DOI: 10.37863/umzh.v73i9.6106

УДК 512+517.98

Д. І. Морозов (Нац. ун-т „Києво-Могилянська академія”)

ОПИС КЛАСУ СТРОГО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ СКІНЧЕННОСТАНОВИХ ІЗОМЕТРІЙ КІЛЬЦЯ Z_2

The condition of strict differentiability is a strengthening of the concept of differentiability, which is naturally applicable to the class of p-adic functions. In this article, we study the strict differentiability of finite-state isometries of the ring Z_2.

Умова строгої диференційовності є посиленням поняття диференційовності, природним для застосування до класу p-адичних функцій. Дану статтю присвячено дослідженню строгої диференційовності скінченностанових ізометрій кільця Z_2.

Дослідження групових автоматів є технічно достатньо складною задачею [1, 2]. Відображення групових автоматів 2-адичними функціями надає зручну техніку для роботи з ними [4, 5]. Оскільки на даний момент існує багато нерозв'язаних проблем, пов'язаних із групою скінченностанових автоматних підстановок, то є природним виділення множини функцій у класі 2-адичних ізометрій з певними властивостями, що відповідають скінченностановим автоматам.

Однією з таких властивостей є строга диференційовність функцій кільця Z_2 [3, 6]. Строга диференційовність є природним посиленням диференційовності для p-адичних функцій.

Умова строгої диференційовності накладає певні обмеження на поведінку функції в порівнянні зі звичайною диференційовністю. Особливості даних обмежень були використані при доведенні теореми 1.

Метою даної роботи є опис класу скінченностанових строго диференційовних функцій кільця Z_2.

Означення 1. *Нехай Z_2 — кільце цілих 2-адичних чисел. На цьому кільці задано неархімедів метричний простір з ультраметрикою $\rho(x,y) = \left(\dfrac{1}{2^{\mathrm{ord}_2(x,y)}}\right)$, де $\mathrm{ord}_2(x,y)$ — максимальна довжина спільного початку 2-адичного запису чисел x та y кільця Z_2.*

Означення 2. *Нехай f — ізометрія кільця Z_2. Запишемо $x \in Z_2$ у вигляді суми $x = x^{(n)} * 2^n + x_{(n)}$, де $x_{(n)} = x \mod 2^n$ — 2-кове невід'ємне ціле число довжиною не більше за n.*

Оскільки f — ізометрія, а отже для неї

$$(f(x_1^{(n)} * 2^n + x_{(n)}) - f(x_2^{(n)} * 2^n + x_{(n)})) \,\vdots\, 2^n,$$

то для кожного $x_{(n)}$ функцію f єдиним чином можна записати у вигляді

$$f(x) = f_{x_{(n)}}(x^{(n)}) * 2^n + \alpha_{id}(f^{[n]}_{x_{(n)}}(x_{(n)})),$$

де

$$f_{x_{(n)}} : Z_2 \to Z_2,$$

$$f^{[n]}_{x_{(n)}} : \mathbb{Z}_{2^n} \to \mathbb{Z}_{2^n},$$

$$\alpha_{id} : \mathbb{Z}_{2^n} \to Z_2, \quad \alpha_{id}(x) = x.$$

Ізометрію $f_{x_{(n)}}$ *назвемо станом n-го рівня функції* f.

Означення 3. *Означимо для ізометрії* f *кільця* Z_2 *множину станів* $\mathfrak{S}_f$ *таким чином*:

$$\mathfrak{S}_f = \{f_x | x \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Будемо називати ізометрію f *кільця* Z_2 *скінченностановою, якщо її множина станів* $\mathfrak{S}_f$ *є скінченною*:

$$|\mathfrak{S}_f| < \infty.$$

Природним є питання про те, які зі строго диференційовних [6] ізометрій є скінченностановими, а отже скінченноавтоматними.

Означення 4. *Означимо проєкцію ізометрії* a *кільця* Z_2 *на кулю* $B\left(x, \dfrac{1}{2^n}\right)$ *для* $x \in Z_2$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *таким чином*:

$$\pi_{x,n}[a] = a_{x_n},$$

де $x_n = x \mod 2^n$ *і* a_{x_n} *— стан* n*-го рівня функції* a.

Означення 5. *Нехай* a *— ізометрія кільця* Z_2. *Означимо множину* $F_a \subseteq Z_2$ *для* $t \in Z_2$ *таким чином*:

$$F_a = \left\{ \frac{a(x) - a(y)}{x - y} \,\middle|\, x, y \in Z_2, x \neq y \right\}.$$

Означення 6. *Нехай* a *— ізометрія кільця* Z_2. *Означимо множину* $F_a[n](t) \subseteq Z_2$ *для* $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$ *таким чином*:

$$F_a[n](t) = \left\{ \frac{a(x * 2^n + t) - a(y * 2^n + t)}{(x * 2^n + t) - (y * 2^n + t)} \,\middle|\, x, y \in Z_2, x \neq y \right\}.$$

Очевидно, що для $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}_{2^n}$ має місце рівність

$$F_a[n](t) = F_{a_t}.$$

Теорема 1. *Скінченностанова ізометрія кільця* Z_2 *є строго диференційовною в точці простору* Z_2 *тоді і лише тоді, коли її проєкція на певний окіл даної точки є лінійною функцією.*

Доведення. Нехай a — ізометрія кільця Z_2. Запишемо $x \in Z_2$ у вигляді суми $x = x^{(n)} * 2^n + x_{(n)}$, де $x_{(n)} = x \mod 2^n$ — 2-кове невід'ємне ціле число довжини n.

Означимо

$$F_a(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}.$$

Строга диференційовність ізометрії a в точці $z \in Z_2$ рівносильна існуванню границі в ультраметриці

$$\lim_{(x,y)\to(z,z)} F_a(x, y).$$

Оскільки a — скінченностанова ізометрія, то послідовність станів $\{a_{x_{(i)}} | \, i = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ містить скінченну кількість різних елементів. Отже, в цій послідовності знайдеться стан b, що зустрічається нескінченну кількість разів.

Означимо зростаючу нескінченну послідовність номерів $\{t_i\}$, для яких $a_{t_i} = b$. Означимо послідовність $\bar{x}$ таким чином:

$$\bar{x}_n = x^{(t_n)}.$$

Оскільки a — ізометрія, то мають місце рівності

$$\lim_{(x,y)\to(z,z)} F_a(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\bar{x}_n,\bar{x}_n)} F_b(x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

або обидві границі не існують. Отже, для існування границі (1) необхідне виконання рівності $|F_b| = 1$.

Множина F_b складається з єдиного елемента тоді і тільки тоді, коли b є лінійною функцією.

Справді, нехай

$$\frac{b(x) - b(y)}{x - y} = \mathrm{const}_1 \quad \forall x, y \in Z_2, \quad x \neq y.$$

Тоді

$$b(x) = \mathrm{const}_1 * x + (b(y) - \mathrm{const}_1 * y).$$

Оскільки $b(x)$ не залежить від y, то

$$b(y) - \mathrm{const}_1 * y = \mathrm{const}_2.$$

Остаточно маємо

$$b(x) = \mathrm{const}_1 * x + \mathrm{const}_2 \quad \forall x \in Z_2.$$

Теорему доведено.

Лема 1. *Якщо скінченностанова ізометрія кільця Z_2 є строго диференційовною в певній точці, то вона є строго диференційовною в кожній точці деякого її околу.*

Доведення. Справді, функція з лінійною проєкцією на певний окіл є строго диференційовною в кожній точці цього околу.

Означення 7. *Назвемо ізометрію $f : Z_2 \to Z_2$ кусково-лінійною, якщо Z_2 розбивається на скінченну кількість околів, проєкція на кожний з яких для функції f є лінійною функцією.*

Теорема 2. *Скінченностанова ізометрія f кільця Z_2 є строго диференційовною тоді і лише тоді, коли вона є кусково-лінійною функцією.*

Доведення. Оскільки ультраметричний простір Z_2 є компактним, то з покриття околами з теореми 1 можна виділити скінченне підпокриття. Оскільки простір є ультраметричним, то з цього підпокриття можна виділити підпокриття, що складається з куль, які не перетинаються. На кожній такій кулі проєкція ізометрії f є лінійною функцією, отже, f — кусково-лінійна функція.

Теорема 3. *Скінченностанова ізометрія кільця Z_2 не є строго диференційовною в жодній точці тоді і лише тоді, коли вона не містить лінійних станів.*

Доведення. Якщо скінченностанова ізометрія f не містить лінійних станів, то згідно з теоремою 2 вона не є строго диференційовною в кожній точці кільця Z_2.

Теорема 2 повністю описує клас строго диференційовних функцій, що є скінченностановими груповими автоматами над двійковим алфавітом.

Теорема 3 дозволяє будувати приклади функцій кільця Z_2, що не є строго диференційовними в жодній точці.

Напрямком подальшого дослідження є розширення отриманих в умовах строгої диференційовності результатів на клас диференційовних функцій.

Література

1. L. Bartholdi, Z. Sunik, *Some solvable automaton groups*, Contemp. Math., **394**, 11 – 29 (2006).
2. R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchanskii, *Automata, dynamical systems, and groups*, Proc. Steklov Inst. Math., **231**, 128 – 203 (2000).
3. Н. Коблиц, *p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции*, Мир, Москва (1982).
4. Д. І. Морозов, *Ізометрії та стискаючі функції кільця* Z_2, Вісн. Запоріз. нац. ун-ту, № 1, 90 – 97 (2014).
5. Д. І. Морозов, *Ізометричність поліномів над кільцем цілих* 2*-адичних чисел*, Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки, **113**, 13 – 15 (2011).
6. C. Weisman, *On p-adic differentiability*, J. Number Theory, **9**, 79 – 86 (1977).

Одержано 05.05.20