – 329 (1999).

Одержано 15.01.21