DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6507

УДК 517.5

Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка;
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ)

МЕЖОВЕ ПРОДОВЖЕННЯ ВІДОБРАЖЕНЬ З ОБЕРНЕНОЮ НЕРІВНІСТЮ ПОЛЕЦЬКОГО ПО ПРОСТИХ КІНЦЯХ

For mappings with branching points that satisfy the Poletsky inverse inequality, we obtain some results related to their continuous boundary extension in terms of prime ends. Under certain conditions, the specified classes of mappings are also equicontinuous in the closure of a given domain.

Для відображень із розгалуженням, які задовольняють обернену нерівність Полецького, отримано результати про їхнє неперервне межове продовження в термінах простих кінців. За певних умов вказані класи відображень є також одностайно неперервними в замиканні заданої області.

1. Вступ. Дану статтю присвячено подальшому розвитку теорії відображень методом модулів у межах загальної геометричної теорії функцій (див., наприклад, [1 – 5]). У роботах [6 – 8] отримано неперервне продовження на межу й одностайну неперервність гомеоморфізмів, обернені до яких задовольняють певну оцінку спотворення модуля сімей кривих. Тут розглянуто області з поганими межами, відносно яких відображення не має звичайного неперервного продовження, але має його в сенсі так званих простих кінців. Основна ідея даної статті полягає в доведенні аналогічних тверджень не тільки для гомеоморфізмів, а й для доволі широкого класу відображень із розгалуженням. Умови на відображення сформульовано таким чином, щоб основні твердження робіт [6 – 8] можна було інтерпретувати як наслідки з отриманих далі результатів. Зауважимо, що отримати нові результати по аналогії з попередніми неможливо, оскільки їхня методологія істотно спиралася на наявність у відображення оберненого до нього. З приводу неперервного продовження квазіконформних відображень і їхніх узагальнень по простих кінцях див., наприклад, [9 – 12].

Наведемо деякі означення. Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}, \tag{1}$$
$$B(y_0, r) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| < r\big\}, \qquad S(y_0, r) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| = r\big\}.$$

Якщо $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{y\in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \le \int\limits_{f(D)\cap A(y_0,r_1,r_2)} Q(y)\eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \tag{2}$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geq 1. \tag{3}$$

Зауважимо, що нерівності (2) добре відомі в теорії квазірегулярних відображень і виконуються для них при $Q = N(f,D)K$, де $N(f,D)$ — максимальна кратність відображення f в D, а $K \geq 1$ — деяка стала, яку можна обчислити як $K = \operatorname{ess\,sup} K_O(x,f)$, $K_O(x,f) = \|f'(x)\|^n/|J(x,f)|$ при $J(x,f) \neq 0$, $K_O(x,f) = 1$ при $f'(x) = 0$ і $K_O(x,f) = \infty$ при $f'(x) \neq 0$, але $J(x,f) = 0$ (див., наприклад, [13], теорема 3.2, або [14], теорема 6.7.II). Відображення $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на область D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., наприклад, [15], розд. 3).

Нехай ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Неперервне відображення $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ називається *k-вимірною поверхнею* в $\mathbb{R}^n$. *Поверхнею* будемо називати довільну $(n-1)$-вимірну поверхню σ в $\mathbb{R}^n$. Поверхня σ називається *жордановою поверхнею*, якщо $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ при $x \neq y$. Далі ми іноді будемо використовувати σ для позначення всього образу $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при відображенні σ, $\overline{\sigma}$ замість $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\sigma$ замість $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхня $\sigma\colon \omega \to D$ в області D називається *розрізом* області D, якщо σ розділяє D, тобто $D \setminus \sigma$ має більше однієї компоненти, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ і $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Послідовність $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ розрізів області D називається *ланцюгом*, якщо:

(i) множина σ_{m+1} міститься в точності в одній компоненті d_m множини $D \setminus \sigma_m$, при цьому $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$;

(ii) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} d_m = \varnothing$.

З означення ланцюга розрізів випливає, що $d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \ldots \supset d_{m-1} \supset d_m \supset d_{m+1} \supset \ldots$. Два ланцюги розрізів $\{\sigma_m\}$ і $\{\sigma'_k\}$ називаються *еквівалентними*, якщо для кожного $m = 1, 2, \ldots$ область d_m містить всі області d'_k, за винятком скінченної кількості, і для кожного $k = 1, 2, \ldots$ область d'_k також містить всі області d_m, за винятком скінченної кількості.

Кінець області D — це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області D. Нехай K — кінець області D в $\mathbb{R}^n$, тоді множина $I(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ називається *тілом кінця* K. Скрізь далі, як зазвичай, $\Gamma(E,F,D)$ позначає сім'ю всіх таких кривих $\gamma\colon [a,b] \to D$, що $\gamma(a) \in E$ і $\gamma(b) \in F$, крім того, $M(\Gamma)$ позначає модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$, а запис $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ означає, що функція ρ борелева, невід'ємна і має довжину, не меншу за одиницю в метриці ρ (див. [12, 16]). Наслідуючи [12], будемо говорити, що кінець K є *простим кінцем*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ такий, що $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$ при всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\lim_{m\to\infty} M\big(\Gamma(C, \sigma_m, D)\big) = 0$ для деякого континуума C в D. Далі будемо використовувати такі позначення: множина простих кінців, що відповідають області D, позначається символом E_D, а поповнення області D її простими кінцями — символом $\overline{D}_P$. Будемо говорити, що межа області D в $\mathbb{R}^n$ є *локально квазіконформною*, якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U в $\mathbb{R}^n$, який можна відобразити квазіконформним відображенням φ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ так, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною. Для множин $E \subset \mathbb{R}^n$ і $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо

$$d(E) := \sup_{x,y \in E} |x-y|, \qquad d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} |x-y|.$$

Наведемо таке означення (див. [10, 11]). Будемо називати ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ *регулярним*, якщо $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \varnothing$ при кожному $m \in \mathbb{N}$ і, крім того, $d(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Якщо кінець K містить принаймні один регулярний ланцюг, то K будемо називати *регулярним*. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$, крім того, кожен простий кінець $P \subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що у просторі $\mathbb{R}^n$ кожний простий кінець регулярної області містить ланцюг розрізів із властивістю $d(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$ і, навпаки, якщо кінець має вказану властивість, то він є простим (див. [17], лема 3.1, а також [12], теорема 5.1). Крім того, замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому якщо $g: D_0 \to D$ — квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x, y \in \overline{D}_P$ покладемо

$$\rho(x,y) := \left|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\right|, \tag{4}$$

де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на [17] (теорема 2.1) (див. також [12], теорема 4.1). Зокрема, будемо говорити, що послідовність $x_m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, *збігається* до простого кінця $P \in E_D$ при $m \to \infty$, якщо для будь-якого натурального $k \in \mathbb{N}$ всі елементи послідовності x_m, крім скінченної кількості, належать області d_k (де d_k, $k = 1, 2, \ldots$, — послідовність вкладених областей з означення простого кінця P). Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж самої точки такий, що $M\big(\Gamma(E, F, D)\big) > P$ для будь-яких континуумів $E, F \subset D$, які перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D. Справедливим є такий результат.

Теорема 1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабко плоску межу, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ є регулярною. Припустимо, що f — відкрите дискретне і замкнене відображення області D на D', що задовольняє співвідношення* (2) *в кожній точці $y_0 \in D'$, де $Q \in L^1(D')$. Тоді відображення f має неперервне продовження до відображення $\overline{f}: \overline{D} \to \overline{D'}_P$, причому $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}_P$.*

Справедливим також є результат про одностайну неперервність сімей відображень вигляду (2) в замиканні даної області. З метою формулювання відповідного результату розглянемо такі означення. Нехай h — хордальна відстань в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (див., наприклад, означення 12.1 в [16]). У подальшому для множин $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо $h(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} h(x,y)$, $h(A) = \sup_{x,y \in A} h(x,y)$. Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, континуума $A \subset D'$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q: D' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (2) для кожного $y_0 \in D'$, і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geq \delta$. Справджується таке твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що область D має слабко плоску межу. Якщо $Q \in L^1(D')$ і область D' є регулярною, то будь-яке $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ неперервно продовжується до відображення $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}_P$, причому $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}_P$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$, яка складається з усіх продовжених відображень $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}_P$, одностайно неперервна в $\overline{D}$.*

Зауважимо, що для випадку гарних меж теореми 1 і 2 доведено в роботі [18] (теореми 1.1 і 1.2), а для випадку гомеоморфізмів — у [8] (теорема 1.1).

2. Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільним чином точку $x_0 \in \partial D$. Необхідно показати можливість неперервного продовження відображення f в точку x_0. Використовуючи при необхідності мебіусове перетворення $\varphi\colon \infty \mapsto 0$ і враховуючи інваріантність модуля M у лівій частині співвідношення (2) (див. [16], теорема 8.1), можемо вважати, що $x_0 \neq \infty$.

Припустимо, що висновок про неперервне продовження відображення f в точку x_0 не є правильним. Тоді будь-який простий кінець $P_0 \in E_{D'}$ не є границею f в точці x_0, тобто знайдуться послідовність $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ і число $\varepsilon_0 > 0$ такі, що $\rho(f(x_k), P_0) \geq \varepsilon_0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, де ρ — одна з метрик у (4). Оскільки за умовою область D' є регулярною, її можна відобразити на обмежену область D_* з локально квазіконформною межею за допомогою деякого квазіконформного відображення $h\colon D' \to D_*$. Оскільки між точками межі областей з локально квазіконформними межами і їхніми простими кінцями є взаємно однозначна відповідність (див. [17], теорема 2.1, а також [12], теорема 4.1) і за умовою $\overline{D}_*$ є компактом в $\mathbb{R}^n$, метричний простір $(\overline{D'}_P, \rho)$ є компактним. Отже, можна вважати, що $f(x_k)$ збігається до якогось елемента $P_1 \neq P_0$, $P_1 \in \overline{D'}_P$ при $k \to \infty$. Оскільки, за припущенням, відображення f не має границі в точці x_0, існує принаймні ще одна послідовність $y_k \to x_0$ при $k \to \infty$ така, що $\rho(f(y_k), P_1) \geq \varepsilon_1$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ і деякому $\varepsilon_1 > 0$. Знову-таки, оскільки метричний простір $(\overline{D'}_P, \rho)$ є компактним, можемо вважати, що $f(y_k) \to P_2$ при $k \to \infty$, $P_1 \neq P_2$, $P_2 \in \overline{D'}_P$. Оскільки відображення f замкнене, воно зберігає межу області (див. [15], теорема 3.3). Отже, $P_1, P_2 \in E_{D'}$.

Нехай σ_m і σ'_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, — послідовності розрізів, які відповідають простим кінцям P_1 і P_2 відповідно. Нехай також розрізи σ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, лежать на сферах $S(z_0, r_m)$ із центром у деякій точці $z_0 \in \partial D'$, де $r_m \to 0$ при $m \to \infty$ (така послідовність σ_m існує за лемою 3.1 [17], див. також [11], лема 1). Нехай d_m і g_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, — відповідні послідовності областей в D', що відповідають розрізам σ_m і σ'_m відповідно. З огляду на те, що простір $(\overline{D'}_P, \rho)$ є метричним, можна вважати, що всі d_m і g_m не перетинаються між собою для кожного $m = 0, 1, 2, \ldots$, зокрема

$$d_0 \cap g_0 = \varnothing. \tag{5}$$

Оскільки $f(x_k)$ збігається до P_1 при $k \to \infty$, то для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує $k = k(m)$: $f(x_k) \in d_m$ при $k \geq k = k(m)$. Шляхом перенумерації послідовності x_k в разі необхідності ми можемо досягти того, щоб $f(x_k) \in d_k$ при кожному натуральному k. Аналогічно, можна вважати, що $f(y_k) \in g_k$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо точки $f(x_1)$ і $f(y_1)$. Оскільки, за означенням простого кінця, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} d_k = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} g_l = \varnothing$, існують номери k_1 і $k_2 \in \mathbb{N}$ такі, що $f(x_1) \notin d_{k_1}$ і $f(y_1) \notin g_{k_2}$. Зважаючи на те, що, за означенням, послідовності областей $d_k \subset d_{k_0}$ при всіх $k \geq k_1$ і $g_k \subset g_{k_2}$ при $k \geq k_2$, маємо

$$f(x_1) \notin d_k, \quad f(y_1) \notin g_k, \quad k \geq \max\{k_1, k_2\}. \tag{6}$$

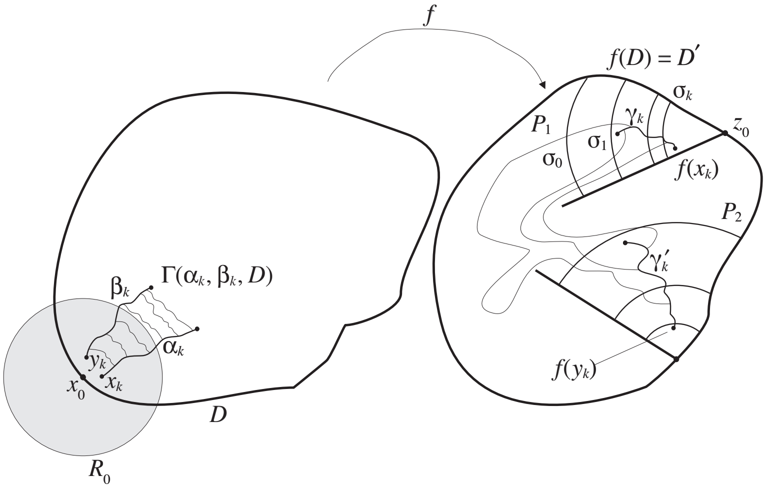

Рис. 1

Нехай γ_k — крива, що з'єднує $f(x_1)$ і $f(x_k)$ в області d_1, а γ'_k — крива, що з'єднує $f(y_1)$ і $f(y_k)$ в області g_1. Нехай також α_k і β_k — повні f-підняття кривих γ_k і γ'_k в області D з початком у точках x_k і y_k відповідно (такі підняття існують за лемою 3.7 [15], див. рис. 1). Зауважимо, що у точок $f(x_1)$ і $f(y_1)$ в області D може бути не більше скінченного числа прообразів при відображенні f (див. [15], лема 3.2). Тоді знайдеться таке $R_0 > 0$, що $\alpha_k(1), \beta_k(1) \in D \setminus B(x_0, R_0)$ при всіх $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки межа області D є слабко плоскою, для кожного $P > 0$ знайдеться таке $k = k_P \geq 1$, що

$$M(\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)) > P \quad \forall k \geq k_P. \tag{7}$$

Покажемо, що умова (7) суперечить (2). Справді, нехай $\gamma \in \Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)$, тоді $\gamma\colon [0,1] \to D$, $\gamma(0) \in |\alpha_k|$ і $\gamma(1) \in |\beta_k|$. Зокрема, $f(\gamma(0)) \in |\gamma_k|$ і $f(\gamma(1)) \in |\gamma'_k|$. В такому випадку зі співвідношень (5) і (7) випливає, що $|f(\gamma)| \cap d_1 \neq \varnothing \neq |f(\gamma)| \cap (D' \setminus d_1)$ при $k \geq \max\{k_1, k_2\}$. З огляду на теорему 1.I.5.46 [19] $|f(\gamma)| \cap \partial d_1 \neq \varnothing$, тобто $|f(\gamma)| \cap S(z_0, r_1) \neq \varnothing$, бо $\partial d_1 \cap D' \subset \sigma_1 \subset S(z_0, r_1)$ за визначенням розрізу σ_1. Нехай $t_1 \in (0,1)$ таке, що $f(\gamma(t_1)) \in S(z_0, r_1)$ і $f(\gamma)|_1 := f(\gamma)|_{[t_1, 1]}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $f(\gamma)|_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus B(z_0, r_1)$. Міркуючи так само для кривої $f(\gamma)|_1$, можна знайти таку точку $t_2 \in (t_1, 1)$, що $f(\gamma(t_2)) \in S(z_0, r_0)$. Покладемо $f(\gamma)|_2 := f(\gamma)|_{[t_1, t_2]}$. Тоді крива $f(\gamma)|_2$ є підкривою кривої $f(\gamma)$ і, крім того, $f(\gamma)|_2 \in \Gamma(S(z_0, r_1), S(z_0, r_0), D')$. Без обмеження загальності можна вважати, що $f(\gamma)|_2 \subset B(z_0, r_0)$. Тоді $\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D) > \Gamma_f(z_0, r_1, r_0)$. З останнього співвідношення по міноруванню модуля (див., наприклад, [20], теорема 1(c)) маємо

$$M(\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)) \leq M(\Gamma_f(z_0, r_1, r_0)). \tag{8}$$

Покладемо $\eta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_0 - r_1}, & t \in [r_1, r_0], \\ 0, & t \notin [r_1, r_0]. \end{cases}$ Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (3) при $r_1 := r_1$ і $r_2 := r_0$. Тоді з (2) і (8) отримуємо

$$M(\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)) \leq \frac{1}{(r_0 - r_1)^n} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) := c < \infty \quad \forall k \geq \max\{k_1, k_2\}, \tag{9}$$

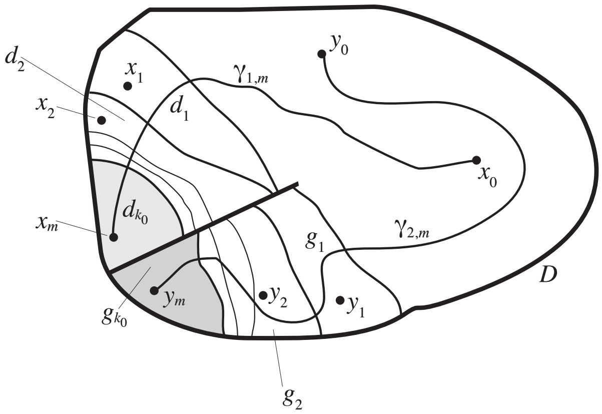

Рис. 2

оскільки $Q \in L^1(D')$. Співвідношення (9) суперечить умові (7). Отримана суперечність спростовує припущення про відсутність границі відображення f в точці x_0.

Залишилось перевірити рівність $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}_P$. Очевидно, що $\overline{f}(\overline{D}) \subset \overline{D'}_P$. Покажемо, що $\overline{D'}_P \subset \overline{f}(\overline{D})$. Справді, нехай $y_0 \in \overline{D'}_P$, тоді або $y_0 \in D'$, або $y_0 \in E_{D'}$. Якщо $y_0 \in D'$, то $y_0 = f(x_0)$ і $y_0 \in \overline{f}(\overline{D})$, оскільки за умовою f — відображення області D на D'. Нарешті, нехай $y_0 \in E_{D'}$, тоді внаслідок регулярності області D' знайдеться така послідовність $y_k \in D'$, що $\rho(y_k, y_0) \to 0$ при $k \to \infty$, $y_k = f(x_k)$ і $x_k \in D$, де ρ — одна з можливих метрик у $\overline{D'}_P$. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ можемо вважати, що $x_k \to x_0$, де $x_0 \in \overline{D}$. Зазначимо, що $x_0 \in \partial D$, оскільки відображення f є відкритим. Тоді $f(x_0) = y_0 \in \overline{f}(\partial D) \subset \overline{f}(\overline{D})$.

Теорему 1 доведено.

3. Допоміжні леми. Наступну лему доведено у [8] (лема 2.1, див. також [7], лема 2.1).

Лема 1. *Нехай $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — регулярна область і $x_m \to P_1$, $y_m \to P_2$ при $m \to \infty$, $P_1, P_2 \in \overline{D'}_P$, $P_1 \neq P_2$. Припустимо, що d_m, g_m, $m = 1, 2, \ldots$, — дві послідовності спадних областей, які відповідають P_1 і P_2, $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \in D' \setminus (d_1 \cup g_1)$. Тоді існують як завгодно великі номери $k_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 = M_0(k_0) \in \mathbb{N}$ і $0 < t_1 = t_1(k_0)$, $t_2 = t_2(k_0) < 1$, для яких виконується така умова: для будь-якого $m \geq M_0$ знайдуться неперетинні криві*

$$\gamma_{1,m}(t) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(t), & t \in [0, t_1], \\ \widetilde{\alpha_m}(t), & t \in [t_1, 1], \end{cases} \qquad \gamma_{2,m}(t) = \begin{cases} \widetilde{\beta}(t), & t \in [0, t_2], \\ \widetilde{\beta_m}(t), & t \in [t_2, 1], \end{cases}$$

такі, що:

1) $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = x_m$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$ *і* $\gamma_{2,m}(1) = y_m$;

2) $|\gamma_{1,m}| \cap \overline{g_{k_0}} = \varnothing = |\gamma_{2,m}| \cap \overline{d_{k_0}}$;

3) $\widetilde{\alpha_m}(t) \in d_{k_0+1}$ *при* $t \in [t_1, 1]$ *і* $\widetilde{\beta_m}(t) \in g_{k_0+1}$ *при* $t \in [t_2, 1]$ (*див. рис.* 2).

Нехай $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ — криві з леми 1, а $|\gamma_{1,m}|$ і $|\gamma_{2,m}|$ — їхні образи в $\mathbb{R}^n$ відповідно. Наступне твердження доведено у [8] (лема 2.2) для випадку гомеоморфізмів.

Лема 2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, область D' є регулярною і f — відкрите, дискретне і замкнене відображення області D на D', яке задовольняє умову* (2) *в кожній точці $y_0 \in \overline{D'}$ і з деякою функцією $Q \in L^1(D')$. Нехай також d_m — послідовність спадних областей, які відповідають ланцюгу розрізів σ_m, $m = 1, 2, \ldots$, що лежать на сферах $S(\overline{x_0}, r_m)$, і таких, що $\overline{x_0} \in \partial D'$, причому $r_m \to 0$ при $m \to \infty$. Тоді в умовах і позначеннях леми* 1 *можна вибрати номер $k_0 \in \mathbb{N}$, для якого існує $0 < N = N(k_0, Q, D') < \infty$, незалежне від m і f, таке, що*

$$M(\Gamma_m) \leq N, \quad m \geq M_0 = M_0(k_0),$$

де Γ_m *— сім'я кривих* $\gamma\colon [0,1] \to D$ *в області* D *таких, що* $f(\gamma) \in \Gamma\big(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D'\big)$.

Доведення. Нехай k_0 — довільний номер, для якого лема 1 є справедливою. За означенням кривої $\gamma_{1,m}$ і сім'ї Γ_m ми можемо записати, що

$$\Gamma_m = \Gamma_m^1 \cup \Gamma_m^2, \tag{10}$$

де Γ_m^1 — сім'я кривих $\gamma \in \Gamma_m$ таких, що $f(\gamma) \in \Gamma\big(|\widetilde{\alpha}|, |\gamma_{2,m}|, D'\big)$, і Γ_m^2 — сім'я кривих $\gamma \in \Gamma_m$ таких, що $f(\gamma) \in \Gamma\big(|\widetilde{\alpha}_m|, |\gamma_{2,m}|, D'\big)$.

Врахувавши позначення з леми 1, покладемо $\varepsilon_0 := \min\big\{\mathrm{dist}\,\big(|\widetilde{\alpha}|, \overline{g_{k_0}}\big), \mathrm{dist}\,\big(|\widetilde{\alpha}|, |\widetilde{\beta}|\big)\big\} > 0$. Розглянемо тепер покриття множини $|\widetilde{\alpha}|$ вигляду $\bigcup\limits_{x \in |\widetilde{\alpha}|} B(x, \varepsilon_0/4)$. Оскільки $|\widetilde{\alpha}|$ є компактом в D', знайдуться номери $i_1, \ldots, i_{N_0}$ такі, що $|\widetilde{\alpha}| \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(z_i, \varepsilon_0/4)$, де $z_i \in |\widetilde{\alpha}|$ при $1 \leq i \leq N_0$. З огляду на теорему 1.I.5.46 [19] можемо записати

$$\Gamma\big(|\widetilde{\alpha}|, |\gamma_{2,m}|, D'\big) > \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma\big(S(z_i, \varepsilon_0/4), S(z_i, \varepsilon_0/2), A(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2)\big). \tag{11}$$

Зафіксуємо $\gamma \in \Gamma_m^1$, $\gamma\colon [0,1] \to D$, $\gamma(0) \in |\widetilde{\alpha}|$, $\gamma(1) \in |\gamma_{2,m}|$. Зі співвідношення (11) випливає, що $f(\gamma)$ має підкриву $f(\gamma)_1 := f(\gamma)|_{[p_1,p_2]}$ таку, що

$$f(\gamma)_1 \in \Gamma\big(S(z_i, \varepsilon_0/4), S(z_i, \varepsilon_0/2), A(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2)\big)$$

при деякому $1 \leq i \leq N_0$. Тоді $\gamma|_{[p_1,p_2]}$ є такою кривою, яка, з одного боку, є підкривою γ, а з іншого — належить до сім'ї $\Gamma_f\big(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2\big)$, бо

$$f(\gamma|_{[p_1,p_2]}) = f(\gamma)|_{[p_1,p_2]} \in \Gamma\big(S(z_i, \varepsilon_0/4), S(z_i, \varepsilon_0/2), A(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2)\big).$$

Тому

$$\Gamma_m^1 > \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_f(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2). \tag{12}$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/\varepsilon_0, & t \in [\varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2], \\ 0, & t \notin [\varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2]. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція η задовольняє співвідношення (3). Тоді за визначенням відображення f у (2), а також за співвідношенням (12) і з огляду на напівадитивність модуля сімей кривих (див. [16], теорема 6.2) отримуємо

$$M(\Gamma_m^1) \leq \sum_{i=1}^{N_0} M(\Gamma_f(z_i, \varepsilon_0/4, \varepsilon_0/2)) \leq \sum_{i=1}^{N_0} \frac{N_0 4^n \|Q\|_1}{\varepsilon_0^n}, \quad m \geq M_0, \tag{13}$$

де $\|Q\|_1 = \displaystyle\int_{D'} Q(x)\,dm(x)$. Далі за теоремою 1.I.5.46 [19] $\Gamma_m^2 > \Gamma_f(\overline{x_0}, r_{k_0+1}, r_{k_0})$. Міркуючи так, як і вище, покладаємо

$$\eta(t) = \begin{cases} 1/(r_{k_0} - r_{k_0+1}), & t \in [r_{k_0+1}, r_{k_0}], \\ 0, & t \notin [r_{k_0+1}, r_{k_0}]. \end{cases}$$

Тоді з останнього співвідношення випливає, що

$$M(\Gamma_m^2) \le \frac{\|Q\|_1}{(r_{k_0} - r_{k_0+1})^n}, \quad m \ge M_0. \tag{14}$$

Отже, з (10), (13) і (14), внаслідок напівадитивності модуля сімей кривих, випливає, що

$$M(\Gamma_m) \le \left(\frac{N_0 4^n}{\varepsilon_0^n} + \frac{1}{(r_{k_0} - r_{k_0+1})^n}\right)\|Q\|_1, \quad m \ge M_0.$$

Права частина останнього співвідношення не залежить від m, тому ми можемо покласти $N := \left(\frac{N_0 4^n}{\varepsilon_0^n} + \frac{1}{(r_{k_0} - r_{k_0+1})^n}\right)\|Q\|_1.$

Лему 2 доведено.

4. Доведення теореми 2. Можливість неперервного продовження відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на межу області D випливає з теореми 1. Одностайну неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ у внутрішніх точках області D доведено у [18] (теорема 1.1).

Покажемо одностайну неперервність сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ на ∂D. Припустимо протилежне. Тоді знайдуться точка $z_0 \in \partial D$, число $\varepsilon_0 > 0$, послідовність $z_m \in \overline{D}$ і відображення $\overline{f}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такі, що $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$, при цьому

$$\rho(\overline{f}_m(z_m), \overline{f}_m(z_0)) \ge \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

де ρ — одна з можливих метрик в $\overline{D'}_P$, яку визначено в (4). Оскільки $f_m = \overline{f}_m|_D$ продовжується по неперервності на $\overline{D}$, можемо вважати, що $z_m \in D$ і, крім того, знайдеться ще одна послідовність $z'_m \in D$, $z'_m \to z_0$ при $m \to \infty$, така, що $\rho(f_m(z'_m), \overline{f}_m(z_0)) \to 0$ при $m \to \infty$. В такому випадку з (15) випливає, що

$$\rho\big(f_m(z_m), f_m(z'_m)\big) \ge \varepsilon_0/2, \quad m \ge m_0. \tag{16}$$

Оскільки область D' є регулярною, метричний простір $\overline{D'}_P$ є компактним. Отже, можна вважати, що послідовності $f_m(z_m)$ і $f_m(z'_m)$ збігаються при $m \to \infty$ до деяких елементів $P_1, P_2 \in \overline{D'}_P$, $P_1 \ne P_2$. Нехай d_m і g_m — послідовності спадних областей, які відповідають простим кінцям P_1 і P_2 відповідно. З огляду на лему 3.1 [17] (див. також [11], лема 1) можна вважати, що послідовність розрізів σ_m, яка відповідає областям d_m, $m = 1, 2, \ldots$, лежить на сферах $S(\overline{x_0}, r_m)$, де $\overline{x_0} \in \partial D'$ і $r_m \to 0$ при $m \to \infty$. Виберемо $x_0, y_0 \in A$ так, щоб $x_0 \ne y_0$ і $x_0 \ne P_1 \ne y_0$, де континуум $A \subset D'$ взято з умов теореми 2. Без обмеження загальності можна вважати, що $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \notin d_1 \cup g_1$.

За лемами 1, 2 знайдуться неперетинні криві $\gamma_{1,m} : [0,1] \to D'$ і $\gamma_{2,m} : [0,1] \to D'$ і число $N > 0$ такі, що $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = f_m(z_m)$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(1) = f_m(z'_m)$, причому

$$M(\Gamma_m) \le N, \quad m \ge M_0, \tag{17}$$

де Γ_m складається з тих і тільки тих кривих γ в D, для яких $f_m(\gamma) \in \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D')$ (див. рис. 3). З іншого боку, нехай $\gamma^*_{1,m}$ і $\gamma^*_{2,m}$ — повні підняття кривих $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ при

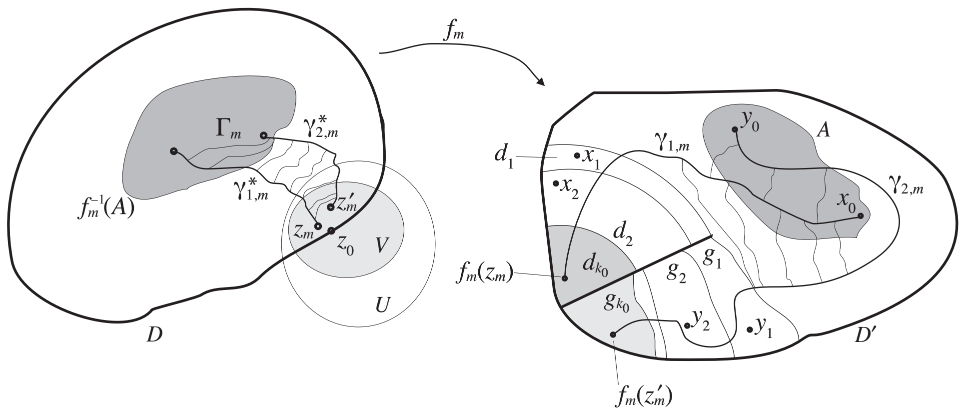

Рис. 3

відображенні f_m з початком у точках z_m і z'_m відповідно (такі підняття існують за лемою 3.7 [15]). Тоді $\gamma^*_{1,m}(1)\in f_m^{-1}(A)$ і $\gamma^*_{2,m}(1)\in f_m^{-1}(A)$ і, оскільки за умовою $h(f_m^{-1}(A),\partial D)>\delta>0$, $m=1,2,\ldots,$ будемо мати

$$\begin{gathered} h\big(|\gamma^*_{1,m}|\big)\geq h\big(z_m,\gamma^*_{1,m}(1)\big)\geq (1/2)h(f_m^{-1}(A),\partial D)>\delta/2,\\ h(|\gamma^*_{2,m}|)\geq h\big(z'_m,\gamma^*_{2,m}(1)\big)\geq (1/2)h(f_m^{-1}(A),\partial D)>\delta/2 \end{gathered}\tag{18}$$

для достатньо великих $m\in\mathbb{N}$. Виберемо кулю $U:=B_h(z_0,r_0)=\big\{z\in\overline{\mathbb{R}^n}: h(z,z_0)<r_0\big\}$, де $r_0>0$ і $r_0<\delta/4$. Зауважимо, що $|\gamma^*_{1,m}|\cap U\neq\varnothing\neq|\gamma^*_{1,m}|\cap(D\setminus U)$ для достатньо великих $m\in\mathbb{N}$, оскільки $h\big(f_m(|\gamma_{1,m}|)\big)\geq\delta/2$ і $z_m\in|\gamma^*_{1,m}|$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$. Міркуючи аналогічно, можна зробити висновок, що $|\gamma^*_{2,m}|\cap U\neq\varnothing\neq|\gamma^*_{2,m}|\cap(D\setminus U)$. Оскільки $|\gamma^*_{1,m}|$ і $|\gamma^*_{2,m}|$ є континуумами, з огляду на теорему 1.I.5.46 [19] отримуємо

$$|\gamma^*_{1,m}|\cap\partial U\neq\varnothing,\qquad |\gamma^*_{2,m}|\cap\partial U\neq\varnothing.\tag{19}$$

Зафіксуємо $P:=N>0$, де N — число зі співвідношення (17). Оскільки межа області D є слабко плоскою, знайдеться такий окіл $V\subset U$ точки z_0, що для будь-яких континуумів $E,F\subset D$ з умовами $E\cap\partial U\neq\varnothing\neq E\cap\partial V$ і $F\cap\partial U\neq\varnothing\neq F\cap\partial V$ виконується нерівність

$$M\big(\Gamma(E,F,D)\big)>N.\tag{20}$$

Зауважимо, що для достатньо великих $m\in\mathbb{N}$

$$|\gamma^*_{1,m}|\cap\partial V\neq\varnothing,\quad |\gamma^*_{2,m}|\cap\partial V\neq\varnothing.\tag{21}$$

Справді, $z_m\in|\gamma^*_{1,m}|$ і $z'_m\in|\gamma^*_{2,m}|$, де $z_m,z'_m\to z_0\in V$ при $m\to\infty$. Отже, $|\gamma^*_{1,m}|\cap V\neq$ $\neq\varnothing\neq|\gamma^*_{2,m}|\cap V$ для достатньо великих $m\in\mathbb{N}$. Крім того, $h(V)\leq h(U)=2r_0<\delta/2$ і, оскільки за (18) $h\big(|\gamma^*_{1,m}|\big)>\delta/2$, то $|\gamma^*_{1,m}|\cap(D\setminus V)\neq\varnothing$. Тоді $|\gamma^*_{1,m}|\cap\partial V\neq\varnothing$ (див. [19], теорема 1.I.5.46). Аналогічно, $h(V)\leq h(U)=2r_0<\delta/2$ і, оскільки за (18) $h(|\gamma^*_{2,m}|)>\delta/2$, то $|\gamma^*_{2,m}|\cap(D\setminus V)\neq\varnothing$. Згідно з теоремою 1.I.5.46 [19] отримуємо, що $|\gamma^*_{1,m}|\cap\partial V\neq\varnothing$. Отже, (21) встановлено. З огляду на (19)–(21) одержуємо, що

$$M\big(\Gamma\big(|\gamma^*_{1,m}|,|\gamma^*_{2,m}|,D\big)\big)>N.\tag{22}$$

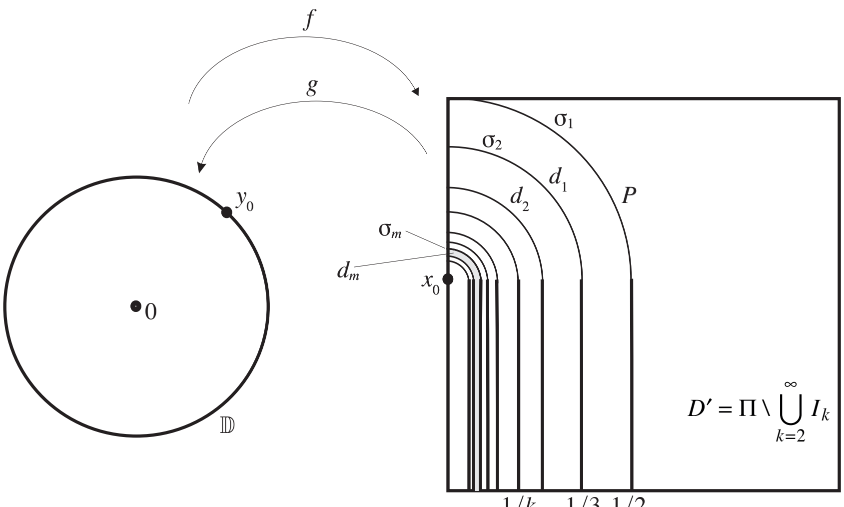

Рис. 4

Нерівність (22) суперечить (17), бо $\Gamma\big(|\gamma^*_{1,m}|, |\gamma^*_{2,m}|, D\big) \subset \Gamma_m$, отже,

$$M\big(\Gamma\big(|\gamma^*_{1,m}|, |\gamma^*_{2,m}|, D\big)\big) \leq M(\Gamma_m) \leq N.$$

Отримана суперечність свідчить про хибність припущення в (15).

Теорему 2 доведено.

5. Деякі приклади.

***Приклад* 1.** Отримаємо спочатку відображення, яке задовольняє умови теореми 1. По-перше, розглянемо випадок, коли це відображення є гомеоморфізмом, а функція Q — обмеженою. Для спрощення розглянемо плоский випадок. Нехай D' — одиничний квадрат із вилученими відрізками $I_k = \big\{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/k,\ 0 < y < 1/2\big\},\ k = 2, 3, \ldots$ (див. рис. 4). Розглянемо простий кінець P області D', створений за допомогою розрізів

$$\sigma_m = \left\{z = x_0 + \frac{e^{i\varphi}}{m+1},\ x_0 = (0, 1/2),\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Можна показати, що кінець P є простим. За теоремою Рімана про відображення існує конформне відображення g одиничного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на область D', крім того, за теоремою Каратеодорі простому кінцю P відповідає деяка точка $y_0 \in \partial\mathbb{D}$ така, що $C(f, y_0) = I(P)$, $f = g^{-1}$ (див. [21], теорема 9.4). Отже, можна вибрати принаймні дві послідовності $z_k, w_k \in D'$, $k = 1, 2, \ldots$, такі, що $z_k, w_k \to P$, $z_k \to z_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$, $z_0 \neq w_0$, причому $f(z_k) \to y_0$ і $f(w_k) \to y_0$ при $k \to \infty$. В цьому випадку відображення $f := g^{-1}$ не має неперервного продовження у точку y_0 в поточковому сенсі, але g має неперервне продовження $\overline{g} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D'}_P$.

Оскільки g — конформне відображення, воно задовольняє співвідношення (2) при $Q \equiv 1$ (див., наприклад, [13], теорема 3.2).

Зауважимо, що відображення f задовольняє всі умови теореми 1. Область $\mathbb{D}$ має слабко плоску межу (див., наприклад, [16], теореми 17.10, 17.12), а область D' є регулярною за означенням, крім того, функція $Q \equiv 1$ є інтегровною в D'.

***Приклад* 2.** Для того щоб отримати аналогічне відображення з розгалуженням у (2), покладемо $f_1(z) = (f \circ g)(z)$, де $g(z) = z^2$. Зауважимо, що $K_O(z, f_1) = 1$ і $N(f_1, \mathbb{D}) = 2$, тому f_1 також задовольняє співвідношення (2) з $Q \equiv 2$. Знову-таки, f_1 задовольняє всі умови теореми 1.

***Приклад* 3.** На основі прикладів 1, 2 побудуємо відображення з розгалуженням, яке має необмежену характеристику і задовольняє всі умови теореми 1. Розглянемо таку конструкцію: нехай $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{e\sqrt{2}}(z - (1/2, 1/2))$, $z \in D'$, тоді φ переводить D' у деяку область D'', що повністю лежить у крузі $B(0, 1/e)$. Цю область D'' перетворимо на деяку іншу однозв'язну область D''' за допомогою гомеоморфізму $\varphi_2(z) = \dfrac{z}{|z| \log \dfrac{1}{|z|}}$, $\varphi_2(0) := 0$. Тепер цю область D''' перетворимо за допомогою деякого конформного відображення φ_3 на одиничний круг $\mathbb{D}$ (таке конформне відображення існує завдяки теоремі Рімана). Нарешті, в $\mathbb{D}$ покладемо $\varphi_4(z) = z^2$. Тепер розглянемо відображення

$$F(z) = \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_4\right)(z) \tag{23}$$

і окремо $F_1(z) = \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}\right)(z)$ і $F_2(z) = \left(\varphi_3^{-1} \circ \varphi_4\right)(z)$. Насамперед зауважимо, що $K_O(z, F_1) = K_O(z, \varphi_2^{-1})$, оскільки відображення φ_1^{-1} є конформним. Використовуючи техніку, застосовану при розгляді твердження 6.3 [3], можна встановити, що $\varphi_2^{-1} = \dfrac{z}{|z|} e^{-\frac{1}{|z|}}$, причому $K_O(z, F_1) = K_O(z, \varphi_2^{-1}) = \dfrac{1}{|z|}$. Тоді

$$K_O(F_1^{-1}(z), F_1) = K_O\big((\varphi_2 \circ \varphi_1)(z), F_1\big).$$

Маємо

$$K_O\big((\varphi_2 \circ \varphi_1)(z), F_1\big) = \frac{1}{|z|}\Bigg|_{z \mapsto \frac{z-(1/2,1/2)}{|z-(1/2,1/2)| \log \frac{e\sqrt{2}}{|z-(1/2,1/2)|}}} = \log \frac{e\sqrt{2}}{|z - (1/2, 1/2)|}.$$

Зазначимо, що F_1 є відображенням класу C^1 в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, крім того, якобіан $|J(z, F_1)| = |z|^{-3} \times \times e^{-2/|z|}$ є локально обмеженим в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. В такому випадку, за наслідком 8.5 в [3], відображення F_1 є відображенням зі скінченним спотворенням довжини в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Отже, за теоремою 8.5 [3] відображення F_1 задовольняє співвідношення

$$M(\Gamma'') \le \int\limits_{D'} Q(z) \rho_*(z)\, dm(z) \tag{24}$$

для будь-якої сім'ї Γ'' локально спрямлюваних кривих γ в області D'' і будь-якої функції $\rho_* \in \operatorname{adm} F_1(\Gamma'')$, де $Q(z) = \log \dfrac{e\sqrt{2}}{|z - (1/2, 1/2)|}$.

З іншого боку, відображення F_2 задовольняє співвідношення

$$M(\Gamma) \le 2M(F_2(\Gamma)), \tag{25}$$

оскільки $N(F_2, \mathbb{D}) = 2$ і $K_O(F_2, z) = 1$ (див. [13], теорема 3.2). Тоді, об'єднуючи (24) і (25), маємо

$$M(\Gamma) \leq \int\limits_{D'} 2Q(z)\rho_*(z)\, dm(z) \tag{26}$$

для будь-якої сім'ї Γ локально спрямлюваних кривих γ в $\mathbb{D}$ і будь-якої функції $\rho_* \in \in \operatorname{adm} F_1(F_2(\Gamma)) = \operatorname{adm} F(\Gamma)$, де $Q(z) = \log \dfrac{e\sqrt{2}}{|z-(1/2,1/2)|}$. Зауважимо, що функція $Q(z) = = \log \dfrac{e\sqrt{2}}{|z-(1/2,1/2)|}$ є інтегровною в області D'. Також зазначимо, що нерівність (26) є частковим випадком співвідношення (2), оскільки в (26) сім'я кривих є будь-якою, отже, замість Γ можна взяти $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$. Крім того, ми можемо покласти в (26) $\rho_*(z) = \eta(|z-y_0|)$ при $r_1 < |z-y_0| < r_2$ і $z \in D'$, $\rho_*(z) = 0$ — в інших випадках. Якщо η задовольняє (3), то можна показати, що $\rho_* \in \operatorname{adm}\Gamma$ для $\Gamma = \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ (див. [16], теорема 5.7).

Отже, всі умови теореми 1 виконуються. За цією теоремою відображення F продовжується до неперервного відображення $\overline{F} : \mathbb{D} \to \overline{D'}_P$.

***Приклад* 4.** Тепер побудуємо приклад, що стосується теореми 2. Як відомо, дробово-лінійні автоморфізми одиничного круга мають вигляд

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Покладемо $\theta = 0$, $a = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Розглянемо сім'ю відображень $\widetilde{f}_n(z) = \dfrac{z-1/n}{1-z/n} = = \dfrac{nz-1}{n-z}$. Нехай $\widetilde{A} = [0, 1/2]$ і $t \in [0, 1/2]$, тоді $\widetilde{f}_n(t) = \dfrac{t-1/n}{1-t/n}$. Оскільки похідна $\widetilde{f}_n'(t) = = \dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^2}$ невід'ємна скрізь, найменше значення функції $\widetilde{f}_n(t)$ на A дорівнює $-1/n$, а найбільшим є $\dfrac{1/2-1/n}{1-1/2n} \to 1/2$ при $n \to \infty$. Отже, існує таке $\delta > 0$, що $h(\widetilde{f}_n(\widetilde{A}), \partial\mathbb{D}) > \delta > 0$. Нехай тепер $f_n := \widetilde{f}_n^{-1}$ і $A = F(\widetilde{A})$, де F — відображення з прикладу 3 (див. співвідношення (23)). Тоді сім'я відображень $F_n := F \circ f_n$ задовольняє всі умови теореми 2. Зауважимо, що кожне з відображень F_n не має навіть неперервного евклідового продовження на одиничне коло, але має це продовження як відображення $\overline{F_n} : \mathbb{D} \to \overline{D'}_P$. Більше того, сім'я відображень $\{\overline{F_n}\}_{n=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.

Література

1. A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains*, Ukr. Math. J., **71**, № 7, 1138–1145 (2019).
2. A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains*, Ukr. Math. J., **72**, № 2, 191–202 (2020).
3. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).
4. R. Salimov, B. Klishchuk, *An extremal problem for the volume functional*, Mat. Stud., **50**, № 1, 36–43 (2018).
5. Б. А. Клищук, Р. Р. Салимов, *Нижние оценки объема образа шара*, Укр. мат. журн., **71**, № 6, 774–785 (2019).
6. R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *On the equicontinuity of one family of inverse mappings in terms of prime ends*, Ukr. Math. J., **70**, № 9, 1456–1466 (2019).

7. Є. О. Севостьянов, С. О. Скворцов, Н. С. Ількевич, *Про поведінку обернених гомеоморфізмів в термінах простих кінців*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **33**, 188 – 203 (2019).
8. N. S. Ilkevych, E. A. Sevost'yanov, S. O. Skvortsov, *On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends*, Ann. Fenn. Math., **46**, № 1, 371 – 388 (2021).
9. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends*, Укр. мат. вісн., **12**, № 1, 27 – 66 (2015).
10. Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории простых концов для пространственных областей*, Укр. мат. журн., **67**, № 4, 467 – 479 (2015).
11. D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, *Prime ends and Orlicz – Sobolev classes*, St. Petersburg Math. J., **27**, № 5, 765 – 788 (2016).
12. R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **35**, 13 – 40 (1979).
13. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448**, 1 – 40 (1969).
14. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
15. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., **11**, 1 – 44 (1976).
16. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
17. D. P. Ilyutko, E. A. Sevost'yanov, *On prime ends on Riemannian manifolds*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 47 – 63 (2019).
18. E. O. Sevost'yanov, S. O. Skvortsov, O. P. Dovhopiatyi, *On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality*, J. Math. Sci., **252**, № 4, 541 – 557 (2021).
19. К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, Москва (1969).
20. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **98**, 171 – 219 (1957).
21. Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, Мир, Москва (1971).

Одержано 03.01.21