DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6691

УДК 517.9

Д. С. Бігун, О. О. Покутний (Ін-т математики НАН України, Київ),
Є. В. Панасенко (Запоріз. нац. ун-т)

АВТОНОМНІ НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА *

We investigate boundary-value problems for the Lyapunov equation in the Hilbert space in the case where the corresponding problem is defined on an interval that depends on a parameter. We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of generalized solutions of the problem.

Досліджуються крайові задачі для рівняння типу Ляпунова у просторі Гільберта. Розглянуто випадок, коли відрізок, на якому розглядається задача, залежить від параметра ε. Отримано необхідні та достатні умови існування узагальнених розв'язків відповідної задачі.

Вступ. Дослідженню рівняння Ляпунова та застосуванню його методів у скінченновимірному та нескінченновимірному випадках присвячено багато робіт [1 – 13]. Слід зауважити, що, як правило, досліджуються коректні нерезонансні задачі, коли існує єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правих частин рівняння. У даній статті досліджується нерегулярна (резонансна) крайова задача [16] для нелінійно збуреного рівняння Ляпунова у просторі Гільберта на відрізку, правий кінець якого залежить від параметра ε. У загальному випадку така задача може бути узагальненою нормально розв'язною з оператором у лінійній частині, який може мати незамкнену множину значень [14]. Таку задачу можна дослідити з допомогою сильного узагальнено-оберненого оператора [15].

1. Постановка задачі. Розглянемо автономну крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B + \varepsilon R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon) + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ — невідома оператор-функція з простору $C^1\left([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)\right) \times C(0;\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$; A, B — лінійні обмежені оператори ($A, B \in \mathcal{L}(H_1)$); $\Phi(t)$ — обмежена оператор-функція зі значеннями у $\mathcal{L}(H_1)$, $\Phi(t) \in C([a;b(\varepsilon)];\ \mathcal{L}(H_1)])$; α — елемент гільбертового простору H_2; $R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійна за змінною Z оператор-функція, неперервно диференційовна по $Z(t,\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку і неперервна по ε в околі нуля: $R(Z(\cdot,\varepsilon)) \in C^1[\|Z - Z_0\| \le q]; R(Z,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$; q й ε — достатньо малі сталі; ℓ — лінійний неперервний оператор: $\ell\colon C^1([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ і $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений оператор, неперервно диференційовний по Z у розумінні Фреше.

* Виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (№ 2020.02/0089) та проєкту SOMPATY (European Union's 2 Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie grant No. 873071).

2. Лінійна задача. При $\varepsilon = 0$ отримаємо породжуючу автономну крайову задачу

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + \Phi(t), \tag{3}$$

$$\ell Z_0(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

де $Z_0(t) \in C^1\left([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\right),\ b^* = b(0)$. Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить $\Phi(t)$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi] \in C^1\left([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\right)$ вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V(\tau)V^{-1}(t),$$

де $U(t)$, $V(t)$ — еволюційні оператори операторних рівнянь

$$\dot{X}(t,\tau) = AX(t,\tau), \qquad X(\tau,\tau) = I, \qquad X(t) := X(t,0),$$

$$\dot{Y}(t,\tau) = BY(t,\tau), \qquad Y(\tau,\tau) = I, \qquad Y(t) := Y(t,0),$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ задовольняє операторно-диференціальне рівняння

$$\dot{Y}(t,\tau) = -Y(t,\tau)B, \qquad Y(\tau,\tau) = I, \qquad Y(t) = Y(t,0).$$

За допомогою цього оператора можна зобразити загальний розв'язок рівняння (3) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau, \tag{5}$$

де довільний оператор M належить $\mathcal{L}(H_1)$. Підставивши (5) у крайову умову (4), отримаємо операторне рівняння відносно оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau, \tag{6}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_0^{\cdot}[M] \colon \mathcal{L}(H_1) \to H_2$. Припустимо, що оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним. Тоді, як показано в [14], він є нормально розв'язним та існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} \colon \mathcal{L}(H_1) \to N(\mathbf{L})$ та $\mathcal{P}_Y \colon H_2 \to Y$, які індукують розбиття $\mathcal{L}(H_1)$ і H_2 у прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathcal{L}(H_1) = N(\mathbf{L}) \oplus X,$$

$$H_2 = Y \oplus R(\mathbf{L}).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора $\mathbf{L}$ рівняння (6) є розв'язним [18] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{7}$$

Тут $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ — проєктор на ядро оператора $\mathbf{L}^*$, спряженого до оператора $\mathbf{L}$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (6) множині значень оператора $\mathbf{L}$.

При виконанні умови розв'язності (7) операторне рівняння (6) має множину розв'язків вигляду

$$M = \mathbf{L}^{-}\left[\alpha - \ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C,$$

де C — довільний лінійний обмежений оператор ($C \in \mathcal{L}(H_1)$), $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ — проєктор на ядро оператора $\mathbf{L}$. Підставивши оператор M у зображення (5), отримаємо загальний розв'язок задачі (3), (4) у вигляді

$$Z_0(t, C) = \mathbf{K}_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau - \mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^{-}\ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] + \mathbf{K}_0^t[\mathbf{L}^{-}\alpha].$$

Таким чином, отримали таку теорему.

Теорема 1. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Крайова задача* (3), (4) *має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова* (7). *За виконання умови* (7) *розв'язки крайової задачі* (3), (4) *мають вигляд* (8).

Покажемо, що цю задачу можна зробити розв'язною й у випадку, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою.

Нехай задано лінійний обмежений оператор $\mathbf{L}$, що діє з простору Банаха $\mathcal{L}(H_1)$ у простір Гільберта H_2. Далі будемо вважати, що простір $N(\mathbf{L})$ доповнювальний, тобто мають місце розклади у прямі суми підпросторів

$$\mathcal{L}(H_1) = N(\mathbf{L}) \oplus X, \qquad H_2 = \overline{R(\mathbf{L})} \oplus Y \tag{9}$$

і відповідні розклади одиниці

$$I_{\mathcal{L}(H_1)} = P_{N(\mathbf{L})} + P_X, \qquad I_{H_2} = P_{\overline{R(\mathbf{L})}} + P_Y,$$

де $P_{N(\mathbf{L})}, P_X, P_{\overline{R(\mathbf{L})}}, P_Y$ — проєктори на відповідні підпростори. Зауважимо, що другий розклад простору $H_2 = \overline{R(\mathbf{L})} \oplus Y$ у (9) завжди існує. За аналогією з означенням [15, 19] допустимої пари введемо означення узагальненого $\mathbf{L}$-допустимого підпростору.

Означення 1. *Нехай* $\mathbf{L}: \mathcal{L}(H_1) \to H_2$ *— лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха* $\mathcal{L}(H_1)$ *у простір Банаха* H_2, *а підпростір* $X \subset \mathcal{L}(H_1)$ *такий, що виконується умова* (9). *Тоді підпростір* X *будемо називати узагальненим* $\mathbf{L}$*-допустимим підпростором.*

Розглянемо звужений оператор $L_X : X \to \overline{R(\mathbf{L})}$, $L_X M = \mathbf{L}M$, $M \in X$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір X за нормою $\|M\| = \|L_X M\|_{H_2}$ і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$. Тоді, як і у випадку гільбертових просторів [15], оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(\mathbf{L})}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ і $\overline{R(\mathbf{L})}$. Будемо позначати через $\overline{\mathcal{L}(H_1)} = \overline{X} \oplus N(\mathbf{L})$ розширений вихідний простір.

Означення 2. *Нехай* $\mathbf{L}$ *належить* $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H_1), H_2)$, *а* X *— узагальнений* $\mathbf{L}$*-допустимий підпростір. Тоді відображення*

$$\mathbf{L}_X^- : H_2 \to \overline{\mathcal{L}(H_1)},$$

$$\mathbf{L}_X^- y = \overline{L}_X^{-1} y_1, \qquad y = y_1 + y_2, \qquad y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})}, \qquad y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним X*-узагальнено-оберненим до* $\mathbf{L}$.

Безпосередньо з означення сильного X-узагальнено-оберненого оператора випливають такі властивості:

1) $\mathbf{L}\mathbf{L}_X^-\mathbf{L} = \mathbf{L}$,

2) $\mathbf{L}_X^-\mathbf{L}\mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^-$ на X

(або з заміною $\mathbf{L}$ на L_X),

3) $\overline{L}_X\mathbf{L}_X^-\overline{L}_X = \overline{L}_X$,

4) $\mathbf{L}_X^-\overline{L}_X\mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^-$ на $\overline{X}$.

Аналогів властивостей 3 та 4 з означення псевдооберненого оператора у загальному випадку немає.

Розглянемо тепер рівняння (6) у просторах Банаха $\mathcal{L}(H_1)$ і H_2, яке запишемо у вигляді

$$\mathbf{L}M = y, \tag{10}$$

де

$$y = \alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau$$

— елемент простору H_2, $\mathbf{L}$ — такий лінійний обмежений оператор, що підпростір X є узагальненим $\mathbf{L}$-допустимим. Відомо [21], що у загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і може бути не єдиним. Якщо розв'язок не існує у звичайному сенсі, то часто знаходять такий оператор $M = \overline{M} \in \mathcal{L}(H_1)$, який мінімізує норму нев'язки $\|\mathbf{L}\overline{M} - y\|_{H_2} = \inf_{M \in \mathcal{L}(H_1)} \|\mathbf{L}M - y\|_{H_2}$. Його називають квазірозв'язком [21, 22]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора $\mathbf{L}$ є суттєвою, але у загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

Запропонуємо означення розв'язків для рівняння (10), щоб можна було гарантувати їхнє існування у тому чи іншому сенсі.

Використавши побудовану вище конструкцію, розширимо вихідний простір $\mathcal{L}(H_1)$ й оператор $\mathbf{L}$, заданий на ньому, таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення, яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами, у загальному випадку виявляється багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків. Для рівняння (10) будемо виділяти три типи розв'язків.

1. *Класичні розв'язки.*

Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ нормально розв'язний. Тоді, як відомо [21], неоднорідність $y \in R(\mathbf{L})$ у рівнянні (10) належить образу оператора тоді й тільки тоді, коли $P_{N(\mathbf{L}^*)} y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено-обернений оператор $\mathbf{L}^-$, за допомогою якого множина розв'язків рівняння (10) у просторі Банаха має вигляд

$$M = \mathbf{L}^- y + P_{N(\mathbf{L})} C \quad \forall C \in \mathcal{L}(H_1).$$

2. *Сильні узагальнені розв'язки.*

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою. Оскільки оператор $\mathbf{L}$ має узагальнений $\mathbf{L}$-допустимий підпростір, то для простору $\mathcal{L}(H_1)$ справджується розклад (9).

Тоді ми можемо говорити про сильний узагальнений розв'язок рівняння (10). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ і $\overline{R(\mathbf{L})}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ і коректним буде таке означення.

Означення 3. *Елемент* $\overline{L}_X^{-1}y$ *будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння* (10), *якщо* y *належить* $\overline{R(\mathbf{L})}$.

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (10) буде мати вигляд

$$M = \mathbf{L}_X^- y + P_{N(\mathbf{L})}C \quad \forall C \in \mathcal{L}(H_1),$$

а оператор $\mathbf{L}_X^- y := \overline{L}_X^{-1}y_1$, де $y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})}, y_2 \in Y$.

3. *Узагальнені квазірозв'язки.*

Розглянемо випадок, коли y не належить $\overline{R(\mathbf{L})}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $P_{N(\mathbf{L}^*)}y \neq 0$. У цьому випадку сильні узагальнені розв'язки не існують, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $\inf \|\overline{\mathbf{L}}M - y\|_{H_2}$, де $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$ і інфімум береться по всіх елементах (операторах) $M \in \overline{\mathcal{L}(H_1)}$. Тут $P_{\overline{X}}$ — проєктор на $\overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 4. *Довільний елемент з множини*

$$\{\mathbf{L}_X^- y + P_{N(\mathbf{L})}C\}_{C \in \mathcal{L}(H_1)}$$

будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (10).

***Зауваження* 1.** Якщо $R(\mathbf{L}) = \overline{R(\mathbf{L})}$, то узагальнені квазірозв'язки збігаються зі звичайними квазірозв'язками.

***Зауваження* 2.** Оператор $\mathbf{L}_X^- y$ з наведеного вище означення може мати не найменшу норму на відповідному просторі, на відміну від $\overline{L}^+ y$.

Виходячи з цього, повну теорему розв'язності крайової задачі можна сформулювати таким чином.

Теорема 2. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *має узагальнений* $\mathbf{L}$*-допустимий підпростір* X. *Тоді*:

$1_1)$ *крайова задача* (3), (4) *має сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова* (7); *якщо* $\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau \in R(\mathbf{L})$, *то розв'язки будуть звичайними класичними*;

$1_2)$ *за виконання умови розв'язності* (6) *множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд* (8), *де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином*:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau - \mathbf{K}_0^t \left[\mathbf{L}_X^- \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] + \mathbf{K}_0^t[\mathbf{L}_X^- \alpha]; \tag{11}$$

$2_1)$ *крайова задача* (3), (4) *має сильні узагальнені квазірозв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] \neq 0; \tag{12}$$

$2_2)$ *за виконання умови розв'язності* (12) *множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд* (8), *де узагальнений оператор Гріна визначається за формулою* (11).

3. Нелінійна задача. Знайдемо необхідну умову існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в породжуючий розв'язок $Z_0(t, C)$ вигляду (8).

На відміну від неавтономних крайових задач [20, 21] правий кінець $b(\varepsilon)$ відрізка $[a; b(\varepsilon)]$, на якому шукається розв'язок задачі (1), (2), є невідомим, і його потрібно визначити у процесі побудови розв'язку. Виконаємо заміну змінної [20, с. 209]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \qquad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \qquad \beta(0) = \beta^*.$$

В результаті отримаємо нелінійну автономну крайову задачу з невідомою оператор-функцією $Z = Z(\tau,\varepsilon)$, яка визначена на відрізку $[a; b^*]$ фіксованої довжини, з простору $C^1\left([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\right)\times$ $\times\, C(0; \varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$:

$$\dot{Z}(\tau,\varepsilon) = AZ(\tau,\varepsilon) - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi +$$
$$+\,\varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\Big(AZ(\tau,\varepsilon) - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi\Big) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))R(Z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big), \tag{13}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{14}$$

Виконаємо у крайовій задачі (13), (14) заміну змінних

$$Z(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau,\varepsilon).$$

Розв'язок $Z(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau,\varepsilon)$ будемо шукати в околі розв'язку породжуючої задачі (3), (4). Врахувавши, що $Z_0(\tau, C^0)$ є розв'язком крайової задачі (3), (4), отримаємо таку крайову задачу:

$$\dot{Y}(\tau,\varepsilon) = AY(\tau,\varepsilon) - Y(\tau,\varepsilon)B +$$
$$+\,\varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\Big(A(Z_0(\tau,C^0) + Y(\tau,\varepsilon)) - (Z_0(\tau,C^0) + Y(\tau,\varepsilon))B + \Phi\Big) +$$
$$+\,(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))R\Big(Z_0(\tau,C^0) + Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big), \tag{15}$$

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\Big(Z_0(\tau,C^0) + Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big), \tag{16}$$

на фіксованому відрізку $[a; b^*]$. Застосувавши теорему 2 [17] до задачі (15), (16), одержимо необхідну умову існування розв'язків задачі (1), (2):

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[J(Z_0(\cdot,C^0),0) - \ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\Big[\beta^*\Big(AZ_0(\tau,C^0) - Z_0(\tau,C^0)B + \Phi\Big) +$$
$$+\,R\Big(Z_0(\tau,C^0),0\Big)\Big]d\tau\Bigg] = 0.$$

Позначивши $F_0(\tau, C^0) = \beta^*\big[AZ_0(\tau, C^0) - Z_0(\tau, C^0)B + \Phi\big] + R\Big(Z_0(\tau, C^0), 0\Big)$, отримаємо операторне рівняння відносно оператора $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$:

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[J(Z_0(\cdot, C^0), 0) - \ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\Big[F_0(\tau, C^0)\Big]d\tau\right] = 0. \tag{17}$$

Теорема 3 (***необхідна умова***). *Нехай автономна крайова задача* (13), (14) *має розв'язок* $Z(\tau, \varepsilon) \in C^1\left([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\right) \times C(0; \varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *обертається у породжуючий розв'язок* $Z_0(\tau, 0) = Z_0(\tau, C^0)$ *задачі* (3), (4). *Тоді оператор* $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$ *задовольняє операторне рівняння* (17). *Це рівняння будемо називати рівнянням для породжуючих операторів крайової задачі* (1), (2).

Знайдемо достатню умову існування розв'язків $Z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2). Припустимо, що необхідну умову поставленої задачі виконано. Розв'язок крайової задачі (15), (16) має вигляд

$$Y(\tau, \varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] + Y^{(1)}(\tau, \varepsilon), \tag{18}$$

де

$$Y^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^- J\Big(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\Big)\right] +$$

$$+\varepsilon G_1\Big\{\beta(\varepsilon)\Big[A(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon)) - (Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon))B + \Phi\Big] +$$

$$+\big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\big)R\Big(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\Big)\Big\}(\tau),$$

$$G_1\{F\}(t) = \int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^t[F]d\tau - \mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[F]d\tau\right].$$

Виділимо в оператор-функції $R(Z_0 + Y, \varepsilon)$ і операторі $J(Z_0 + Y, \varepsilon)$ лінійну частину по Y і члени нульового порядку по ε:

$$R\Big(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\Big) = R\Big(Z_0(\tau, C^0), 0\Big) + A_1(\tau)Y + \varphi_1(Y, \varepsilon), \tag{19}$$

$$J\Big(Z_0(\cdot, C^0) + Y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\Big) = J\Big(Z_0(\cdot, C^0), 0\Big) + \ell_1 Y(\cdot, \varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big), \tag{20}$$

де

$$A_1(\tau) = \frac{\partial}{\partial Z}R(Z, 0)\Big|_{Z = Z_0(\tau, C^0)}, \qquad \varphi_1(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1(0, 0)}{\partial Y} = 0,$$

причому $\ell_1 Y(\cdot, \varepsilon)$ — лінійна частина, а $J_1\big(Y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big)$ — нелінійна по Y частина оператора $J\Big(Z_0(\cdot, C^0) + Y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\Big)$, $J(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial J(0, 0)}{\partial Y} = 0$.

Перетворимо неоднорідність системи (15), використавши розклад (19):

$$\beta\Big[A(Z_0 + Y) - (Z_0 + Y)B + \Phi\Big] + (1 + \varepsilon\beta)R\big(Z_0 + Y, \varepsilon\big) =$$

$$= \beta AZ_0 + \beta AY - \beta Z_0 B - \beta YB + \beta\Phi + R\big(Z_0, 0\big) + A_1(\tau)Y + \varphi_1(Y,\varepsilon) + \varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big) =$$

$$= \beta^* AZ_0 + \overline{\beta} AZ_0 + \beta^* AY + \overline{\beta} AY - \beta^* Z_0 B - \overline{\beta} Z_0 B - \beta^* YB -$$

$$-\overline{\beta} YB + \beta^*\Phi - \beta^*\Phi + \beta\Phi +$$

$$+ R\big(Z_0, 0\big) + A_1(\tau)Y + \varphi_1(Y,\varepsilon) + \varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big) =$$

$$= F_0(\tau, C^0) + \beta^* AY + A_1(\tau)Y - \beta^* A\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] - A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] +$$

$$+ \beta^* A\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] + A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] - \beta^* YB + \beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]B -$$

$$- \beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]B + \overline{\beta} AZ_0 - \overline{\beta} Z_0 B - \overline{\beta}\Phi + \overline{\beta} AY - \overline{\beta} YB + \varphi_1(Y,\varepsilon) + \varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big) =$$

$$= F_0(\tau, C^0) + \overline{A}_1[c](\tau) + \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon),$$

де

$$\overline{A}_1[\cdot](\tau) = \big\{\big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\right] - \beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\right]B, AZ_0 - Z_0 B + \Phi\big\}$$

— блочний оператор; $c = \begin{pmatrix} C_0 \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$, $\overline{\beta} = \beta - \beta^* \in \mathbb{R}^1$, а оператор $R_1(Y,\varepsilon)$ має вигляд

$$R_1(Y,\varepsilon) = \overline{\beta} AY - \overline{\beta} YB + \varepsilon\beta R\big(Z_0 + Y, \varepsilon\big) + \varphi_1(Y,\varepsilon).$$

Таким чином, приходимо до задачі побудови розв'язку $Y(\tau,\varepsilon)$:

$$Y(\tau,\varepsilon) \in C^1\big([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\big) \times C(0;\varepsilon_0], \ \tau \in [a; b^*], \ \varepsilon \in [0;\varepsilon_0], \ Y(\tau, 0) = 0,$$

диференціального рівняння

$$\frac{dY(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY(\tau,\varepsilon) - Y(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\big\{F_0(\tau, C^0) + \overline{A}_1[c](\tau) +$$
$$+ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\big\}, \tag{21}$$

яке задовольняє крайову умову

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\Big(Z_0(\cdot, C^0) + Y(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\Big). \tag{22}$$

Умова розв'язності крайової задачі (15), (16), а отже і задачі (21), (22), у нових позначеннях набирає вигляду

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[J\Big(Z_0(\cdot, C^0), 0\Big) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) -$$

$$- \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[F_0(s, C^0) + \overline{A}_1[c](s) + \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] = 0.$$

З урахуванням операторного рівняння (17) відносно оператора $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$ і зображення (18) маємо

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1\mathbf{K}_0^{\cdot}\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]+\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\overline{A}_1[c](s)+\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg]=0,$$

звідки

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\ell_1\mathbf{K}_0^{\cdot}\left[P_{N(\mathbf{L})}C_0\right]-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\left[\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix}C_0\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}\right](s)\right]ds\right]=$$

$$=-\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

В результаті отримуємо операторне рівняння

$$B_0C^0=G_0, \tag{23}$$

де

$$B_0C=\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\ell_1\mathbf{K}_0^{\cdot}\left[P_{N(\mathbf{L})}C\right]-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\left[\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix}C\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}\right](s)\right]ds\right],$$

$$G_0=-\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

Для розв’язності рівняння (23) необхідно і достатньо, щоб

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg]=0,$$

або $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}=0$.

Таким чином, для побудови розв’язку $Y(\tau,\varepsilon)\in C^1\big([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)\big)\times C(0;\varepsilon_0],\ Y(\tau,0)=0,$ крайової задачі (21), (22) отримуємо операторну систему

$$Y(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^{\tau}[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C^0]+Y^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$C^0=-B_0^{-}\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg]+\mathcal{P}_{N(B)}\overline{C}_0, \tag{24}$$

$$Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}J\big(Z_0+Y,\varepsilon\big)\right]+\varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0)+\overline{A}_1[c](s)+$$

$$+\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big\}(\tau),$$

де

$$G_1\{F\}(t)=\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{t}[F]d\tau-\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[F]d\tau\right],\qquad c=\begin{pmatrix}C_0\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}.$$

Операторна система (24) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовується збіжний для всіх $\varepsilon\in[0;\varepsilon^*]$ метод простих ітерацій, причому величину ε^* можна оцінити знизу за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова.

Перше наближення $Y_1(\tau,\varepsilon)$ системи (24) природно шукати як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=AY_1(\tau,\varepsilon)-Y_1(\tau,\varepsilon)B+\varepsilon F_0(\tau,C^0),$$

$$\ell Y_1(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon J\big(Z_0(\cdot,C^0),0\big),$$

у вигляді

$$Y_1(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^{\tau}[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C_0]+Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),\qquad C^0=0,$$

$$Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}J\big(Z_0,0\big)\right]+\varepsilon G_1\big\{F_0(s,C^0)\big\}(\tau).$$

Друге наближення $Y_2(\tau,\varepsilon)$ шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=AY_2(\tau,\varepsilon)-Y_2(\tau,\varepsilon)B+\varepsilon\Big\{F_0(\tau,C^0)+\overline{A}_1[c](\tau)+$$

$$+\big[\beta^*A+A_1(\tau)\big]Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)-\beta^*Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)B+R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\},$$

$$\ell Y_2(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon J\big(Z_0(\cdot,C^0)+Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big),$$

у вигляді

$$Y_2(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^{\tau}[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C_1]+Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}J\big(Z_0+Y_1,\varepsilon\big)\right]+\varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0)+\overline{A}_1[c](s)+$$

$$+\left[\beta^* A + A_1(s)\right] Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\}(\tau).$$

З умови розв'язності системи для другого наближення отримуємо рівняння відносно оператора C_1:

$$B_0 C_1 = -\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1 Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) -$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\left[\beta^* A + A_1(s)\right] Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big] ds\Bigg],$$

розв'язок якого має вигляд

$$C_1 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1 Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) -$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\left[\beta^* A + A_1(s)\right] Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big] ds\Bigg] + \mathcal{P}_{N(B)}\overline{C}_1.$$

Продовжуючи обчислення далі, приходимо до висновку, що розв'язок операторної системи (24) можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$C_k = -B_0^- \mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\Bigg[\ell_1 Y_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$

$$-\ell\int\limits_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\left[\beta^* A + A_1(s)\right] Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big] ds\Bigg] + \mathcal{P}_{N(B)}\overline{C}_k,$$

$$Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{K}_0^t\Big[\mathbf{L}^- J\big(Z_0(\cdot,C^0) + Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big] + \varepsilon G_1\Bigg\{F_0(s,C^0) +$$

$$+\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix} C_k \\ \beta \end{pmatrix}\right](s) + \left[\beta^* A + A_1(s)\right] Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\tau), \qquad (25)$$

$$Y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C_k] + Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$Y_0(\tau,\varepsilon) = Y_0^{(1)}(\tau,\varepsilon) = 0, \quad k = 0,1,2,3,\ldots .$$

Теорема 4 (***достатня умова***). *Для кожного оператора* C^0 — *кореня операторного рівняння* (17) *при умові, що оператор* B_0 *є узагальнено-оборотним оператором і виконано умову* $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)} = 0$, *крайова задача* (15), (16) *має розв'язок* $Y(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$, $Y(\tau,0) = 0$. *Цей розв'язок можна визначити з операторної системи* (24) *за допомогою ітераційного процесу* (25), *збіжного при* $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$.

Крайова задача (13), (14) має розв'язок $Z(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$, $Z(\tau,0) = Z(\tau,C^0)$, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу (25) і формули

$$Z_k(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau,C^0) + Y_k(\tau,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Література

1. D. Dragicevic, C. Preda, *Lyapunov theorems for exponential dichotomies in Hilbert spaces*, Int. J. Math., **27**, № 4, Article 1650033 (2016), 13 p.
2. Vu Ngoc Phat, Tran Tin Kiet, *On the Lyapunov equation in Banach spaces and applications to control problems*, Int. J. Math. and Math. Sci., **29**, № 3, 155 – 166 (2000).
3. C. Preda, P. Preda, *Lyapunov operator inequalities for exponential stability of Banach space semigroups of operators*, Appl. Math. Lett., **25**, 401 – 403 (2012).
4. M. Gil', *Solution estimates for the discrete Lyapunov equation in a Hilbert space and applications to difference equations*, Axioms, **8**, № 1 (2019), 22 p.
5. L. Jodar, *An algorithm for solving generalized algebraic Lyapunov equations in Hilbert space, applications to boundary value problems*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **31**, 99 – 105 (1988).
6. Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith, *Lyapunov theorems for Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **31**, № 1, 44 – 49 (1994).
7. P. Gahinet, M. Sorine, A. J. Laub, C. Kenney, *Stability margins and Lyapunov equations for linear operators in Hilbert space*, Proc. 29th Conf. Decision and Control, 2638 – 2639 (1990).
8. K. M. Przyluski, *The Lyapunov equation and the problem of stability for linear bounded discrete-time systems in Hilbert space*, Appl. Math. and Optim., **6**, 97 – 112 (1980).
9. R. P. Ivanov, I. L. Raykov, *Parametric Lyapunov function method for solving nonlinear systems in Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **17**, 893 – 901 (1996).
10. A. Polyakov, *On homogeneous Lyapunov function theorem for evolution equations*, IFAC 2020 — Int. Federation Automatic Control, 21st World Congress (July 2020, Berlin / Virtual, Germany).
11. A. Pazy, *On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal., **3**, № 2, 291 – 294 (1972).
12. M. Gil', *Stability of linear equations with differentiable operators in a Hilbert space*, IMA J. Math. Control and Inform., 1 – 8 (2018).
13. С. М. Чуйко, *О решении матричных уравнений Ляпунова*, Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Математика, прикл. математика і механіка, № 1120, 85 – 94 (2014).
14. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
15. А. А. Бойчук, А. А. Покутный, *Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта*, Укр. мат. журн., **67**, № 9, 1181 – 1188 (2015).
16. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта*, Нелінійні коливання, **20**, № 3, 373 – 390 (2017).
17. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі* L_p, Нелінійні коливання, **21**, № 4, 523 – 536 (2018).
18. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
19. E. Deutch, *Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation*, Linear Algebra and Appl., **4**, 313 – 322 (1971).
20. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1995).
21. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
22. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1979).

Одержано 16.04.21